Практическое применение технологии укрупнённых дидактических единиц на уроках математики

Хабибуллин Кадыр Якупович — учитель математики школы № 12 г. Салавата Республики Башкортостан

В традиционной программе по математике и традиционной методике преподавания математики многие взаимосвязанные, родственные и аналогичные темы изучаются порознь и часто дублируются в программах для разных классов и предметов. Например, тема «Степень с рациональным показателем» изучается в 9-м и в 11-м классах, а в 8-м классе — «Степень с целым показателем», являющаяся обобщением темы «Степень с натуральным показателем» из 7-го класса и т.д.

Кроме того, в учебных программах каждого года обучения математики содержатся группы тем о взаимообратных, противоположных действиях, которые также по традиции изучаются отдельно в той или иной последовательности (темы «Умножение многочленов» и «Разложение многочленов на множители способом группировки» в 7-м классе, дифференцирование и интегрирование в 10-м и 11-м классах. В геометрии отдельно рассматривается большинство взаимообратных теорем).

По характеру мыслительных процессов, на которых основывается изучение таких взаимосвязанных тем, разделов, действий, по методическим приёмам, они сходны и поэтому их совместное и одновременное изучение позволяет создать у учащихся целостное и глубокое понимание этих тем, процессов. Они могут представить ход какого-либо процесса как в прямом направлении, так и в обратном или противоположном и представлять некие взаимообратные действия в виде целой единицы информации.

Метод обобщения

Метод обобщения или совместного и параллельного изучения взаимосвязанных тем можно продемонстрировать на примерах изучения тем «Корень n-й степени» в 8-м классе, «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в 9-м классе по алгебре, «Четырёхугольники» в 8-м классе по геометрии и некоторых других тем. Кроме этого, одним из важных факторов активизации познавательной деятельности учащихся является обобщение решения какой-либо задачи для видоизменённой задачи и организация поисковой работы учащихся по решению конкретной задачи разными способами. Такая форма организации учебной работы особенно полезна при повторении и обобщении. Она развивает творческие способности учащихся, воспитывает стремление к поиску, учит их устанавливать связь между различными понятиями.

Перед изучением темы «Корень n-й степени» в 8-м классе вместо темы «Квадратный корень» учащиеся предварительно знакомятся с темой «Степень с целым показателем», которая изучается в этом же классе несколько позднее, и свойствами степенной функции. Действие извлечения корня n-й степени преподносится как действие обратное возведению в n-ю степень, т.е. применяется метод противопоставления. Квадратный корень рассматривается как частный случай корня n-й степени. Свойства квадратного корня изучаются совместно со свойствами корня n-й степени.

В отличие от общепринятой программы, где каждый вид четырёхугольников изучается на разных последовательных уроках, при применении технологии укрупнения дидактических единиц на первом же уроке темы «Четырёхугольники» учащиеся знакомятся со всеми видами четырёхугольников, с их определениями и взаимосвязью между различными видами четырёхугольников. Акцентируется также внимание учащихся на зависимости формы четырёхугольников от соотношения его элементов.

При изучении арифметической прогрессии используется одновременная формулировка определений. Формулы *n*-го члена и суммы первых n-членов прогрессий выводятся на параллельных столбцах. Совместное изучение тем «Арифметическая прогрессия» и «Геометрическая прогрессия» целесообразно, т.к. эти темы подобны, при их изучении используются одни и те же методы.

Корень *n*-й степени

Учащимся предлагаются несколько примеров на вычисление степеней. Например, вычислить 2^3,4^5,6^3.

$2^3 = 8$, $4^5 = 1024$, $6^3 = 216$. Как называется это действие? Возведение в степень. Как называются компоненты этого действия? Степень, основание, показатель степени. 8, 1024, 216 — степени, 2, 4, 6 — основания и 3, 5, 3 — показатели степени. Вспомним, что они показывают. Учащиеся подробно рассказывают об этих компонентах.

Рассмотрим равенство $2^5 = 32$. Как из этого равенства получить уравнение? Если в данном равенстве какое-либо число заменим переменной, то получим уравнение. Таким образом, мы можем получить три уравнения:

$x = 2^5$(1), $x^5 = 32$(2), $2^x = 32$(3).

Решим первые два уравнения. Что необходимо найти в уравнении (1)? Вычислить пятую степень числа 2, то есть выполнить действие возведения в степень. Во втором уравнении надо найти основание степени по известным показателю степени и степени. Учащиеся находят, что $x = 2$, так как $2^5 = 32$.

Вывод: При решении уравнений (2) находится основание степени по заданным показателю степени и самой степени. И это действие называется *извлечением корня* (в данном случае извлечение корня пятой степени). Записывают это действие так: ^{5}Ç32 = 2 ,так как $2^5 = 32$. Знак ^{5}Ç — знак извлечения корня, 32 — подкоренное выражение, 5 — показатель корня. Таким образом, используя обозначение действия извлечения корня, решение уравнения (2) можно записать так: $x^5 = 32$, x = ^{5}Ç32, $x = 2$.

Рассмотрим два равенства: ^{5}Ç32 = 2 и $2^5 = 32$. В первом равенстве показано извлечение корня пятой степени, а во втором — возведение в пятую степень. Эти действия являются взаимно обратными, то есть извлечение корня — это действие обратное действию возведения в степень.

Решим несколько уравнений:

а) $x^3 = 27$, $x^3 = 8$, $x^5 = 1$;

б) $x^2 =16$, $x^4 =16$, $x^6 =64$.

Запишем решения этих уравнений, используя знак извлечения корня. Особое внимание обратим на уравнения второй группы. В них показатели степеней переменных являются чётными числами, и поэтому при их решении имеются некоторые особенности. Во-первых, при извлечении корня второй степени (квадратного корня) в знаке извлечения корня показатель корня 2 не пишется, а используется знак Ç ; во-вторых, у этих уравнений будут два корня, так как и отрицательное число в чётной степени даёт положительное число. Например, –4 является корнем уравнения $x^2 =16$, т.к. $(–4)^2 = 16$. Аналогично обсуждаются и остальные уравнения второй группы. Запишем решения этих уравнений:

$x^2 =16$, x = ±Ç16, $x = \pm 4$.

$x^4 =16$, x = ±4Ç6, $x = \pm 2$.

$x^6 =64$, x = ± 6Ç64, $x = \pm 2$.

Учащимся предлагается придумать самим примеры на вычисление степеней и на последующее извлечение корней соответствующих степеней в своих примерах. Решение примеров, придуманных учащимися, обсуждаются и обобщаются. Особое внимание уделим следующим уравнениям:

$x^2 = –4$, $x^4 = –81$, $x^3 = –8$, $x^5 = –1$.

Ещё раз акцентируем внимание учащихся на том, что при возведении любого числа, отрицательного или положительного, в чётную степень получается положительное число. Следовательно, первые два из приведённых уравнения решения не имеют. Это означает, что из отрицательного числа извлекать корень чётной степени нельзя. Значит, чтобы уравнения вида $x^2 = a$, $x^4 = a$, $x^6 = a$ и т.д. имели решения, необходимо, чтобы было положительное значение числа а или равенство его нулю.

