

# Психолого-педагогические аспекты применения граф-схем при решении геометрических задач

Хабибуллин Кадыр Якупович — учитель математики школы № 12 г. Салавата Республики Башкортостан

## Роль зрительного восприятия и предметного действия в обучении

Наглядно-схематический способ решения геометрических задач позволяет учащимся выполнять действия по созданию некоего образа, заданного в виде информационной схемы, включающей весь процесс решения задачи. Очевидно, что в таком решении очень значимы зрительное восприятие условия задачи и самого хода решения и предметное действие (непосредственное строение схемы из определённых фигур).

Связь зрительного восприятия и творческой деятельности отображена в таких терминах, как *продуктивное восприятие, разумный глаз или визуальное мышление*. Сама же творческая деятельность связана с чувственно-предметной, практической деятельностью (наглядно-действенное мышление, практический интеллект).

Процесс решения любой творческой задачи, в частности математической, описывается, как правило, в терминах зрительного восприятия. Часто используются такие понятия, как *усмотрение, открытие, внутреннее видение, визуализация* (зрительное представление) проблемной ситуации или целого проблемного комплекса. Поэтому граф-схемы являются предметным образом решения некой задачи, воспринимаемым зрительно, и достаточно легко запоминаются обучающимися. По мнению С.Л. Рубинштейна\*, чувственно-наглядная сторона как бы «освещается» смысловым логическим содержанием и сама служит «опорным» пунктом обобщённого логического знания. «Чувственное содержание образа становится носителем смыслового содержания»\*\*. В качестве примера можно привести знаменитые шаталовские опорные схемы.

---

\* См.: Рубинштейн С.Л. Бытие и сознание. О месте психического во всеобщей зависимости явлений материального мира. М.: Изд-во АН СССР, 1957.

\*\* Там же. с. 88.

Психологи среди типологий мышления отмечают и такой вид мышления, как *визуальное мышление* (зрительное, наглядное). Как отмечает Р. Арнхейм\*, визуальное мышление — это «мышление посредством визуальных (зрительных) операций». А.Р. Лурия\*\*, исследуя познавательные процессы, выделяет «ум, который работает с помощью зрения, умозрительно». Приведём определение известного психолога В.П. Зинченко\*\*\*: «Визуальное мышление — это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определённую смысловую нагрузку и делающих знание видимым».

---

\* Арнхейм Р. Визуальное мышление. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 98.

\*\* Лурия А.Р. Ум множества. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 108.

\*\*\* Зинченко В.П. Образ и деятельность. М.: Изд-во Института практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЕК», 1997.

Создание самой схемы решения задачи — это некоторое предметное действие. С одной стороны, предметное действие рассматривается психологами как процесс «информационный: процесс преобразования информации» о внутренних логических связях в структуре решения конкретной задачи\*. Специфика этого информационного процесса заключается в том, что он отражает динамическое постепенное взаимосвязанное изменение хода решения задачи по ходу его выполнения. Это процесс установления, актуализации, выбора необходимых связей и

отказ от ненужных на данный момент связей между составляющими частями решения (в случае решения геометрических задач — это логические силлогизмы). Схема решения задачи способствует трансформации визуального мышления в продуктивное.

---

\* Ошанин Д.А. Предметное действие и оперативный образ. М.: Московский психолого-социальный институт; Воронеж: НПО «МОДЕК», 1999.

С другой стороны, схема решения динамическая или даже статическая может быть рассмотрена как основа ориентировочно-исследовательской деятельности. При этом психологами отмечается три ступени этой деятельности.

На первой ступени, *на стадии показа* этой методики, ориентировка имеет хаотичный характер. Элементы возникающих логических связей учащимися выделяются трудно. Ориентировочные реакции вызываются как существенными, так и несущественными связями. Действительно, на практике первое взаимодействие учащихся с граф-схемами проходило трудно.

На второй ступени, после *словесной инструкции и наглядной иллюстрации этой инструкции*, ориентировочная деятельность становится более осмысленной и целенаправленной. Ориентировочные реакции ассоциативно начинают складываться в систему или в необходимую схему.

На третьей ступени происходит *логическое обоснование своей ориентировочно-исследовательской деятельности* (имеется фактическое знание материала).

Таким образом, построение наглядной схемы решения геометрической задачи — это вид такой ориентировочной деятельности, в процессе которой складывается система «ориентировочных реакций», представляющая собой «копию-слепок исследуемого объекта», в данном случае решения задачи\*. Возникающий на основе такой работы образ решения задачи способствует более прочному и глубокому пониманию сущности конкретной задачи, её структуры и взаимосвязи между составляющими решения частями. «Ориентировка, приводящая к формированию образа и осуществляемая на основе образа, имеет уже прямое отношение к творческой деятельности»\*\*.

