ПЛАСТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ ШКОЛЬНИКА: СПЕЦИФИКА И ОСОБЕННОСТИ

В. КЛЕПИКОВ

Как известно, основу математических знаний в школе составляют открытия и обобщения, сделанные древнегреческими мыслителями. Именно поэтому для нас особый интерес представляют *древнегреческие стили мышления*. Условно их можно обобщить в трёх видах: *логическое, диалектическое* и *пластическое*. Все данные виды мышления ярко представлены в произведениях древнегреческих мыслителей (Гераклита, Зенона, Платона, Аристотеля и др.).

Как известно, первые законы и правила *логического мышления* были разработаны Аристотелем (закон тождества, закон непротиворечия, закон исключённого третьего и прочее) ещё до нашей эры. Одна из главных целей правильного логического мышления — прийти к выводу из предпосылок и получить истинное знание о предмете размышления. Подобно тому, как умение говорить существовало ещё до возникновения науки грамматики, так и искусство правильно мыслить существовало задолго до науки логики.

Логические операции (определение, классификация, доказательство, опровержение, дедукция, индукция и другие) нередко применяются человеком в его мыслительной деятельности неосознанно и с погрешностями. При этом если человек мыслит неосознанно, то это не значит, что его мышление не подчинено логике. Задача школы — сделать логическое мышление осмысленным.

В школе логическому мышлению в первую очередь учит математика, особенно геометрия. Сама архитектоника построения геометрии даёт представление о сути систематического знания, и о том, как оно выводится. Не случайно в заданиях ГИА за 9-й класс появились задачи на доказательство. Это можно только приветствовать, ведь доказательное мышление необходимо и физикам, и лирикам. Школа должна прививать учащимся навыки осознанного логического мышления, и учителю математики необходимо владеть базовыми знаниями по основам логики, тем более, что это существенным образом облегчает изучение геометрии. Кстати, в 1991 году издательство «Просвещение» под редакцией Д.П. Горского выпустило для школы «Краткий словарь по логике», где можно познакомиться со многими логическими понятиями.

Замечательными «учителями» в сфере логики являются математические софизмы. Практика обучения математике показывает, что поиск заключённых в софизмах ошибок, ясное понимание их причин ведут к осмысленному пониманию логически выверенного мышления. Обнаружение и анализ ошибки, заключённой в софизме, зачастую оказываются более поучительными, чем просто разбор решений «безошибочных» задач. Эффектная демонстрация «доказательства» явно неверного результата, в чём и состоит смысл софизма, демонстрация того, к какой нелепице приводит пренебрежение тем или иным математическим правилом, и последующий поиск и разбор ошибки, приводящей к нелепице, позволяют понять то или иное математическое правило или утверждение. Порекомендуем две книжечки: А.А. Ивин «Искусство правильно мыслить» и А.Г. Мадера, Д.А. Мадера «Математические софизмы»[1].

Приведём некоторые из занимательных софизмов. Кто лжёт, говорит о том, чего нет; но о том, чего нет, нельзя сказать; следовательно, никто не может лгать. Что ты не терял, то имеешь; рога ты не терял; значит, у тебя рога. Долг должен отдать тот, кто его взял; но тот, кто его взял, уже стал другим (не тот); значит, долг отдавать некому.

Докажем, что 2 х 2 = 5. Имеем верное числовое равенство: 4 : 4 = 5 : 5. Вынесем за скобки в каждой части его общий множитель. Получим: 4 (1 : 1) = 5 х (1 : 1). Числа в скобках равны, поэтому 4 = 5. Следовательно, 2 х 2 = 5.

Механизм диалектического мышления предполагает владение способами продуктивного оперирования отношениями противоположности. Это не означает, что диалектическое мышление бессодержательно и сводится только к оперированию противоположностями, но последнее представляет его характерный, отличительный признак. Так, в философском плане диалектическое мышление основывается на законах и категориях диалектики: единство и борьба противоположностей, переход количества в качество, отрицание отрицания, причина и следствие, сущность и явление, общее — особенное — единичное и др[2]. В математике диалектические отношения выражаются в таких понятиях, как рациональное — иррациональное, интегрирование — дифференцирование, конечное — бесконечное, симметричное — асимметричное (или антисимметричное), пропорциональное — непропорциональное, целое — часть, порядок — хаос, минимум — максимум, закономерное — случайное и т.д. Результатом диалектического мышления является окончательное (объективное) или временное (субъективное) снятие противоречия.