Третье и четвёртое уравнения имеют решение и при отрицательных числах, так как отрицательное число в нечётной степени даёт отрицательное число. Поэтому корни нечётных степеней из отрицательного числа существуют, то есть выражение ^{n}Ç*a* при чётном значении *n* не имеет смысла, если *a* m 0.

Запишем действие извлечения корня n-й степени в общем виде как решение уравнения:

x^n = a, где *n* — любое натуральное число.

1) *n* — нечётное *x* = ^{n}Ç*a*, *a* — любое число;

2) *n* — чётное *x* = ± ^{n}Ç*a* , а l 0;

a — подкоренное выражение, *n* — показатель корня.

На основе всех разобранных примеров и решённых уравнений сформулируем определение корня *n*-й степени из числа и запишем его.

Определение: ***Корнем n-й степени из числа a называется число b, n-я степень которого равна a.***

Запишем это определение символически: ^{n}Ç*a* = *b*, если $b^n = a$.

Для корней чётных степеней вводится понятие арифметического корня *n*-й степени.

Определение: ***Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.***

Учащиеся дублируют сформулированные определения для конкретных значений показателя степени: для корней второй степени (квадратного корня), третьей степени (кубического) и четвёртой степени, приводят примеры и подробно их разбирают

Рассмотрим понятие корня *n*-й степени как решения степенного уравнения. Решим уравнение x^n = а графическим способом. Построим графики функций $y = x^n$ и $y = a$. Что собой представляет график функции $y = x^n$? Если *n* — чётное, то это парабола. Если *n* — нечётное, то кубическая парабола. График функции $y = a$ — прямая. Построим эти графики для всех случаев и разберём конкретно каждый случай.

Итак, графический способ решения степенного уравнения $x^n = a$ наглядно показывает, что при чётном значении *n* и при $a > 0$ уравнение имеет два противоположных корня, а при нечётном *n* имеет один корень при любом значении *a*. Если же $a<0$, то данное уравнение не имеет решения.

Таким образом, графический способ решения степенного уравнения иллюстрирует определение корня *n*-й степени.

Четырёхугольники

Урок начинается с актуализации знаний учащихся об основных понятиях геометрии, о взаимном расположении прямых и отрезков на плоскости, величин углов. Эта пропедевтическая работа необходима для установления зависимости формы четырёхугольников от взаимного расположения соотношения их элементов — сторон и углов. Используется метод целесообразных вопросов или вопросно-ответный метод с опорой на знания учащихся. Перед ними ставятся проблемные вопросы, их ответы обсуждаются и обобщаются.

Цель: комплексное изучение всех видов четырёхугольников в одном блоке во взаимной связи друг с другом; установление зависимости формы четырёхугольников от взаимного расположения и соотношения их элементов; составление родовидовой схемы множества всех выпуклых четырёхугольников.

Основные понятия геометрии. Взаимное расположение прямых и отрезков на плоскости. Отношение отрезков

1. Какие понятия (фигуры) в геометрии называются основными? Точка, прямая и плос-

кость. Почему? Потому что с помощью основных фигур строятся все фигуры геометрии. Учащиеся приводят примеры известных им фигур (не только плоские, но и пространственные). Какие элементы имеются у всех фигур? Вершины, стороны и углы. Сколько существует фигур? Бесконечное множество. От чего зависит бесконечное многообразие геометрических фигур? От величины сторон и углов, а также от их взаимного расположения и соотношения.

2. Как могут располагаться прямые на плоскости? Прямые на плоскости могут быть параллельными и непараллельными, т.е. пересекающимися.

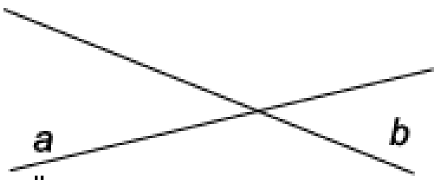
a

____

b

____

$a \parallel b$



$a \nparallel b$

3. Отрезок — это часть прямой, поэтому взаимное расположение отрезков аналогичное — параллельные и непараллельные.

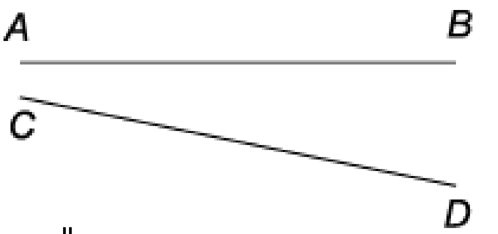
A B

____

C D

____

AB || CD



$AB \nparallel CD$

4. В отличие от прямых, которые бесконечны, отрезки могут быть сравнимы и по длине: равные и неравные.

A B

____

C D

____

AB = CD

A B

____

C D

____

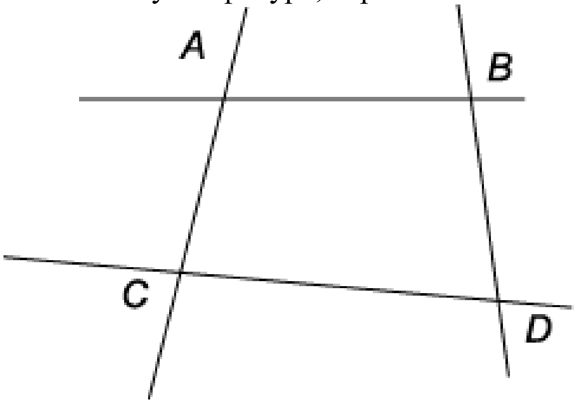
AB ≠ CD

Определение четырёхугольника

1. Среди множества геометрических фигур есть такие, у которых 4 стороны, 4 угла, 4

вершины, т.е. четырёхугольники. Сконструируем четырёхугольник как фигуру, полученную при пересечении пары произвольных прямых другой парой произвольных прямых.

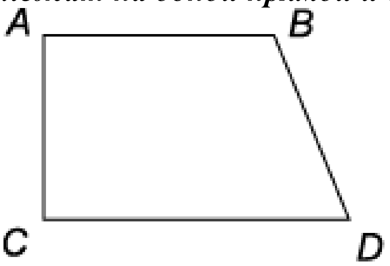
Замкнутая фигура, ограниченная этими прямыми, является четырёхугольником.



ABCD — четырёхугольник

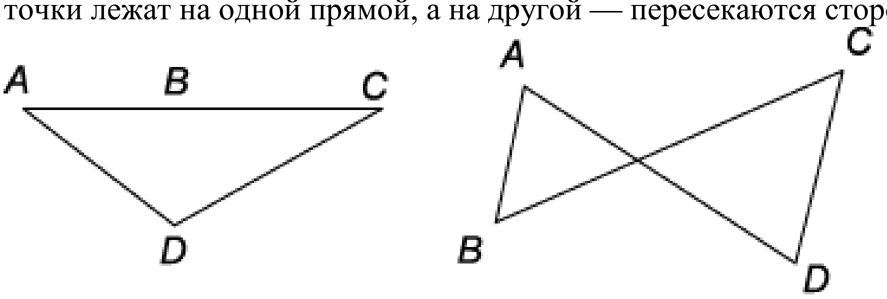
2. Определим четырёхугольник аналогично тому, как определяли треугольник.