---

\* Запорожец А.Б. Избранные психологические труды. М.: Педагогика, 1986.

\*\* Там же. С. 233.

Необходимо отметить ещё один психологический аспект применения и внедрения в педагогическую практику наглядно-действенных способов решения и оформления решения геометрической задачи. Во многих исследованиях, касающихся проблемы познавательной деятельности, восприятия окружающего мира, большое значение придаётся предметности восприятия.

Предметность является основным свойством восприятия. «Чувственные данные, — писал С.Л. Рубинштейн, — тотчас же приобретают предметное значение, т.е. относятся к определённом предмету»\*.

---

\* Рубинштейн С.Л. Бытие и сознание. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 243.

Проблема предметности восприятия имеет не только теоретическое, но и практическое значение. При использовании граф-схем предметность восприятия выступает в качестве предмета-образа решения задачи в виде некой целостной схемы: предмета, составленного из некоторых фигур, в данном случае прямоугольников.

Современная система чувственного воспитания основное внимание обращает на формирование восприятия различного рода предметов в процессе осмысленной целенаправленной деятельности с этими предметами: изобразительной, конструктивной, т.е. с помощью создания «информационных моделей»\*.

---

\* Зинченко В.П. Образ и деятельность. М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1997.

## Моделирование как средство формирования учебных умений

Что же такое информационная модель? Хотя термин *информационная модель* из инженерной психологии, но это понятие полностью подходит и к решению геометрических задач с помощью схемы. «Информационная модель представляет собой организованное в соответствии с определённой системой правил и выдаваемое на средства индикации отображение реальной обстановки»\*. Применительно к граф-схемам этот термин можно дополнить и назвать *информационно-логической*, так как она при всей своей внешней информатизации включает в себя и логическое обоснование каждого своего связывающего звена.

---

\* Зинченко В.П. Образ и деятельность. М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1997. С. 122.

Какой должна быть информационная модель? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим требования к понятию *модель* вообще. Все модели имеют общее — это наличие некоторой структуры (статической или динамической). Модель всегда является неким отражением или воспроизведением действительности.

В книге «Формирование зрительного образа» В.П. Зинченко приводит требования, предъявляемые к моделям вообще, и даёт пояснения для информационных моделей\*.

---

\* Зинченко В.П., Понов Д.Ю. Формирование зрительного образа. М.: Изд-во МГУ, 1969. С. 301.

1. Модель представляет собой абстракцию, в которой сохраняются те свойства, отношения, взаимодействия, связи физических объектов, которые существенны, т.е. участвуют в «игре». В этом смысле модель воспроизводит действительность в упрощённой форме и всегда является идеализацией, упрощением действительности.

2. Модель должна быть наглядной, т.е. пользователь должен иметь возможность воспринимать сведения, даваемые моделью, быстро, без их кропотливого анализа.

3. Одним из важнейших средств достижения лёгкой воспринимаемости (или «читаемости») является правильная организация структуры информационной модели.

4. Информационная модель должна быть хорошо скомпонована. В этом смысле разработать информационную модель — значит хорошо скомпоновать картину. Ситуация должна быть воспринимаема в целом и для этого не должна быть перегружена различными деталями.

5. Информационная модель должна быть закодирована, т.е. найдена система символов, с помощью которой представляют необходимые сведения.

Первоначальное зрительное восприятие сути задачи, зрительное представление хода решения, предметное действие по созданию модели (информационной модели) решения, опредмечивание такого абстрактного образа решения задачи в виде некоторой наглядной схемы (предмета — образа) и возвращение к этому предмету-схеме для логического обоснования всего процесса решения, преобразования её при необходимости (для оптимизации решения или исправления ошибок, возникших при решении) — это как раз те приёмы и способы, которые предназначены для формирования у учащихся умений решать задачи. А как известно, умение решать задачи (в том числе и математические) является бесспорным показателем сформированности у учащихся творческих умений, показателем их способности к творческой деятельности во всех сферах человеческой деятельности.

Целесообразно различать два вида моделирования по их целевому назначению и объектам применения: *моделирование самой задачи* как некоторой ситуации, и *моделирование процесса решения задачи*. Моделирование задачной ситуации отражает сущности рассматриваемых в задаче объектов, связи и отношения между ними. Такая деятельность требует от ученика глубокого анализа задачи, а построенная модель помогает выявить скрытые зависимости между величинами.