Кстати диалектика в математике нередко присутствует как бы незаметно. Приведём пример. Как вы думаете, к чему будет стремиться сумма чисел $^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8 + ^1/_{16} + \ldots$? А сумма чисел $^1/_2 + ^1/_3 + ^1/_4 + ^1/_5 + \ldots$? Оказывается, первый ряд чисел будет приближаться к единице, а второй — к бесконечно большому числу. Казалось бы, складываются приблизительно равные числа, но какая ощутимая разница в результате! Вот такая диалектика конечного и бесконечного.

Ещё пример. Как вы думаете, может ли *часть* быть равна *целому*? Например, множество натуральных чисел равно множеству квадратов натуральных чисел? Здравый смысл говорит, что, конечно, не может. Однако это не так. Представим для понимания данную ситуацию в виде таблицы.

1	2	3	4	5	6	…
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	…
1	4	9	16	25	36	…

Совершенно очевидно, что вторая строчка содержит столько же чисел, сколько и первая, — она состоит из тех же чисел натурального ряда, над которыми написан знак возведения в квадрат. Возведём числа в квадрат и запишем результат в третьей строчке. Количество чисел в этой строчке такое же, как в первой и второй. Однако третья строчка лишь часть натурального ряда чисел — в ней отсутствуют 2, 3, 5, 6, 7, 8 и множество других натуральных чисел. Но каждому числу третьей строчки соответствует одно, и только одно, число первой строчки. Следовательно, целое (весь натуральный ряд в первой строчке) равно своей части (третья строчка).

[23 – 29] Управление и проектирование

[1] *Ивин А.А.* Искусство правильно мыслить. — М.: Просвещение, 1990; *Мадера А.Г., Мадера Д.А.* Математические софизмы. — М.: Просвещение, 2003.

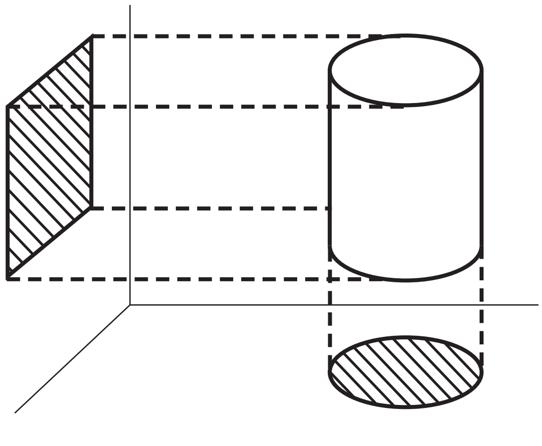
[2] Правда не все мыслители законы диалектики признают.

На уроках математики не всегда можно поставить яркую проблему или выявить объективное противоречие, так как львиная доля времени идёт на отработку умений и навыков (от которых ни в коем случае с введением УУД и компетенций не стоит отказываться). Чаще всего учащийся сталкивается с субъективными затруднениями: неумением актуализировать нужную информацию, пробелами в знаниях, невнимательностью и т.п. Однако плодотворно развивать диалектическое мышление можно во внеклассной работе и дополнительном образовании, например, в ходе создания исследовательских работ, проектов, эссе, где происходит столкновение противоположных идей и поиск разрешения противоречий. Приведём примеры эссе, созданных в школе №6 города Обнинска, в которых наиболее ярко проявляется диалектический стиль мышления.

Всё во мне — и я во всём. Сравнивая себя со Вселенной, человек чувствует себя песчинкой на Земле, атомом в Солнечной системе и ещё более мелкой единицей по отношению к звёздному миру. Чем более объемлющие системы мы станем брать, тем ничтожнее будет удельный вес личности. Казалось бы, что в пределе должна получиться бесконечно малая дробь. Но лишь только мы переходим к этому пределу и противопоставляем человеку мировое «Всё», как рассматриваемое нами отношение резко меняется: из дифференциала личность вдруг становится интегральной величиной, величиной того же порядка, что и мировое Целое. Как сказал бы Николай Кузанский, минимум становится максимумом. Это ясно указывает на нелогический, иррациональный характер перехода от «ничто» к «Всё». Удивительно, но где-то в пределе они совпадают. Недаром Фёдор Тютчев однажды воскликнул: «Всё во мне — и я во всём».