Определение: ***Четырёхугольник — фигура, состоящая из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой и данные отрезки не пересекаются.***

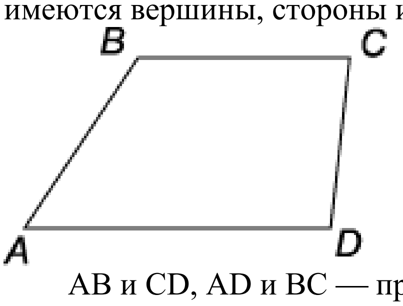


ABCD — четырёхугольник

Приведём примеры фигур, не являющихся четырёхугольниками, в одной из которых три точки лежат на одной прямой, а на другой — пересекаются стороны:



3. Установим элементы четырёхугольника. Как и в треугольнике, у четырёхугольника имеются вершины, стороны и углы. Кроме того, у четырёхугольника есть диагонали.



AB и CD, AD и BC — противоположные стороны;

$\angle$A и $\angle$C, $\angle$B и $\angle$D — противоположные углы;

A и C, B и D — противоположные вершины;

AB и BC, BC и CD и т.д. — смежные стороны; AC и BD — диагонали.

Определение: ***Диагональю четырёхугольника называется отрезок, соединяющий две противоположные вершины.***

Таким образом, в отличие от треугольника у четырёхугольника есть такие элементы, как противоположные стороны, вершины, углы и диагонали.

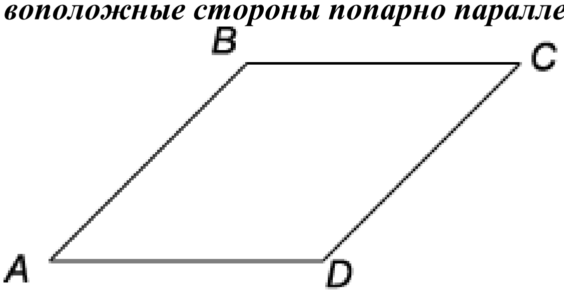
Разновидности четырёхугольников

1. Перед изучением множества видов четырёхугольников в их взаимной связи учащимся предлагают построить всевозможные четырёхугольники на доске, показывают макеты различных четырёхугольников, раздвижные модели. После того как учащиеся наглядно убедятся в многообразии четырёхугольников, ставится вопрос: «От чего зависит разнообразие форм четырёхугольников?»

Ученики отвечают: «Многообразие форм четырёхугольников зависит от длин сторон, от взаимного соотношения длин как смежных, так и противоположных сторон, от взаимного расположения противоположных и смежных сторон, от величин углов».

2. Рассмотрим пары противоположных сторон. Выясним, какими они могут быть. Две противоположные стороны могут быть либо параллельными, либо непараллельными. Построим такой четырёхугольник, то есть четырёхугольник с параллельными противоположными сторонами, который называется *параллелограммом*, и определим его.

Определение: ***Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.***

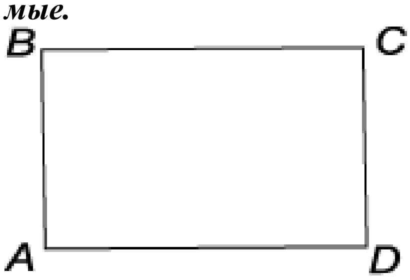


ABCD — параллелограмм, AB || CD и AD || BC.

Итак, параллелограмм является частным случаем (одним из видов) четырёхугольника. Множество параллелограммов является частью множества четырёхугольников (отмечаем это в родовидовой схеме).

3. Сколько параллелограммов? Много. Зависит это от длин сторон и величин углов, от соотношения длин смежных сторон. Какими могут быть углы параллелограмма? Любыми. А прямыми? Да. Причём если один из углов параллелограмма прямой, то и остальные будут прямыми, что следует из свойств параллельных прямых. Построим такую фигуру, которая называется *прямоугольником*, и дадим ему определение.

Определение: ***Прямоугольником называется параллелограмм, у которого углы прямые.***



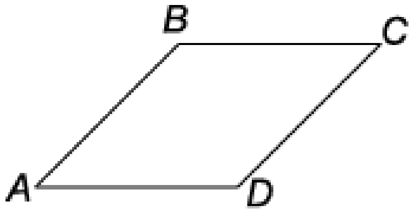
ABCD — прямоугольник,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

Прямоугольник — это частный случай параллелограмма. Множество прямоугольников является частью множества параллелограммов. Отмечаем прямоугольники в родовидовой классификационной схеме как подмножество множества параллелограммов.

4. Сравним длины смежных сторон параллелограмма. Какими они могут быть? Равными или неравными. Построим параллелограмм с равными сторонами, который называется *ромбом*, и определим его.

Определение: Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.



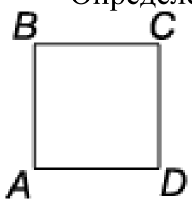
ABCD — ромб,

AB = BC = CD = AD

Ромб является одним из видов параллелограмма. Множество ромбов — часть множества параллелограммов (отмечаем в схеме).

5. В прямоугольнике все стороны могут быть равными? Безусловно. Построим такую фигуру. Получился квадрат.

Определение: Квадрат — это прямоугольник с равными сторонами.



ABCD — квадрат,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$,

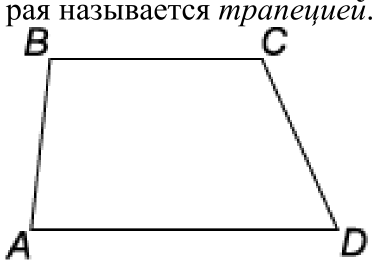
AB = BC = CD = AD

Квадрат — это один из видов прямоугольника (отмечаем в схеме).

6. Определим квадрат через ромб. Рассматривая ромб, можно сказать следующее: у ромба может быть прямой угол. В этом случае ромб становится квадратом. Таким образом, квадрат — это *ромб с прямыми углами* и, следовательно, квадрат является также частным случаем ромба.

Итак, к четырёхугольникам с попарно параллельными противоположными сторонами относятся параллелограммы, прямоугольники, ромбы и квадраты.

7. Рассмотрим четырёхугольники, у которых две противоположные стороны параллельны, а две другие противоположные стороны не параллельны. Построим такую фигуру, которая называется *трапецией*.

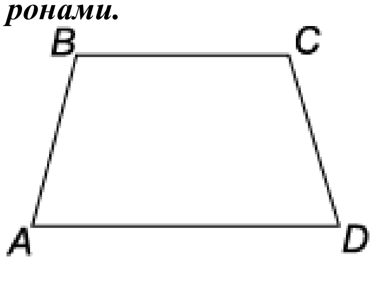


Определение: ***Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.***

ABCD — трапеция, AD || BC, AB ||CD. AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны.

8. Рассмотрим разновидности трапеций. От чего это зависит? От величин углов и длин боковых сторон. Боковые стороны могут быть равными? Могут. Построим такую трапецию, называемую *равнобедренной* или *равнобокой*.

