МАТЕМАТИКА В ВУЗЕ: КВАНТОВАНИЕ ТЕКСТА И ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ.

НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Татьяна Черняева,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Иркутский государственный университет
путей сообщения»
chetn2005@yandex.ru

Дифференциальное уравнение

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производные или дифференциалы.

Порядок ДУ

Порядком ДУ называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Например:
1) $y'\sin x = y\ln y$ — ДУ 1-го порядка,
2) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0$ — ДУ 2-го порядка,
3) $y''' = 2(y''-1)ctgx$ — ДУ 3-го порядка.

ДУ *n*-го порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

между независимой переменной x, функцией $y(x)$ и её производными y', y'', ..., $y^{(n)}$.

Виды ДУ

Если неизвестная функция в уравнении (1) зависит от одной независимой переменной $y = y(x)$, то ДУ называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*, если от нескольких переменных $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то ДУ называется *уравнением в частных производных*. Мы будем рассматривать только обыкновенные ДУ и их системы.

Уравнение, разрешённое относительно старшей производной

Если уравнение (1) удается разрешить относительно $y^{(n)}$, то получим *уравнение, разрешённое относительно старшей производной*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) . \qquad (2)$$

Решение ДУ

Решением ДУ называют функцию $y = \varphi(x)$, определенную на интервале (a, b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно, и такую, что подстановка функции $y = \varphi(x)$ в ДУ превращает последнее в тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Процесс нахождения решений ДУ называется *интегрированием* этого уравнения.

Задача Коши для ДУ

Задача нахождения решения уравнения (2) или (1), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_{n-1}, \quad (3)$$

где $y = y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ — заданные числа, называется *задачей Коши* для ДУ.

Общее решение ДУ

Функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, будем называть *общим решением* уравнения (1), если в (a, b) при соответствующем выборе постоянных $C_1 = C^0{}_1$, $C_2 = C^0{}_2, \ldots, C_n = C^0{}_n$, эта функция обращается в решение любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения, при $x_0 \in (a,b)$.

Частное решение ДУ

Решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1 = C^0{}_1$, $C_2 = C^0{}_2, \ldots, C_n = C^0{}_n$ (в частности, всякое решение задачи Коши), называется *частным решением* (*частным интегралом*) этого уравнения.

ДУ первого порядка

Если порядок ДУ (1) n=1, то дифференциальное уравнение — первого порядка и в общем виде запишется так:

$$F(x,y,y') = 0. \quad (4)$$

Уравнение, разрешённое относительно первой производной

Дифференциальное уравнение (4), *разрешённое относительно производной* y', имеет вид

$$y' = f(x, y)\,. \qquad (5)$$

Общее решение ДУ первого порядка

Общим решением ДУ первого порядка будет функция $y = \varphi(x, C)$, которая содержит только одну произвольную постоянную C. В случае $n = 1$ начальные условия (3) имеют вид:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad (6)$$

где x_0, y_0 — заданные числа.

Решение $y = \varphi(x, C_0)$ ДУ (4), удовлетворяющее начальному условию (6), называется *частным решением* ДУ (4).

Задача отыскания частного решения ДУ (4) или (5), удовлетворяющего начальному условию (6), называется *задачей Коши* для ДУ первого порядка.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*.

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большое число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:

1. ПОРЯДОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$\{\; y'\sin x = y\ln y,\; y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0,\; y''' = 2(y''-1)\,ctgx \;\}$$

1) первый
2) второй
3) третий
4) четвёртый
5) n-й

2. УРАВНЕНИЕ {обыкновенное дифференциальное, в частных производных} ЗАВИСИТ ОТ

1) одной 2) нескольких 3) n

НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

3. УРАВНЕНИЕ, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

1) $y'\sin x = y\ln y$
2) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0$
3) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0$
4) $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$
5) $y' = f(x,y)$

4. ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ

1) интегрированием
2) дифференцированием

5. ЗАДАЧА КОШИ ЕСТЬ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО

1) начальным
2) граничным

УСЛОВИЯМ

6. РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ ОБЩЕГО ПРИ КОНКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ, ЕСТЬ РЕШЕНИЕ

1) задачи Коши
2) частное
3) общее

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ {первого, второго, третьего, n-го} ПОРЯДКА

1) $y'\sin x = y\ln y$
2) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0$
3) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y' = 0$
4) $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$
5) $y' = f(x,y)$

8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1) $y'^5 + y'' = x^7$
2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} = 5x$
3) $F(x,y,y'') = 0$
4) $xy'^2 - 9y = y^2$
5) $y^2 - y' = 0$

9. ЯВЛЯЕТСЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1) $y' + y'' = x$
2) $y'' + 17xy' + y = 0$
3) $F(x, y, y', y'') = 0$
4) $y'^2 + xy = y^2$
5) $y' - xy = y^2$

10. ЯВЛЯЕТСЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1) $y' + 2y = 5$
2) $x\,dx - y\,dy = 0$
3) $x^3 y' - 12y = x^7$
4) $y'^4 + x^3 y''' = x^2$
5) $F(x, y, y'', y''') = 0$

11. ЯВЛЯЕТСЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1) $y'^3 + y'' y''' = x^5$
2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 8xy\dfrac{dy}{dx} = x$
3) $x^2 y' + 10xy = y^3$
4) $F(x, y, y', y'') = 0$

Установите правильную последовательность:

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО ВОЗРАСТАНИЮ ИХ ПОРЯДКА

☐ $x^2 y' - y\sin x = x^4$
☐ $x'' - 3x' + 2x = t\sin t$
☐ $(2y+3)y''' - 2(y'')^2 = 0$
☐ $y^{VI} - 8y^{V} + 7y^{IV} = e^x$

Дополните

1. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ЗАДАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ, НАЗЫВАЮТ ЗАДАЧЕЙ ____________ .

2. ФУНКЦИЯ $y = e^{2x} - 1$, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' - 2y' = 0$, ЯВЛЯЕТСЯ ________ РЕШЕНИЕМ ДАННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

3. НАИВЫСШИЙ ПОРЯДОК ПРОИЗВОДНОЙ, ВХОДЯЩЕЙ В УРАВНЕНИЕ, НАЗЫВАЕТСЯ __________ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ $y = \varphi(x)$, КОТОРАЯ ПРИ ПОДСТАНОВКЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВМЕСТО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ ОБРАЩАЕТ ЕГО В ТОЖДЕСТВО, НАЗЫВАЕТСЯ ______ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

5. ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ ______ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

6. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ИЗ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ________ РЕШЕНИЯ.