Личность есть микрокосм. Однажды русский философ Николай Бердяев заявил: «Личность есть микрокосм, целый универсум. Только личность и может вмещать универсальное содержание, быть потенциальной вселенной в индивидуальной форме. Личность не есть часть и не может быть частью в отношении к какому-нибудь целому, хотя бы и огромному целому, всему миру». По сути, мыслитель заявил, что *часть равна целому*. Но возможно ли это? Как мы знаем, в геометрии предполагается, что любая геометрическая фигура состоит из точек. Однако где содержится точек больше: в стороне (отрезке) квадрата или в самом квадрате? Оказывается, что в стороне содержится столько же точек, сколько и в квадрате, и даже в кубе. Более того, в стороне содержится столько точек, сколько и во всём бесконечном пространстве. Это связано с тем, что бесконечность не может быть меньше бесконечности. Поэтому философ прав: вселенная есть бесконечность и личность тоже есть бесконечность. Вопрос лишь в том, сможем ли мы открыть в себе эту бесконечность?

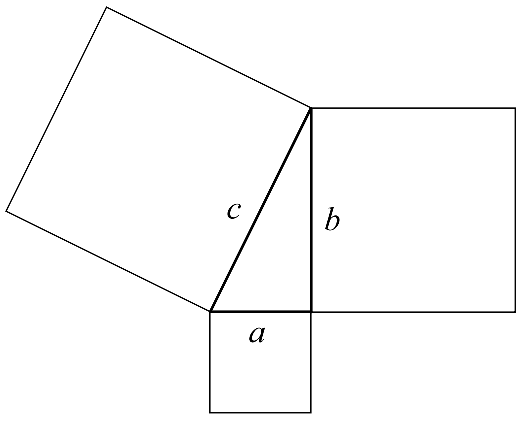
Два в одном. Обычно в каждом человеке сочетаются противоречивые черты характера. И, казалось бы, это ему очень мешает и даже ставит в безысходное положение. Но здесь на помощь опять приходит наглядная геометрия. Зададимся следующим вопросом: как вы думаете, какая фигура на одну из перпендикулярных плоскостей даёт проекцию круга, а на другую — квадрата? Это, конечно, цилиндр. Действительно, трёхмерный цилиндр наглядно демон-



стрирует, что его проекции кардинально противоречат друг другу, так как на одной плоскости появляется квадрат, а на другой круг. Однако же и квадрат, и круг непосредственно относятся к цилиндру и органично в нём сосуществуют. Вот так и человек:

пусть в его характере уживаются противоречивые и оригинальные черты, лишь бы они не несли зло ему самому и окружающим людям.

Вечная тайна истины, добра и красоты. Каждый пытливый и любознательный человек рано или поздно приходит к выводу, что тайну вечной юности — истины, добра и красоты охраняет гармония рационального и иррационального, соизмеримого и несоизмеримого, предсказуемого и непредсказуемого, упорядоченного и хаотического. Одними из первых с этой тайной столкнулись пифагорейцы. На первых порах лик этой тайны привёл их в ужас, так как в нём явно просматривалось нечто иррациональное и непредсказуемое. Пифагор выстроил на сторонах прямоугольного треугольника квадраты и доказал, что площадь квадрата, выстроенного на гипотенузе, равновелика сумме площадей квадратов, выстроенных на катетах: $a^2 + b^2 = c^2$. Так появились знаменитые «пифагоровы штаны». Тем самым он не просто доказал истину, но и убедительно, наглядно показал, что проблема несоизмеримости разрешается даже в обычном прямоугольном треугольнике: рациональное и иррациональное сосуществуют, образуя закономерную и в то же время парадоксальную гармонию. Ту же самую гармонию выражают «формула красоты» ($x^2 + x = 1$) и «золотое правило нравственности» (поступай по отношению к другому более великодушно, чем он к тебе). Таким образом,



в основе всего истинного, доброго и прекрасного лежит парадоксальное сочетание рационального и иррационального.