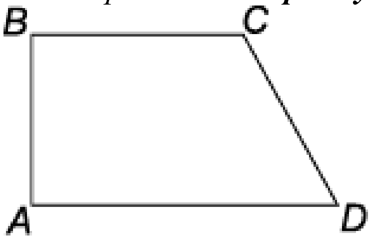
Определение: ***Равнобедренная трапеция — это трапеция с равными боковыми сторонами.***



ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD.

9. Построим трапецию, у которой есть прямые углы. Сколько прямых углов может иметь трапеция? Два прямых угла.

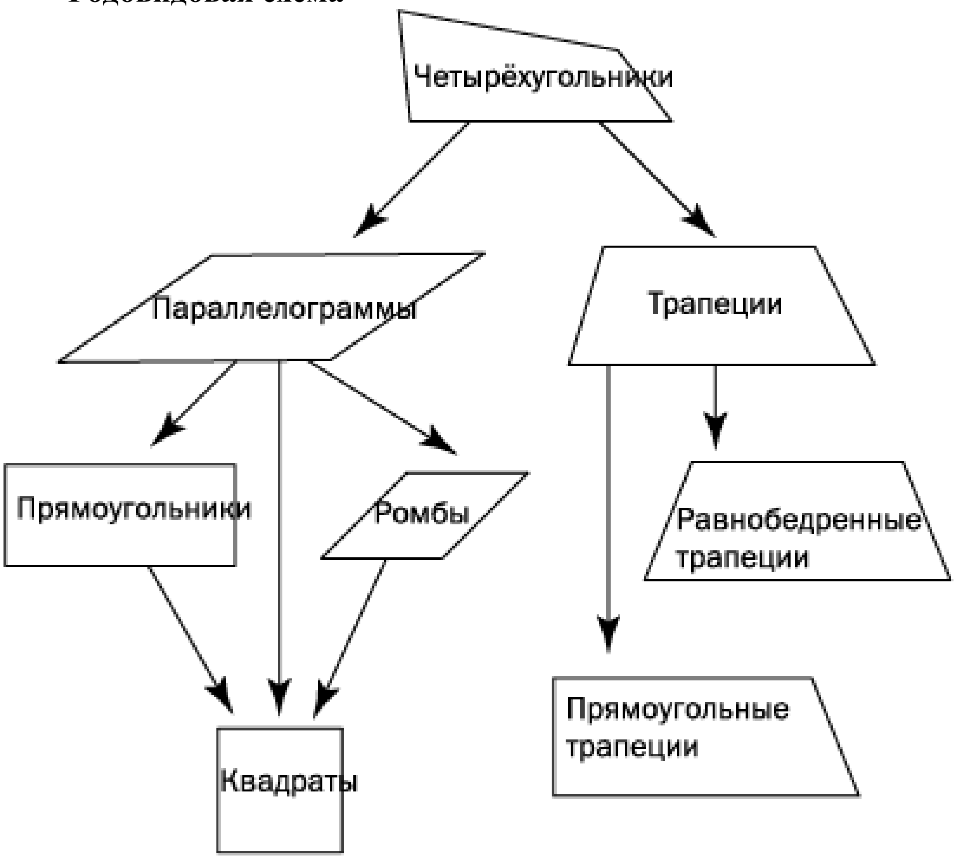
Определение: ***Прямоугольная трапеция — это трапеция с прямым углом.***



ABCD — прямоугольная трапеция, ∠A=90°.

Отмечаем все виды трапеций в родовидовой схеме.

Родовидовая схема



Таким образом, мы изучили все виды четырёхугольников, установили, что многообразие форм четырёхугольников зависит от взаимного расположения и соотношения его элементов, составили родовидовую схему множества всех выпуклых четырёхугольников, что наглядно показывает взаимосвязь между всеми видами четырёхугольников.

Эта классификационная схема множества выпуклых четырёхугольников помогает на уроках изучать свойства всех четырёхугольников. На основе приведённой схемы учащимся легко объяснять, что свойство родовых понятий — это также и свойства отдельных видов, что не все свойства видов являются свойствами всех фигур, входящих в родовое понятие. Всё это помогает дальнейшему укрупнению изучаемого материала по данной теме и позволяет избежать дробления темы в традиционных учебных планах, когда каждый вид четырёхугольников изучается последовательно друг за другом, много раз повторяясь при их определении и изучении их свойств.

Родовидовая схема может быть принята за логико-структурную модель определения различных видов четырёхугольников. Одним из важнейших логических составляющих разделов обучения математики является обучение формулировке определений понятий. При осмысливании определений учащиеся традиционно испытывают большие трудности. В лучшем случае просто заучивают их без глубокого понимания структуры определения или способов его построения, что ведёт к непониманию смысла определения.

Наиболее распространённым способом формулировки определений в школьном курсе математики является определение понятий через ближайший род и видовое отличие. В общем виде этот способ можно представить так: « А — есть В и С», где А — определяемое понятие, ВС — определяющее понятие. Иначе, А — видовое понятие, В — родовое понятие и С видовое отличие. Очевидно, что ВС называется определяющим, так как именно эта часть определения имеет его смысловую нагрузку. Поясним смысл каждой части определения. Видовое или определяемое понятие указывает на понятие, которое необходимо определить, родовое — на множество (класс) понятий с большим объёмом, к которому принадлежит определяемое понятие, видовое отличие — на признаки, которыми данное определяемое понятие отличается от других понятий этого рода. При этом следует помнить, что родовое понятие и видовое отличие взаимосвязаны друг с другом и что изменение родового понятия влечёт изменение и видового отличия.

Хотя данная форма определения достаточно проста для понимания учащихся, тем не менее точность объяснения логического смысла определения многими учащимися оставляет желать лучшего. Это особенно проявляется у учащихся, которые не понимают сути родового понятия. Поэтому их ставят в тупик такие простые вопросы:

«Является ли прямоугольник параллелограммом?» и т.д. В таких случаях необходимо с учащимися точно сформулировать определение заданного понятия и подробно разобрать его структуру. Это можно сделать по указанному общему виду определений и классификационной схеме множества четырёхугольников.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Определение арифметической и геометрической прогрессии

Дано несколько первых членов двух последовательностей натуральных чисел: а) 1; 3; 5; 7; 9; ...; б) 1; 2; 4; 8; 16; ... Какими числами будут последующие члены этих последовательностей? а) 11; 13; б) 32; 64. Учащиеся объясняют, как нашли эти числа. Для того чтобы вычислить последующие члены первой последовательности, надо к числу 9 прибавить 2 и т.д. Чтобы найти последующий член второй последовательности, надо 16 умножить на 2 и т.д. Таким образом, каждый член первой последовательности, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа 2, а каждый член второго — умножением предыдущего на одно и то же число.

