Планирование учителем своей деятельности

Окончание. Начало в № 1, 2001.

Башмаков Марк Иванович — академик РАО, директор Института продуктивного обучения СЗО РАО, профессор, доктор физико-математических наук
Поздняков Сергей Николаевич — директор ЦПО «Информация образования», редактор журнала «Компьютерные инструменты в образовании», доктор педагогических наук, профессор СПбГЭТУ
Резник Наталья Александровна — доктор педагогических наук, главный специалист Мурманского технического университета

Визуальный поиск решения учебной задачи

Процесс обучения в школе связан с передачей знаний, накопленных человечеством. Учитель предъявляет некоторую информацию, существенные моменты которой ученику полагается понять, усвоить и запомнить. Как правило, каждое объяснение сопровождается словесными описаниями, разнообразными примерами, строгими выкладками или наглядными иллюстрациями. Ученик заносит в тетрадь отдельные сведения, перерисовывает таблицы и диаграммы, записывает формулировки теорем, фиксирует цепочки формул. По мнению учителя, в результате этих усилий возрастут любознательность ученика, стремление решать не только лёгкие, но и трудные задачи. К сожалению, у большинства так и не пробуждается интерес к поискам ответов на сложные вопросы, они не успели (не смогли) понять, как это делать.

Проблема организации поисковой деятельности в процессе обучения математике (и не только математике!) является одной из самых сложных и трудно осуществимых. «Над вопросом о том, возможна ли теория, предметом которой являются не математические доказательства, а способы догадываться о таких доказательствах, открывать математические истины и решать математические задачи, люди бьются еще со времен античной древности. Вопросы этого рода не могут не интересовать «каждого математика, каждого преподавателя математики или обучающего ей».*

---

* Яновская С.А. Предисловие редактора перевода // Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. С. 13.

Основная трудность заключается в том, что поисковая деятельность сама по себе предполагает громадный запас эвристик. В целом такая деятельность, по-видимому, не поддаётся алгоритмизации, подчинению определённым, чётко сформулированным правилам. Тем не менее в результате изучения научной литературы и в ходе наших исследований выяснилось, что в учебном процессе объективно существуют такие моменты, которые позволяют подготовить почву для движения мысли ученика по таким эвристическим «руслам». Причем каждый из этих моментов мы полагаем в значительно большей мере зависящим от уровня визуального восприятия, его подготовленности и организованности, чем это считалось ранее или не предполагалось вообще.

«Интуиция и интеллект являются в равной мере важными и в равной мере необходимыми способностями. Ни одна из них не имеет преимущественного положения в какой-либо человеческой деятельности ... В основе механизма действия интуиции лежит способность воспринимать и понимать общую структуру конфигурации, тогда как интеллект направлен на выяснение особенностей отдельных элементов, явлений или событий ... Интуиция и интеллект действуют не порознь, а почти всегда кооперативно. Если в процессе обучения мы пренебрегаем одной способностью в пользу другой или сознательно держим их на расстоянии друг от друга, то мы попросту калечим головы тем ученикам, которых призваны учить и воспитывать»*.

* Арнхейм Р. Двойственная природа разума: интуиция и интеллект. М.: Прометей, 1994. С. 41.

Обратимся к возможному решению следующих вопросов:

— что должен искать учащийся в предъявленной ему знаковой математической информации;

— где и как может учащийся отыскивать ориентиры и подсказки в её содержании;

— каким образом учащийся может обнаружить в визуальной информации скрытые, недостающие данные;

— какие средства и приёмы служат образованию навыков поиска.

Наблюдения, ориентиры и подсказки

Ученик начинает решать задачу. С заданием стандартного характера, оформленного знакомым образом, он обычно «справляется» вполне удовлетворительно. Если же условие чем-либо отличается от привычных, то решение замедляется. Для того чтобы догадаться, как решать задачу, нужно уметь «хорошо видеть». Например, определять общее и различное, группировать объекты по определённым признакам, определять «стержневой» стандарт и т.д. Если не удаётся составить мысленный план решения задачи, «живое созерцание» как бы ограничивается этапами: анализ визуальной информации и распознавание стандарта. Далее следует поиск выхода из создавшегося тупика. Таким образом, решение достаточно сложной для ученика математической задачи мы можем рассматривать как бы в двух «плоскостях» — наблюдение и визуальный поиск.