Громадную роль в мышлении детей занимает пластическое мышление. Наши исследования показывают, что ещё до логического мышления в ходе доказательств дети используют именно пластическое мышление, которое для них естественно и интуитивно понятно. Недаром в педагогике часто используются такие понятия, как «развитие», «точка роста», «прорастание», «генетически родственные понятия», «погружение», «сжатие», «растяжение», «превращение» и т.д. Самые элементарные признаки пластического мышления: последовательность, непрерывность, обозримость, «осязаемость» границ, стремление к преодолению границ и т.д.

Глубочайший знаток древнегреческой культуры А.Ф. Лосев сделал важный вывод о том, что главной чертой древнегреческого сознания является такое свойство, как *пластичность*. Пластика пронизывает древнегреческую философию, искусство, науку, и в частности — математику. «Греческое слово — «пластика» — указывает на вылепленность, вылитость, вещественную сделанность и отделку»[3].

Суть *пластического мышления* древних греков состоит в его постепенности и непрерывности (в плавных переходах от одного к другому), «осязательности» и «обозримости», наглядности и планомерности[4]. По словам А.Ф. Лосева, можно спорить о правилах и принципах, по которым происходит соединение отдельных мыслей в разных культурах, но факт остаётся фактом — вся древнегреческая культура *пластична*. И когда мы часто говорим по инерции, что это логическое доказательство, то на самом деле — это пластическое постижение какого-либо феномена.

Наиболее наглядно и осязательно пластическое мышление проявляется в *геометрии*. Не случайно именно в Древней Греции была выстроена геометрия, как наука.

[3] *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Ранняя классика. — М., 1994.

[4] Там же. — С. 263.

На наш взгляд, введение геометрических фигур отвечает именно пластическому мышлению. Возьмём простейшие геометрические фигуры на плоскости: точку и прямую. Поставим на прямой точку — получим луч (или дополнительные лучи), поставим на луче точку — получим отрезок, соединим три, не лежащие на одной прямой, точки, — получим треугольник и т.д. Так постепенно и последовательно мы наращиваем стройную систему геометрических фигур.

Но пластическое мышление пронизывает всю математику. Например, когда мы изучаем задачи на *часть, долю* и *целое*, то стремимся сразу же охватить, заявить о трёх видах задач.

1. Как найти долю от целого? 20% от 60; 0,2 60 = 12 (часть).

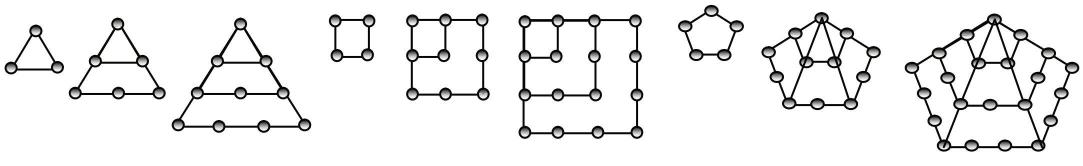
2. Как найти часть от целого? 12 от 60; $^{12}/_{60} = ^{1}/_{5} = 20\%$ (доля).

3. Как найти целое, если известно, какую долю составляет часть? 12 есть 20%; 12: 0,2 = 60 (целое). Другими словами, учащимся нужно сразу же почувствовать границы определённой порции знаний. И нередко эти границы необходимо преодолевать. Например, 50% от 20 — 10, 100% от 20 — 20, 150% от 20 — 30.

Интеграл — одно из важнейших понятий математического анализа. Интеграл используется для вычисления непрерывной суммы, т.е. суммы бесконечного числа бесконечно малых величин. В понятии интеграла мыслится бесконечный процесс по суммированию, объединению, восстановлению элементов в его первоначальной данности. Вероятно, это слово происходит от латинского «интегро», которое переводится как «приводить в прежнее состояние, восстанавливать». По другой версии этот термин происходит от слова «целый». Очень важно отметить, что только в определении интеграла как предела суммы всех дифференциалов мы обнаруживаем истинную восстановительную и синтетическую природу интеграла. И здесь мощно чувствуется превосходный результат пластических интуиций математиков, которые открывали эту операцию.