Первая последовательность называется *арифметической прогрессией*, а вторая — *геометрической прогрессией*. Рассмотрим ещё несколько примеров: 1) 2; 5; 8; ...; 2) 3; 3; 3; ...; 3) –5; –9; –13; ...; 4) 3; 9; 27; ...; 5) 8; 4; 2;... В каждом примере выясняется, какими числами являются первые члены этих последовательностей и на какие числа они затем прибавляются или умножаются. Особо остановимся на вопросе: «Что получится, если первый член геометрической прогрессии равен 0?» Очевидно, что в этом случае последующие члены будут равными 0 и поэтому такие геометрические прогрессии не рассматриваются. После анализа примеров формулируются точные определения арифметической и геометрической прогрессий.

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одим и тем же числом.

Это число называется разностью арифметической прогрессии и обозначается буквой d.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которого, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному но одно и то же число.

Это число называется знаменателем геометрической прогрессии и обозначается буквой q.

Арифметическая прогрессия обозначается (a_m), геометрическая прогрессия обозначается (b_m).

Запишем определение арифметической и геометрической прогрессий символически (в рекуррентной форме):

$a_{m+1} = a_m + d,\ n \in N;\ b_{m+1} = b_m + q,\ n \in N.$

Учащиеся придумывают свои примеры арифметической и геометрической прогрессий и записывают несколько первых членов. После анализа всех примеров учащимся задаётся вопрос: «Что необходимо знать для того, чтобы задать арифметическую и геометрическую прогрессии?» Для этого надо задать первый член и разность или знаменатель прогрессий.

Свойства арифметической и геометрической прогрессий

Выясним зависимость арифметической и геометрической прогрессий от значения разности и знаменателя. Для этого рассмотрим прогрессии при различных значениях разности и знаменателя и обсудим вопросы: а) «Какие получаются арифметические прогрессии при $d>0$; $d<0$; $d=0$?»; б) «Какие получаются геометрические прогрессии при $q>1$; $0<q<1$; $q=1$?»

а) Если $d>0$, то арифметическая прогрессия будет возрастающей; если $d<0$, то убывающей; если $d=0$, то постоянной.

б) Если $q>1$, то геометрическая прогрессия является возрастающей; если $0<q<1$, то убывающей; если $q=1$, то постоянной.

Формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессии

Зная первый член и разность (знаменатель) арифметической (геометрической) прогрессии, можно найти любой её член, вычисляя последовательно, согласно определению, второй, третий, четвёртый и т.д. члены. Однако для нахождения члена прогрессии с большим номером такой способ неудобен. Поэтому для этой цели используют формулу общего или n-го члена прогрессии. Формула общего члена задаёт любую прогрессию аналитически. Она выводится непосредственно из определения арифметической и геометрической прогрессий.

а) $a_2 = a_1 + d$,	б) $b_2 = b_1 \cdot q$,
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$,	$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$,
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$,	$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$,
$a_5 = a_1 + 4d$,	$b_5 = b_1 \cdot q^4$,
....	....
$a_n = a_1 + (n-1)d$.	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Получили формулы *n*-го члена для арифметической и геометрической прогрессий. С помощью этих формул можно вычислить любой член прогрессии, если известны первый член и разность для арифметической прогрессии и знаменатель для геометрической прогрессии. Следовательно, прогрессия считается заданной, если известны первый член и разность (знаменатель).

Признак арифметической и геометрической прогрессий

Часто учащимся ставится задача: выяснить, является ли данная последовательность арифметической или геометрической прогрессией. Для этого надо воспользоваться их определениями.

1. По определению арифметической прогрессии соседние её члены отличаются друг от друга на разность прогрессии. Следовательно, выполняется следующее условие:

$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$,

где a_{n+1}, a_n и a_{n-1} — три произвольных следующих друг за другом члена арифметической прогрессии. Преобразуем полученное равенство, выразив a_n через a_{n+1} и a. Получим следующее равенство:

$a_n = (a_{n+1} + a_{n-1}) / 2$

С помощью этого равенства вычисляется среднее арифметическое (n+1)-го и (n –1)-го членов прогрессии. Таким образом, исходя из определения арифметической прогрессии, получаем, что n-й член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому соседних с ним (n–1)-го и (n+1)-го членов. Сформулируем признак арифметической прогрессии, т.е. условие, при выполнении которого заданная последовательность является арифметической прогрессией.

Признак арифметической прогрессии: ***Последовательность является арифметической прогрессией, если каждый её член, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов.***

2. Аналогично рассуждаем относительно геометрической прогрессии. По определению геометрической прогрессии соседние её члены удовлетворяют условию:

$(b_n+1) / b_n = b_n / (b_{n-1})$

Из этого равенства выразим b_n через b_{n-1} и b_{n+1}. Получим равенство, которое выражает среднее геометрическое двух членов прогрессии:

b_n = ç(b_{n-1} b_{n+1}).

Следовательно, для геометрической прогрессии получаем, что n-й член равен среднему геометрическому соседних с ним (n–1)-го и (n+1)-го членов. Сформулируем условие, при котором заданная последовательность является геометрической прогрессией.

Признак геометрической прогрессии: ***Последовательность является геометрической прогрессией, если каждый её член, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов.***

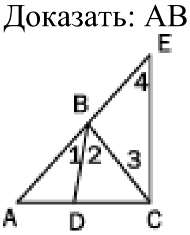
Обобщение решения задачи

В данном случае под обобщением будем понимать использование решения одной конкретной задачи для решения другой, которая может быть или видоизменённой, или обобщённой по отношению к данной. Например, решив задачу о свойствах биссектрисы угла треугольника, делим противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Можем это решение использовать для доказательства аналогичного утверждения относительно биссектрисы внешнего угла треугольника. Если решение этой задачи оформить с помощью граф-схем, то эта же схема, практически без изменения, может быть использована для решения задачи о биссектрисе внешнего угла. Рассмотрим её решение (приведено в книге П.М. Эрдниева «Преподавание математики в школе»).

Задача: *Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

Дополнительное построение: CE || BD.

Доказать: AB : BC _ AD : DC



Дано: *BD — бисс.* *CE || BD*

↓ ↓ ↓

∠1 = ∠2 ∠2 = ∠3 ∠1 = ∠4

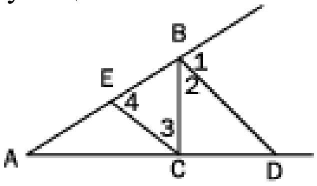
↓ ↓ ↓ ↓

BC = BE ← ∠3 = ∠4 ← ← ←┘ ↓

↓ ↓

AB : BC = AD : DC ← AB : BE = AD : DC

Используем полученную схему для решения обобщённой задачи для биссектрисы внешнего угла треугольника. По сравнению с приведённой задачей, на чертеже задачи для биссектрисы внешнего угла появляются лишь незначительные изменения: переставляются обозначения, проводится биссектриса BD внешнего угла треугольника при вершине B и дополнительное построение CE || BD внутри треугольника ABC. Поэтому, построив этот чертёж, учащиеся самостоятельно по приведённой схеме решают обобщённую задачу.



BD — биссектриса внешнего угла CBD.

Доказать:

BD — биссектриса _ AB : BC = AD : CD.

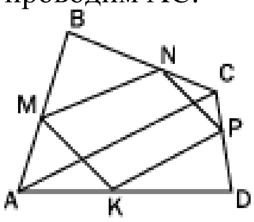
Рассмотрим решение ещё одной задачи из планиметрии, которую затем обобщим и для пространственной фигуры. Решение задачи оформим с помощью граф-схемы.