Наблюдение — это результат взаимодействия двух первых этапов работы «живого созерцания» в процессе восприятия и переоформления данной информации. Оно позволяет обнаружить ориентир. Под **ориентиром** учебной знаковой информации мы понимаем то визуально наблюдаемое свойство— особенность объектов или структуры блоков информации, которые дают возможность осознать, понять и принять подсказку. Ориентирами могут быть одинаковые элементы, ярко выраженные формульные или геометрические стандарты, словесные комментарии, наименования, сама «архитектура» связей между фрагментами информационного сообщения.

Пример 1. Вычислить:

$$\frac{2^{19}\times 27^{3}+15\times 4^{9}\times 9^{4}}{6^{9}\times 2^{10}+12^{10}}$$

Зрительно анализируя компоненты числовой конструкции, выявляем «общее» —степени с основаниями 2 и 3, что позволяют без труда прийти к искомому ответу (рис. 1).

Для сопоставления обратимся к задаче геометрического характера.

Пример 2. На рис. 2 изображён параллелограмм. Определить величины отмеченных на нём углов.

На рис. 2б показаны главные ориентиры: противоположные углы параллелограмма (вверху), углы при основаниях равнобедренных треугольников (в центре) и накрест лежащие углы при двух параллельных прямых, пересечённых третьей (внизу). Рис.2в визуально реализует результат процесса свёртывания.

Обратим внимание на важное обстоятельство, столь характерное для предметов математического цикла. Каждую новую теорему учебника обычно сопровождает «директива» учителя: «Выучить формулировку и доказательство теоремы №...». Ученик, занимаясь по одному из рекомендованных учебных пособий, усваивает не только само содержание, но и все особенности изложения (порядок слов, их соподчинение, обозначения и т. п.), принимая часто именно их за основу. Подобные тексты выступают как отдельные самостоятельные фрагменты учебной теории, психологически обусловливая дискретность восприятия текста в целом. Непрерывность в осознании идей и методов формируется в лучшем случае при обобщении, обзорном повторении.

Таким образом, теоретическая часть курса выделяется из всей массы учебного материала в некоторую особую подсистему. Она изолируется от прочих видов учебной математической информации (задач, упражнений, вопросов и проблемных ситуаций) не только по своему способу предъявления, но и по целям, принципам их реализации.

Процесс познания при изучении теорем вынуждено строится по-иному, нежели вся основная учебная деятельность. Тем самым как бы намеренно организуется разрыв между теорией и практикой. Требование думать, наблюдать, искать, проявлять самостоятельность ослабляется или вообще исчезает при введении теоретических положений курса. Теоремы предлагаются для принятия к сведению, без включения активного мыслительного действия, без поисков, ошибок, нахождения выходов из тупиковых ситуаций. Есть готовый текст и нужно лишь разобраться (если сможешь!) и выучить, что записано в учебниках или тетрадях. Перенесение содержания учебника на монитор (без учёта работы визуального восприятия текста, рисунка и формулы) сохранит (и даже усугубит) все перечисленные здесь и выше трудности работы ученика.

Визуальные задачи, т.е. задачи, исходной посылкой которых является рисунок, содержат в себе громадный запас возможностей. Среди них мы особо выделяем возможность вводить теоретический материал курса в ситуации визуального поиска. Тем самым у учащихся появится стимул участвовать в «открытии» нового.

«Докажите, глядя на рисунок, что ...» —это задача на доказательство утверждения или вывод формулы. Формирование навыков проведения доказательных рассуждений возможно с помощью серии таких заданий, выстроенных в порядке возрастания сложности (рис.3).

Рисунок (формула или текст) в данных задачах даёт все необходимые подсказки для успешной поисковой деятельности ученика. Такой рисунок лучше перенести в тетрадь и преобразовать его так, чтобы стал *очевиден* ход рассуждений.

Отыскать ориентир в условии задачи «с изюминкой» иногда довольно непросто. Нужна соответствующая техника и привычка к таким поискам. В условиях, записанных в виде формул, ориентирами могут быть закономерности, связывающие числовые данные, формулы сокращённого умножения, символы элементарных функций и т.д. В геометрических задачах ими чаще всего оказываются наиболее известные геометрические фигуры (рис.4).

Ученик может решать такую задачу самостоятельно, принимать участие в коллективных поисках, обдумывать различные предлагаемые варианты преобразований рисунка (текста или формулы). Каждое подобное преобразование полезно пояснять формулами (формулой или текстом).

В случае затруднений можно обратиться к соответствующей информационной схеме или определённой странице информационной тетради, получить помощь в разделе «HELP» программы.