Моделирование процесса решения задачи позволяет организовать и упорядочить поиск решения задачи и продемонстрировать этот процесс в развитии. В методике обучения решению задач известны такие способы разбора задачи, как рассуждение от данных к вопросу, от

вопроса к данным и смешанного вида.

Граф-схемы решения геометрической задачи могут служить иллюстрацией как решения первого, так и второго типа. Такая схема (дерево рассуждений) обладает двумя особенностями: во-первых, она является законченной моделью решения задачи, во-вторых, зрительно воспринимаемая, она отражает те мысленные действия, которые ученик выполняет, решая задачу, то есть является внешним выражением внутренних действий. Возможность воплотить свои внутренние действия и их результат во внешнюю, наглядную опору является для многих учащихся той необходимой ступенью, поднявшись на которую они могут двигаться дальше. Наличие схемы на доске или индивидуальной карточке помогает решать задачу даже слабым учащимся, так как такое моделирование ориентирует их в заданной ситуации, то есть является ориентировочным компонентом процесса решения задачи.

Известно также, что моделирование является эффективным средством нахождения различных способов решения одной и той же задачи. Освоение способов моделирования в процессе обучения — сложный вид деятельности учащихся, причём трудности связаны не только с абстрактным характером самих моделей. Моделируя процесс решения задачи, учащиеся отображают сущность рассматриваемых в задаче объектов и отношений между ними. Кроме этого, схема является средством контроля (самоконтроля), так как учащиеся всегда могут проследить выполняемые им действия: кодирование, декодирование и преобразование. Под *кодированием* понимается перевод объекта (задачной ситуации) на язык знаково-символьных средств. *Декодирование* выполняется при соотнесении модели (готовой или получаемой непосредственно при решении задачи) с объектом моделирования. Действие *преобразования* позволяет учащимся перегруппировать при необходимости элементы модели (схемы), дополнить её недостающими элементами или исключить лишние элементы. Г.А. Балл считает, что моделирование может быть «внутренним» или «внешним» средством\*. При этом *внутренним* средством оно становится в том случае, если учащийся овладел приёмами моделирования и у него сформированы соответствующие учебные умения и учащийся свободно пользуется им для решения задачи. Когда ученик, не владея процессом моделирования, использует готовую модель для решения задачи в качестве вспомогательного средства — это является *внешним* средством решения задачи.

---

\* Балл Г.А. Теория учебных задач. М.: Педагогика, 1990.

Рассмотрим использование моделирования, его потенциальные возможности для обучения решению задач на разных уровнях.

На *опорном (пониженном)* уровне модели становятся внешним средством решения задачи: учащимся вместе с текстом задачи предлагается готовая модель (схема) данной задачной ситуации или процесса решения. Специальные задания нацеливают на анализ модели в сопоставлении с текстом задачи и её деятельностного осмысления. При этом учащиеся осуществляют процесс декодирования. Задачи учащихся могут быть даны в виде алгоритма действий, на достраивание незавершённых моделей, которые помогут ученику достичь результата в решении задач. Таким образом, ориентировочная основа деятельности направлена на решение задачи в готовом виде.

На *повышенном* уровне модели являются внутренним средством решения задачи, позволяющим упорядочить самостоятельный поиск ориентировочной основы. При этом учащимся предлагается выполнить целесообразную модель к задаче самостоятельно. Ученик, освоивший различные виды моделей, должен выбрать тот вид, который соответствует предложенной задаче и наиболее удобен в данном случае.

На *среднем (переходном)* уровне предлагается частичное построение модели (при этом она может быть незаконченной) и даётся задание: определить недостающие элементы и завершить построение модели самостоятельно.

В методической литературе рассматриваются некоторые принципы, называемые *постулатами моделирования*, которым должен подчиняться процесс моделирования:

- 1) *постулат наблюдаемости*: необходимо, чтобы при моделировании использовалась

вся существенная для данного исследования информация;

2) *постулат стабильности*: надо, чтобы моделируемый объект обладал некой устойчивостью — либо его изменение не должно быть слишком быстрым, либо его изменение должно иметь регулярный характер, подчиняющийся какому-либо закону;

3) *постулат экстраполируемости*: нужно, чтобы модель обладала некоторой общностью, то есть, будучи создана для одной ситуации, она могла быть применена и к другой\*.

---

\* Растригин Л.А., Марков В.А. Кибернетические модели познания. Рига: Зинатне, 1976. С. 127–129.