Задача: Докажите, что середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Доказать: MNPK — параллелограмм.

Дополнительное построение:

проводим AC.



Дано: *AM = MB* *BN = NC* *AK = KD* *CP = PD*

↓ ↓ ↓ ↓

MN — сред. линия DABC KP — сред. линия DACD

↓ ↓ ↓ ↓

MN = 0,5AC MN || AC KP = 0,5AC KP || AC

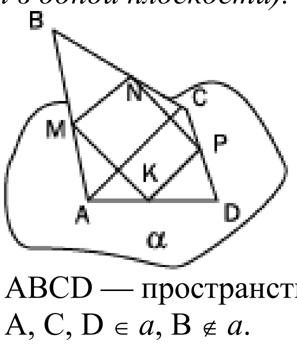
↓ └→ → ↓ → ¬ ↓

MN = KP ← ← ←┘ └→ MN || KP

MNPK — параллелограмм

Решение этой задачи, то есть представленная схема достаточно легко обобщается и для пространственного четырёхугольника. Такое обобщение может быть сделано как при изучении стереометрии в 10-м классе, так и в 8-м при изучении планиметрии. В этом случае важность этого обобщения заключается в том, что учащиеся наглядно и просто знакомятся с элементами стереометрии, что, безусловно, будет закладывать у них навыки пространственного воображения, столь необходимого им в будущем при непосредственном изучении стереометрии.

Задача: Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырёхугольника не лежат в одной плоскости).



ABCD — пространственный четырёхугольник.

A, C, D $\in a$, B $\notin a$.

Доказать: MNPK — параллелограмм.

Как видно из приведённых решений, использование граф-схем при решении геометрических задач способствует уплотнению учебного материала и экономит время, то есть является эффективным средством укрупнения дидактических единиц.

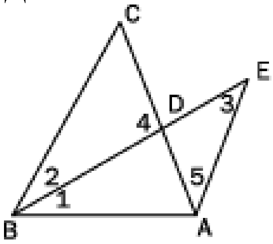
Решение задачи несколькими способами

В геометрии известно большое количество задач и теорем, которые решаются несколькими способами. Решение какой-либо конкретной задачи разными способами активизирует познавательную деятельность учащихся, способствует их творческому развитию, решая задачу, они используют разнообразный теоретический материал из всего курса. Происходит предметное обобщение теоретического материала в плане применения к конкретной задаче, устанавливаются взаимосвязи между различными темами. Самой известной задачей, допускающей большое количество способов решения, является теорема Пифагора.

Рассмотрим решение знакомой нам уже задачи о свойствах биссектрисы угла двумя способами, используя подобие треугольников, свойство параллельных прямых и свойство равнобедренного треугольника. Решение задачи проведём с помощью одной и той же схемы. Предварительно на чертеже проведём дополнительные линии.

При решении задачи первым способом продолжим биссектрису BD и проведём прямую AE, параллельную BC. При втором способе также продолжим биссектрису и отложим отрезок AE, равный отрезку AB. Поэтому за условие задачи в первом случае примем следующее: BD — биссектриса и AE || BC, а во втором случае условием задачи будут утверждения BD — биссектриса и AE = AB. Условие и доказательство задачи вторым способом на схеме показаны полужирными линиями.

Доказать: AB : BC = AD : DC



Дано: BD — бисс.   AE || BC

↓↓   ↓

∠1=∠2   ∠2=∠3   ∠4=∠5

↓   ↓↑   ↓↓   ↓↓

∠1=∠3   œADE ∞ œCDB

↓↑   ↓↓

↓↑   BC : DC=AE : AD

↓↑   ↓↓

AB=AE →(→) BC : DC=AB : AD

↓↓

AB : BC=AD : DC

Приведённая схема решения задачи о свойстве биссектрисы треугольника показывает, что практически с помощью одних и тех же знаков задача решается двумя способами или, иначе, решаются две задачи.

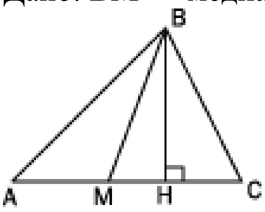
В отличие от наглядно-схематического способа решения задачи о свойствах биссектрисы треугольника, при котором обобщение для уплотнения материала чётко выражено, решение следующей задачи несколькими способами представляет собой последовательность различных решений этой задачи. Но, как уже было сказано выше, в этом случае обобщение проявляется в разных подходах к решению задачи и установлении тесных связей между различными понятиями всего курса. Организация такой работы имеет важное значение при повторении.

В планиметрии есть замечательная задача, которая незаслуженно забыта авторами традиционных школьных учебников геометрии. Правда, она имеется в учебном пособии И.Ф.Шарыгина «Факультативный курс по математике», но она не настолько трудна, чтобы её не включать в действующие учебники. Обучающая ценность этой задачи состоит в том, что её можно решить несколькими различными способами с привлечением большого количества теоретического материала. Это задача о свойствах медиан треугольника.

Задача: Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Чтобы доказать это утверждение, предварительно докажем следующее утверждение: «Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника».

Дано: BM — медиана.



Доказать: $S_{\propto ABM} = S_{\propto CBM}$.

Доказательство: Проведём высоту BH данного треугольника ABC, которая является также и высотой треугольников ABM и CBM.

Имеем:

$S_{\propto ABM} = (AM \bullet BH) / 2$

и $S_{\propto CBM} = (MC \bullet BH) / 2$.

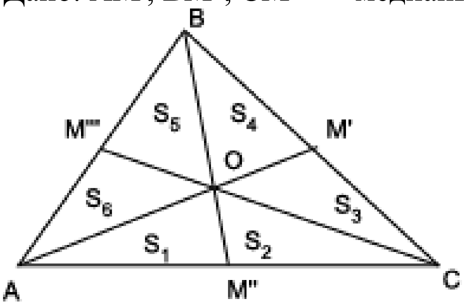
Так как AM = MC по условию и BH — общая высота треугольников ABM и CBM, то $S_{\propto ABM} = S_{\propto CBM}$, то есть треугольники ABM и CBM равновелики.

Рассмотрим четыре способа решения задачи о свойствах медианы треугольника.

Способ 1. Воспользуемся только что доказанным утверждением и свойством площадей фигур, которое формулируется так: «Если фигура состоит из нескольких фигур, то её площадь равна сумме площадей этих фигур».

Обозначим площади треугольников, полученных при пересечении медиан, соответственно через S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6; $S_{\propto AM'''O} = S_1$, $S_{\propto M'OC} = S_2$ и т.п.

Дано: AM', BM'', CM''' — медианы.



Доказать:

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$.