Задания очередной иллюстрации (рис. 5) оформлены так, чтобы учащиеся восприняли алгоритм:

— осуществить перевод текста в формулу или картинку;

— составить соответствующую визуальную задачу;

— решить эту задачу.

Покажем на примере урока 8-го класса, как можно организовать наблюдения учащихся в ходе построения определённого теоретического положения.

Цель урока «Основное тригонометрическое тождество» —ученикам надо самостоятельно сформулировать и доказать одно из важнейших положений тригонометрии.

Урок состоит из трёх этапов. На первом ученики вспоминают и обобщают известные им определения sin$a$ и cos a и находят значения выражений с синусом и косинусом для треугольников различного вида (рис. 6, серии 1–4)

Кроме этого, устанавливается связь между синусом и косинусом одного и того же угла. Таким образом, происходит переход к главному вопросу урока— основному тригонометрическому тождеству.

Обычно учитель доказывает у доски, ученики повторяют готовое доказательство на местах в своих тетрадях. Здесь же учебный процесс формируется нетрадиционно. Работа с тренажёром позволяет учащимся самостоятельно доказать, что $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ и убедиться, что это равенство справедливо для любого угла a.

Отсюда естественным образом возникает вопрос: «Справедливо ли это равенство для углов произвольного треугольника?» Далее предлагается тест (рис. 7, сверху), который позволяет быстро проверить усвоение полученных знаний.

Третий этап урока позволяет сделать акцент на тригонометрическом тождестве. Серия 7 «показывает» возможность применения тождества для упрощения выражений (рис. 7, слева). Материал серии 8 позволит продолжить начатую работу на следующих уроках при изучении дальнейшего материала (рис. 7, справа).

Формирование догадки

Ориентир позволяет перейти к формированию догадки. Под догадкой мы понимаем «сообразительность, способность улавливать существо дела»*. Догадка есть необходимая, но, к сожалению, почти неразвитая у большинства учащихся способность мышления. Догадываться ученик может в ходе поиска или конструирования одинакового преобразования отдельных блоков информации к знакомым стандартам. Чтобы помочь ученику догадаться, преподаватель должен постоянно «наводить» его на размышления: «Что особенного есть в данном выражении, рисунке, тексте? Из-за чего я не могу решить эту задачу?»

* Пинкер И. Предисловие к русскому изданию книги//Распознавание образов. М.: Мир, 1970. С. 145.

Приведём пример из практики автора. При решении задачи «Вычислить $\sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a} \times \sqrt[16]{a} \times \ldots \times \sqrt[512]{a}$» большинство учеников оказалось в затруднении. Выяснилось, что их сбивало с толку количество радикалов. Как только это обстоятельство было сформулировано, сразу кто-то догадался: подсказка в последовательном удвоении показателей степеней. Однако, что делать дальше, опять никто не знал. Тогда был применён приём сужения диапазона поиска.

Начали с расшифровки «$\sqrt{a} = a^{1/2}$». Постепенно наращивая массив данных, составили серию, которая позволила угадать ответ (рис. 8).

Таким образом, ориентиры и подсказки образуют одинаковые элементы и знакомые стандарты, а догадку следует искать в том особенном, что существенно отличает предъявляемую информацию от другой. Причём когда данных слишком много, догадку можно наметить, уменьшив объём информации, т.е. преобразовав её исходную структуру к визуально воспринимаемому объекту.

«Паузы» на уроке в ожидании догадки учащихся неизбежны. Но в целом реакция может быть столь значительной, что вполне окупит «потерю времени». Подобные групповые поиски, несмотря на сложность их осуществления и большое напряжение, увлекают учеников. Их активность и интерес заметно повышаются от урока к уроку. Более того, при отдельных сходных (даже не всегда явно определяемых на первый взгляд) моментах в классе найдётся ученик, который, вспомнив аналог, задаёт направление поиска. Яркий необычный пример, специальное, визуально ясное оформление его решения всплывут в памяти, помогут учащемуся в нужный момент ввести такой аналог при решении достаточно сложной задачи.

Приведём ещё один пример. Предлагается вычислить значение выражения $\lg tg 1° + \lg tg 2° + \lg tg 3° + \ldots + \lg tg 89°$.

Предварительно вспомним «секрет» известной задачи: «Вычислить устно сумму чисел от единицы до ста» (рис. 9, сверху).