Интересно, что даже пространство древние греки понимали по типу различным образом натянутых струн. «Оно всё, с начала до конца и сверху донизу, было в разной степени натянуто и напряжено, в разной степени сгущено и разряжено»[5]. Поэтому совсем не случайно пифагорейцы слышали «музыку сфер». Пластику гимнастики они преимущественно использовали в целях практических — для умиротворения страстей, для создания высоких настроений, подготовки к подвигу и т.д. А под добротой древние греки понимали не некий абстрактный принцип, а буквально — *добротность* (вспомним в этой связи до сих пор используемое словосочетание — «добротная вещь»).

Кстати напомним, что пифагорейцы очень тонко чувствовали пластику числовых форм, поэтому числа они изображали в виде различных геометрических фигур: треугольников (3, 6, 10 и так далее), квадратов (4; 9; 16 и так далее), пятиугольников (5; 12; 22 и так далее) и т.п. Несомненно, в этом также проявились ярко выраженные пластические интуиции древних греков.



Отсюда теперь становится ясно, почему пифагорейцы называли число «первым образом творения мира»[6]. Именно число, по их мнению, приводило Космос, или Вселенную, в гармонию, порядок, определённый музыкальный настрой. Как писал древнегреческий историк Диоген Лаэртский: «Пифагор первый

[5] *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Ранняя классика. — М., 1994 — С. 264.

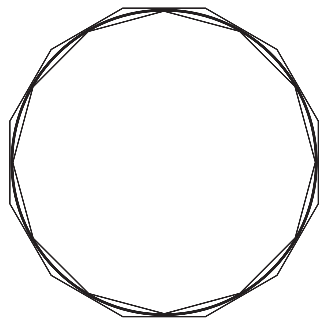
[6] А сегодня мы говорим о цифровых технологиях.

назвал Вселенную «космосом» по порядку, который ему присущ». Кстати, и Вселенную древние греки понимали, как громадное живое скульптурное изваяние. Вот почему они создали непревзойдённые образцы в искусстве — скульптуре и архитектуре. Гениальные произведения того времени отличает изумительная пластика, и до сих пор они производят неизгладимое впечатление.

Демонстрировать пластику в математике можно, например, с помощью свойств пропорции: $^{a}/_{b} = {}^{m}/_{n}$, $^{b}/_{a} = {}^{n}/_{m}$, $^{a}/_{m} = {}^{b}/_{n}$, $^{m}/_{a} = {}^{n}/_{b}$, $a \quad n = b \quad m$. Замечательно, что уже древние греки знали несколько видов пропорции: *обычную*, *геометрическую*, *гармоническую*, *арифметическую* и *золотую*. В частности, золотое сечение получается из геометрической пропорции путём внесения в неё идеи последовательного убывания чисел. Получается, что целое так относится к своей большей части, как большая к меньшей. Золотое деление, следовательно, есть равновесие между целым и частью, наблюдаемое при последовательном исчерпывании целого. Тем самым, античный глаз всё время как бы обмеривает разные вещи, стремясь найти между ними наглядное и структурное соответствие.

С нашей точки зрения, смысл пластического мышления наглядно и несколько парадоксально демонстрирует апория об Ахилле и черепахе. Как известно, с точки зрения строгой математики, Ахилл никогда не догонит черепаху: Ахилл пробегает расстояние до черепахи, и она преодолевает некоторый путь, и так до бесконечности. Ахилл только потому и может догнать и перегнать черепаху, что проходимые им отрезки пути, как бы бесконечно мы их не дробили, всё же являются чем-то единым, цельным, непрерывным и притом упорядоченным. От погружения в бездну вечно и бесконечно уменьшающихся величин греков спасало именно пластическое мышление, которое они и оставили нам в наследство. Кстати, современное математическое учение о континууме тоже стремится понять отрезок пути как бесконечное множество, определённым образом упорядоченное, в котором объединяются в одно целое и частичное прерывное и непрерывное, конечное и бесконечное.

Здесь напрашивается образ правильного многоугольника с бесконечным количеством сторон (так сказать, правильный бесконечноугольник) — в результате получается круг. Круг есть, таким образом, предел вписанных в него или описанных около него правильных многоугольников при бесконечном увеличении числа его сторон. Само собой разумеется, вовсе не обязательно думать о круге, постепенно увеличивая число сторон правильного многоугольника. Но если мы хотим пластически додумать до конца это изменение, то понятие о круге не может не появиться в нашем сознании. Такова пластика трансформации правильного многоугольника.