Доказательство: Рассмотрим треугольники AOB, AOC, BOC. В этих треугольниках OM''', OM'' и OM' — медианы. Следовательно, на основании утверждения предварительной задачи $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$, $S_5 = S_6$. Так как AM' — медиана, то выполняется равенство: $S_{\propto AM'C} = S_{\propto AM'B}$. Треугольники AM'C и AM'B состоят из трёх треугольников каждый. Значит, $S_{\propto AM'C} = S_1 + S_2 + S_3$ и $S_{\propto AM'B} = S_4 + S_5 + S_6$. Из этих двух равенств следует: $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6$ (1). Имеем $S_1 + S_2 = 2S_1$, $S_5 + S_6 = 2S_6$. Перепишем равенство (1) в виде $2S_1 + S_3 = S_4 + 2S_6$. Так как $S_3 = S_4$, то отсюда следует, что $S_1 = S_6$. Аналогично доказывается, что $S_2 = S_3$ и $S_4 = S_5$. Следовательно, верно равенство $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$. Что и требовалось доказать.

Способ 2. При решении вторым способом воспользуемся следующими утверждениями:

1) площади треугольников, имеющих равные углы, относятся как произведения сторон, заключающих равные углы;

2) медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

Доказательство: Треугольники AOM'' и BOM' имеют равные углы $\angle AOM'' = \angle BOM'$ (как вертикальные). Далее имеем

$S_1 / S2 = S_{æAOM''} / S_{æBOM'} = (AO \bullet OM'') / (BO \bullet OM') = (2OM' \bullet OM'') / (2OM'' \bullet OM') = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_1 = S_4$.

Аналогично доказываются, что $S_2 = S_5$, $S_3 = S_6$. Из предварительной задачи следует, что $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$, $S_5 = S_6$. Следовательно, $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$.

Способ 3. Для вычисления площадей треугольников используем формулу:

$S = ½ \bullet ab \bullet \sin a$.

Доказательство: Так как по свойству медианы AO = 2OM',

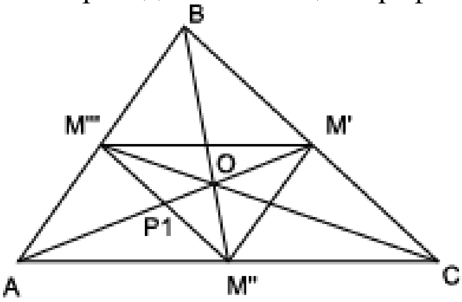
то $S_1 = S_{æAOM''} = ½ \bullet AO \bullet OM''\sin\angle AOM''=OM' \bullet OM''\sin\angle AOM''$.

Поскольку BO = 2OM', то

$S_4 = S_{æBOM'} = ½ \bullet BO \bullet OM'\sin\angle BOM' = OM'' \bullet OM'\sin\angle BOM'$.

Углы AOM'' и BOM' равны как вертикальные, значит, $S_1 = S_2$. Аналогично доказываются, что $S_2 = S_5$, $S_3 =S_6$. Следовательно, $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$. Все шесть треугольников имеют равные площади, то есть они равновелики.

Способ 4. Используем свойство средней линии треугольника и теорему Фалеса. Доказательство проведём с помощью граф-схем.



M'M'', M''M''', M'M''' — средние линии треугольника ABC. По свойству средней линии M'M''||AB. Аналогично остальные средние линии параллельны соответствующим сторонам DABC.

Дано: AM'''=BM''' *M'''M''||BC* *BM' = CM'*

↓ ↓ ↓

$S_{æAM'''O}=S_{æBM'''O}$ M'''P1=M''P1

↓ ↓ ↓

↓ $S_{æAM'''P1}=S_{æAM''P1}$ $S_{æOM'''P1}=S_{æOM''P1}$

↓ ↓ ↓

$S_{æAM'''O}=S_{æBM'''O}=S_{æAM''O}$ ← ← $S_{æAM'''O}=S_{æAM''O}$

Аналогично доказывается, что $S_{æBM'''O} = S_{æBM'O} = S_{æCOM'''}$ и $S_{æCOM'} = S_{æCOM''} = S_{æAOM''}$. Следовательно, все треугольники равновелики.

Такая форма обобщения решения задачи при организации повторения развивает творческие способности учащихся, они стремятся найти новые пути решения любой задачи, стараются увидеть тесную взаимосвязь между отдельными темами и разделами учебного материала.

Метод противопоставления

Принцип совместного изучения взаимно обратных действий может быть показан на примерах изучения прямых и обратных теорем в геометрии и тем «Умножение многочлена на одночлен» и «Вынесение общего множителя за скобки», «Умножение многочленов» и «Разложение многочленов на множители способом группировки».

При совместном изучении взаимно обратных теорем используется наглядно-схематичный способ или метод граф-схем. При этом на одной и той же схеме рассматриваются и прямые теоремы, и обратные им. Происходит реальное укрупнение учебного материала, так как с помощью одних и тех же знаков решаются сразу две задачи в тесной логической взаимосвязи друг с другом. Если невозможно на одном уроке рассмотреть прямую и обратную теоремы, то после доказательства прямой теоремы необходимо хотя бы сформулировать обратную теорему.

В традиционном учебном планировании материала алгебры 7-го класса темы, связанные с умножением одночленов на многочлены, умножением многочленов, с выводами формул сокращённого умножения, а также темы, связанные с разложением многочленов на множители различными способами, изучаются последовательно на изолированных уроках, выполняется большое количество однотипных упражнений по изучаемой теме. В дальнейшем процессе обучения учащиеся сталкиваются с определёнными трудностями, связанные особенно с вынесением общего множителя за скобку, то есть разложением многочленов на множители. Однако раскрывать скобки, то есть умножать многочлен на одночлен и многочлен, они умеют. Происходит это потому, что учащиеся ясно не представляют себе единство и противоположность этих действий. Они не понимают, что вынесение за скобки общего множителя и раскрытие скобок — это суть две стороны одного целого. Эти действия у учащихся не ассоциируются друг с другом. Не понимают из-за того, что сначала долго выполняют только одно действие раскрытия скобок, а лишь потом другое заключение в скобки, то есть вынесение общего множителя. Для того чтобы не было этих трудностей, надо действия раскрытия скобок и вынесения общего множителя за скобки изучать одновременно, чтобы учащиеся представляли единство и противоположность этих действий.

Кроме того, метод противопоставления является эффективным средством при выводах синтетическим путём различных формул. Суть такого подхода заключается в том, что берётся некая известная формула и посредством её преобразований, порою достаточно искусственных, выводится требуемая формула. Искусственность применяемых преобразований затрудняет запоминание самого процесса вывода, а значит, и смысла проводимой работы. А какую формулу вообще брать в качестве основы преобразования? В такой ситуации можно воспользоваться аналитическим методом, то есть выполнить действия, обратные синтетическому методу. Это значит, что не нужно искать исходную формулу для преобразования, а преобразовать саму формулу, которую нужно вывести. При этом не надо искать какую-либо первоначальную формулу для последующего преобразования. Например, таким способом легко доказывается истинность формулы Герона для нахождения площади треугольника.

Аналитический метод (метод решения с конца) удобен также при решении задач на построение геометрических фигур по заданным элементам или по их соотношению. Если поставлена задача построить фигуру по её некоторым заданным элементам, то, допустив, что такая фигура построена, раскладываем её на части, чтобы в процессе разложения наметить путь построения и по этому пути построить требуемую фигуру, потому что шаги разложения фигуры на части являются действиями, обратными собиранию фигуры, то есть построения. Например, этим методом можно решить задачу на построение треугольника по заданному периметру и двум его углам.