Л.Г. Петерссон\* рассматривает следующие функции моделирования:

1) гносеологическая — заключается в возможности упрощённого опосредованного исследования объектов науки, непосредственное изучение которых не представляется возможным в силу тех или иных причин;

2) иллюстративная — создание чувственных опор для анализа и обобщения;

3) эвристическая — для получения новых знаний;

4) интегративная или синтезирующая — установление единой нормы знаний, его синтез.

---

\* Петерссон Л.Г. Моделирование как средство формирования представлений о понятии функции в 4–6-х классах средней школы: Дисс. канд. пед. наук. М., 1984. С. 23.

В исследованиях по методике преподавания математики обсуждается вопрос о наличии в школьном курсе математики понятий «модель», «моделирование», доказана необходимость обучения школьников математическому моделированию, разработана методологическая схема обучения построению математических моделей, определено содержание основных понятий для формирования представлений о математическом моделировании.

## Граф-схемы — наглядный алгоритм решения геометрической задачи

Посмотрим на процесс моделирования хода решения геометрической задачи с позиции построения некоторого алгоритма, в котором расписана (наглядно показана) последовательность выполнения логических рассуждений, применяемых при решении задачи. Построение таких наглядных моделей решения геометрических задач можно определить как *наглядно-иллюстрированный алгоритм решения задачи*. Академик А.Н. Колмогоров под алгоритмом понимал всякую систему вычислений, выполняемых по строго определённым правилам, которые после какого-либо числа шагов заведомо приводят к решению поставленной задачи.

Часто используется другое определение алгоритма: последовательность определённых действий, приводящих к решению поставленной задачи. Устанавливаемая алгоритмом последовательность действий задаётся словесным или графическим описанием. Программный материал по математике позволяет выработать у учащихся чёткие представления об алгоритмах и его свойствах (детерминированности, массовости, результативности, определённости). В школьном курсе математики не так уж много встречается алгоритмов в точном (математическом) смысле этого слова, но зато имеется значительное число предписаний с рядом существенных черт алгоритма. Как правило, у таких предписаний отсутствуют некие свойства алгоритма, чаще всего определённости и детерминированности. Поэтому было введено в рассмотрение особенное понятие алгоритма — *предписание алгоритмического вида*\*. Под алгоритмическим предписанием мы будем понимать предписание, пользуясь которым любой ученик, имеющий определённые необходимые знания и точно выполняющий эти предписания, правильно решит любую задачу. Это предписание состоит из шагов алгоритмического предписания определённой последовательности операций, которые необходимо проделать над условием задачи и логическим условием, указывающим, в каком случае следует применить тот или иной шаг алгоритмического предписания.

---

\* Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Педагогика, 1977.

Отличие понятия *алгоритмическое предписание* от понятия *алгоритм* обусловлено тем, что в числе элементарных операций, составляющих алгоритмическое предписание, могут быть такие, которые имеют содержательный (семантический) характер, что совершенно недопустимо в математических алгоритмах. Это объясняется тем, что математические алгоритмы ориентированы в основном на машину, которая не умеет рассуждать и понимать, а исполнение алгоритмического предписания направлено на ученика. Ученики, выполняя алгоритмическое предписание, вынуждены вникать в смысл выполняемых действий, а реализация математического алгоритма происходит, как правило, бездумно, автоматически, что может привести к формальному усвоению знаний.

Для того чтобы указание (правило) для решения задачи могло быть названо *алгоритмическим предписанием*, оно должно удовлетворять следующим требованиям:

- в нём точно перечислены все операции, которые следует провести, чтобы решить поставленную задачу, и указаны условия, определяющие порядок применения этих операций;
- каждая операция и каждое условие точно определены;
- каждая операция однозначно выполнима;
- учащиеся, для которых даются указания, владеют всеми операциями, перечисленными в задаче;
- точное выполнение всех указанных операций с учётом условий их выполнения и порядка всегда приводит к решению любой задачи.

Построение схемы решения геометрической задачи можно считать наглядным алгоритмическим предписанием для выполнения этого решения, в котором указывается последовательность логических действий установления взаимосвязей между составляющими решение задачи объектами, и поэтому построение алгоритмического предписания в виде наглядной схемы процесса решения геометрической задачи может быть названо *процессом логического конструирования решения задачи*, под которым в методической литературе понимается построение логических схем и программ деятельности. Формирование умений у учащихся логического конструирования способствует активизации таких типов учебно-познавательной деятельности, как построение планов, прогнозирование результатов намечаемых операций, осуществление целенаправленного преобразования объектов.