Когда мы говорим о пластическом мышлении, то вспоминается такой современный раздел математики, как топология (от др.-греч. τόπος — место и λόγος — слово, учение), которая сформировалась в XX веке. Она изучает в самом общем виде явление непрерывности, в частности свойства пространства, которые остаются неизменными при непрерывных эластичных деформациях. В отличие от геометрии, в топологии не рассматриваются метрические свойства объектов (например, расстояние между парой точек, величины углов, площадей и объёмов).

Представим себе трёхмерную геометрическую фигуру (тело) сделанную из материала столь податливого, что его можно изгибать, растягивать, сжимать и вообще трансформировать, но только нельзя разрывать, разрезать и склеивать. Тем самым, можно, например, превратить шар в куб или пирамиду, но в тор («бублик») нельзя. Кстати, наглядное превращение тора в кружку с ручкой и обратно можно наблюдать на сайте Википедии, на движущейся картинке статьи «Топология».

Однажды, чтобы объяснить учащемуся, почему — 3 — 5 = — 8, не привлекая образ термометра, пришлось прибегнуть именно к пластическому способу осмысления материала: 3 + 5 = 8 → 5 + 3 = 8 → + 3 + 5 = 8 → + 5 + 3 = 8 → 5 — 3 = 2 → 3 — 5 = — 2 → — 3 + (– 5) = — 8 → — 5 + (– 3) = — 8 → — 3 — 5 = — 8 → — 5 — 3 = — 8. Очевидно, что логическое мышление в таких случаях не помогает, но пластическое тут своевременно и к месту. Поэтому суть методики подачи материала с опорой на пластическое мышление заключается в его плавном и последовательном наращивании и углублении до некоторой обозримой целостности или смысловой наполненности.

Какие же признаки пластического мышления можно выявить? Во-первых, пластическое мышление работает без скачков и лакун, без смысловых разрывов, непрерывно и постепенно. Во-вторых, оно неотъемлемо от ощущений и чувственных представлений, поэтому тяготеет к образному и наглядному мышлению[7]. В-третьих, пластическое мышление исходит из органичного соответствия целого и части. В-четвёртых, оно чувствительно к границам и пределам, которые очерчивают очередные порции знаний.

Как же древние математики воспитывали и развивали пластическое мышление? Конечно же, в первую очередь, с помощью геометрических построений. Они решали проблему соответствия реального и идеального с помощью двух главных посредников: циркуля и линейки. Эта деятельность требует особых навыков и сноровки. По сути, это своеобразное аристократическое искусство, так как человек в ходе черчения оперирует на бумаге идеальными объектами и их отношениями, т.е. моделирует геометрически точный мир, учитывающий утончённейшие нюансы. Древнегреческие мудрецы хорошо понимали, что совершенно недостаточно идеальные фигуры воображать, важно также их воплощать на плоскости (двумерной) и пространстве (трёхмерном), а для этого требуются особые пластические навыки и умения.

Показательно, что с помощью циркуля и линейки невозможно решить задачу на квадратуру круга (построение квадрата, равного по площади кругу). Это связано с тем, что невозможно относительно единицы отложить число π. Это лишний раз доказывает, что данное число действительно трансцендентное, т.е. божественное. Здесь принцип постепенности и непрерывности бессилен. Данное число как бы является сразу, без системы плавных переходов. Этот факт говорит и о том, что пластического мышления явно недостаточно. Существуют «скачкообразные» явления, для которых требуется уже диалектическое мышление.

Как нам представляется, пластическое мышление плодотворно применил в своей юности Карл Гаусс. Однажды учитель предложил ученикам третьего класса, где учился будущий великий математик, сложить числа от 1 до 10 включительно. Ответ последовал незамедлительно. Карл назвал число 55. Он нашёл наиболее простой и изящный способ решения этого примера. Карл сложил не одну, а две суммы: (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) + (6 + 5) + (7 + 4) + (8 + 3) + (9 + 2) + (10 + 1), заметив, что каждая пара чисел даёт одно и то же число 11. Затем всё оказалось очень просто: (11   10): 2 = 55. Так уже в детстве проявилось неординарное мышление великого немецкого математика.