Прямые и обратные теоремы

В учебных программах по математике практически для всех классов содержатся темы о взаимно обратных, противоположных действиях, которые по традиции изучаются отдельно. В геометрии — это взаимно обратные теоремы. По характеру мыслительных процессов, на которых основывается изучение таких тем, они сходны. Эти темы логически взаимосвязаны и поэтому их совместное и одновременное изучение позволяет создать у учащихся целостное и глубокое понимание таких действий. Перед ними открывается возможность представить ход данного процесса как в прямом, так и в обратном направлении во взаимной связи друг с другом. Учащимся эти взаимно обратные действия представляются некоторой целой единицей укрупнённой информации. Для наглядности большинство прямых и обратных теорем изучаются с помощью схематического способа, при котором схема доказательства прямой теоремы используется для доказательства обратной теоремы. Такой подход применяется при изучении теоретических вопросов в планиметрии и стереометрии. При этом учитель может разнообразить самостоятельную работу учащихся: предложить по полученной схеме прямой теоремы доказать обратную, проанализировать своё решение, одновременное ведение доказательства взаимно обратных теорем по двум параллельным схемам с попутным комментированием решения.

Рассмотрим доказательство с помощью граф-схем одного из свойств параллелограмма и соответствующего признака параллелограмма из планиметрии и теорему о трёх перпендикулярах из стереометрии.

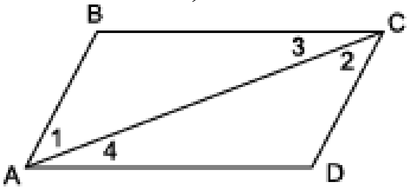
1. *Свойство параллелограмма:* «В параллелограмме противоположные стороны попарно раны».

Признак параллелограмма: Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник является параллелограммом. Доказательства прямой теоремы (свойства) и обратной (признака) проведем по одной схеме. Полужирными линиями показываются условие и доказательство обратной теоремы.

Запишем эти теоремы в символической форме в одной общей схеме: (AB || CD, BC || AD) ⇔ (AB = CD, BC = AD).

Доказать:

AB = CD, BC = AD



Дано: *AB || CD* *BC || AD*

↓↑ ↓↑

AC — общая ∠1 = ∠2 ∠3=∠4

↓↓ ↓↑ ↓↑

œABC = œADC

↓↑ ↓↑

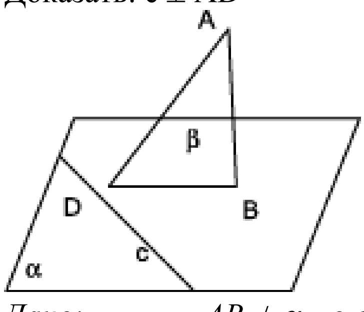
AB = CD BC = AD

2. Теорема о трёх перпендикулярах: Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.

Обратная теорема: Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Символическая запись теорем: c ⊥ BD ⇔ c ⊥ AD.

Доказать: c ⊥ AD



Дано: $AB \perp \alpha$ $c \subset \alpha$

↓↓ ↓↓

A, B, D ∈ β c ⊥ BD AB ⊥ c

↓↓ ↑ ↓↑ ↓↓

BD ⊂ b AD ⊂ β c ⊥ β

↓ ↓↑

c ⊥ AD

AB — перпендикуляр;

AD — наклонная;

BD — проекция наклонной,

Плоскость ABD обозначим β.

Данная плоскость α.

Умножение многочленов и разложение многочленов на множители способом группировки

1. Рассмотрим несколько выражений:

1) ab + ac; 2) ab + ac + ad; 3) (a + b)c + (a + b)d; 4) (a + b)c + (a + b)d + (a + b)m.

Необходимо в каждом из данных выражений найти общие множители и вынести их за скобки. После выполнения указанного действия перед учащимися ставится вопрос: «Какое действие при этом совершили?» (Разложение данных выражений на множители, то есть представили их в виде произведения двух выражений.) Особое внимание обратим на два последних примера, в которых общими множителями являются многочлены:

(a + b)c + (a + b)d = (a + b)(c + d);

(a + b)c + (a + b)d +(a + b)m = (a+ b)(c + d + m).

После разложения этих выражений на множители в правой части получили произведение двух многочленов a + b и c + d, a + b и c + d + m. Как вычислить эти произведения?

Учащимся предлагается самим попробовать вычислить произведение (a + b)(c + d). При этом на доске записано выражение, которое они получили при разложении на множители данных выражений. Переписав в обратном порядке и продолжая действие умножения многочлена a + b на одночлен c и d, получим выражение для произведения многочленов:

(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.

Что получили в результате? (Многочлен.) Сколько в нём членов? (4.) Почему? (Потому что каждый член одного многочлена умножили на каждый член второго, а полученные произведения сложили.) А сколько членов в данных многочленах? (По 2.)

Для закрепления навыков умножения многочленов учащиеся выполняют следующие упражнения:

1) (a + b)(c + d +m) = (a + b)c + (a + b)d + (a + b)m =

= ac + bc + ad + bd + am + bm;

2) (b + 3)(a – 2) = ab +3a –2b — 6;

3)(x + y — 2)(x – y) = x^2 + xy – 2x – y^2 + 2y =

= x^2 –2x–y^2 –2y.

После выполнения этих примеров учащиеся формулируют правило умножения многочлена на многочлен: *«Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить».*

2. Как проверить правильность какого-либо действия? Выполнив обратное действие, какое действие является обратным умножению многочленов? Разложение на множители. Запишем результаты примеров, рассмотренных в начале урока, в обратном порядке:

ac + bc + ad + bd = c (a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d);

ab + 3 – 2b – 6 = a(b + 3) – 2(b + 3) = (b + 3)(a – 2).

Сравним исходные данные и результат. Что получилось в результате? Многочлен ac + bc + ad + bd представили в виде произведения двух многочленов a + b и c + d, т.е. разложили на множители. Проанализируем, какие действия при этом выполнили:

1. Разделили данный многочлен на группы.
2. В каждой группе нашли общий множитель.
3. Вынесли эти общие множители за скобки.
4. Ещё раз вынесли за скобки полученный общий множитель.

Способ разложения на множители, рассмотренный в этих примерах, называется *разложением на множители способом группировки*. Учащимся предлагается сформулировать правило разложения многочлена на множители данным способом и решить несколько примеров с последующей их проверкой умножением.

1) 7a – 7b + an – bn = 7(a – b) + n(a + b) = (a – b)(7 + n);

2) x^2 + ax – a^2y — axy = x(x + a) — ay(x + a).

Следует заметить, что рассмотренный подход к изучению взаимообратных действий умножения многочленов и разложения их на множители способом группировки используется также при изучении действий умножения многочлена на одночлен и вынесения общего множителя за скобки и при изучении формул сокращённого умножения совместно с разложением многочленов на множители с помощью этих формул.