Пожалуй, одним из самых интересных моментов в этическом учении Аристотеля является *применение пластики для оценки нравственных качеств человека*. Аристотель даёт подробную классификацию добродетелей: «Благоразумие... середина между распущенностью и бесчувственностью к удовольствиям», «Щедрость... среднее между расточительностью и скупостью», «Благородство... это середина между кичливостью и приниженностью», «Широта... это середина между мотовством и мелочностью» и др.[8] Обратим внимание, что добродетель

[7] Педагоги по художественному воспитанию говорят об образно-пластическом мышлении, но вкладывают в него несколько иной смысл.

[8] *Аристотель*. Собр. соч. в 4 томах. — М., 1984. Т.4. — С. 319–321.

у Аристотеля никогда не лежит ровно посередине от обоих полюсов. Щедрость всё же ближе к расточительству, чем к скупости. Благородство дальше от кичливости, чем от приниженности. Скромность ближе к стеснительности, чем к бесстыдству.

Однажды мы на одном из классных часов в 10 классе решили воспользоваться опытом Аристотеля и применить пластическое мышление по составлению спектра активности человека. Вот, что у нас с ребятами получилось: агрессивность → авантюризм → максимализм → активизм → решительность → напористость → твёрдость → настойчивость → сдержанность → лояльность → мягкость → уступчивость → открытость → уклончивость → пассивность → равнодушие → апатия → безразличие → разочарованность → негативизм → брезгливость → ненависть. Так постепенно мы нащупали «позитивную середину» и «негативные крайности». Как показали дальнейшие классные часы, работа в данном направлении очень плодотворна, так как ребята через различные понятийные спектры «расширяли» своё сознание, узнавали свои чувства и рефлексировали свои состояния.

Мы также попробовали с педагогами применить пластическое мышление к анализу развития нравственных чувств и качеств человека в школе. Нам была важна эта дифференциация ещё и потому, чтобы не ставить себе целью формирования того чувства и качества, которое не соответствует определённому возрасту. Например, требовать от младшего школьника сострадания было бы, по меньшей мере, наивно, но начать осваивать данное понятие можно и в младшем возрасте, учитывая, что смысл, который будут вкладывать дети в это понятие, будет соответствующим их возрасту, т.е. под состраданием они будут понимать, скорее всего, жалость или сочувствие. Понятия в таблице необходимо рассматривать по горизонтали, в плане их возрастной эволюции. Вот что у нас получилось.

1–3-й классы	5–9-й классы	10–11-й классы
1. Жалость	1. Сочувствие	1. Сострадание
2. Добросовестность	2. Ответственность	2. Чувство долга
3. Стыдливость	3. Совестливость	3. Совесть
4. Скромность	4. Чистосердечие	4. Благородство
5. Чуткость	5. Человеколюбие	5. Гуманность
6. Воздержанность	6. Самообладание	6. Сила воли
7. Жизнерадостность	7. Радушие	7. Сорадование
8. Свобода действия	8. Свобода выбора	8. Свобода воли
9. Любовь к миру	9. Любовь к человеку	9. Любовь к ближнему
10. Нежность	10. Искренность	10. Благоговение
11. Доброжелательность	12. Уважение	12. Милосердие
13. Честность	13. Справедливость	13. Достоинство
14. Добродушие	14. Добросердечность	14. Великодушие
15. Рассудительность	15. Разумность	15. Мудрость
16. Открытость	16. Доверие	16. Вера
17. Тактичность	17. Благодарность	17. Благовоспитанность
18. Решительность	18. Смелость	18. Мужество
19. Переживание	19. Раскаяние	19. Исповедальность
20. Простодушие	20. Простота	20. Целомудрие
21. Правдивость	21. Честность	21. Порядочность
22. Любовь к миру	22. Любовь к Родине	22. Патриотизм
23. Вежливость	23. Терпимость	23. Смиренность
24. Любознательность	24. Стремление к общим знаниям	24. Стремление к профзнаниям
25. Трудолюбие	25. Любовь к общему делу	25. Любовь к будущей профессии