Теперь применим эту модель для реализации предшествующего задания. Для начала учтём явно заданное преобразование (рис. 9 а). Затем приступим к определению ориентира — проведём поиск одинакового и соответствующих стандартов (рис. 9 б). Чтобы «получить» одинаковые элементы, нужно перевести $tg(90° - a)$ в $ctg\ a$ (рис. 9 в). На этом процесс практически завершён.

В знаковой информации подсказкой может стать специальная раскраска или штриховка рисунка, выделение жирным шрифтом или специальное расположение элементов формулы. В тексте подсказкой может оказаться слово, являющееся эпитетом или синонимом (рис. 10).

Поиск скрытой информации

Вербальные и формульные фрагменты, описывающие какое-либо условие учебной задачи, не всегда облегчают понимание её содержания. Затруднения обычно связаны с «недосказанностью», с недостаточной полнотой (для учащегося!) ее данных. Такие задачи предусматривают получение дополнительных сведений, основанных на знании соответствующих фрагментов теории. Тупик можно преодолеть, если в процесс решения задачи вводить зрительные образы и формульные стандарты, которые предусмотрены её условием, но не выведены.

Визуальный поиск (или просто поиск) — это процесс образования новых образов, новых визуальных форм, несущих конкретную визуально-логическую нагрузку и делающих видимым значение искомого объекта или его свойства. Отправными моментами и точками опоры такого процесса являются готовые, известные учащемуся визуальные образы, структура и элементы информации, визуально обозримые связи между ними. Поясним это примером.

Задача. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а периметр —p. Найти площадь треугольника.

Допустим, что учащийся осуществил визуальный перевод (рис. 11). Он рассуждает: треугольник прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора имеем: $x^2 + y^1 = a^1$. Периметр p равен $x + y + a$. Площадь данного треугольника вычисляется по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2} x \times y$$

Таким образом, ученик записал задачу в виде формулы

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \alpha^2 \\ x + y + \alpha = p \\ S_\Delta = \frac{1}{2} x \times y \end{array}\right\} \Rightarrow S_\Delta = ?$$

Ясно, что неизвестными на самом деле являются x и y. Как их найти? «Живое созерцание» не помогает, задача что-то «прячет», скрывает от ученика. В подобных случаях нужно «призвать на помощь» неявно заданную информацию. Объединим элементы, содержащие неизвестные x и y, и посмотрим, где они могут встретиться одновременно (т.е. отыщем подходящий формульный стандарт). Выражения $x^2 + y^2$, $x + y$, $x \times y$ входят в формулу квадрата суммы. Это и есть та скрытая информация, которая позволит получить ответ на вопрос.

Перейдём к непосредственному обсуждению данной проблемы. Начнем с вопроса: какие явные и какие скрытые сведения может извлечь учащийся из недостаточно полной для него информации. То, что ученик видит, понимает и может перевести в картинку или формулу — это явная для него информация. Таким образом, под **явно заданной информацией** будем понимать такие данные исходного информационного сообщения, которые непосредственно воспринимаются (извлекаются зрением —*«Durch das Augen in den Sinn»* —передаются в смысл). Сюда же относятся те результаты переоформления, которые либо заложены в соответствующих известных ученику основных визуальных или формульных образах, либо содержатся в чётко установленных, хорошо знакомых ему отношениях между ними. Распознавание явно заданной информации может быть осуществлено мысленным либо письменным представлением и оформлением данных.

К **неявно заданным информационным сообщениям** (фрагментам исходной информации) отнесём те, которые непосредственно зрением не воспринимаются. Они требуют разделения информации на блоки, обсуждения следствий из определений объектов, их свойств или связей между ними. Последние чаще всего входят в список обязательных знаний и с помощью различных информационных схем могут восстанавливаться достаточно быстро.

Разумеется, для подготовленных учащихся подобные условия сразу выступают как явные. Дело учителя заранее или в ходе урока регистрировать «круг» скрытого для большинства учеников, направить их на поиск известных, но не выведенных в нужный момент сознанием необходимых отношений, организовать извлечение стандартов из памяти, задавая подходящие вопросы. Деление информационных сообщений на явно и неявно заданные весьма условно. Если учащийся хорошо усвоил перевод, например, текстовой информации в формулу, то все данные для него «открыты» — выступают как явные. Если нет — требуется поиск необходимых сведений, недоступных непосредственному восприятию.

Задача. На расстоянии 3 см от центра шара проведено сечение площадью $16\pi\ см^2$. Найти объём шара.

Построим схематический чертеж (рис. 12 а) и проведём анализ имеющейся вербальной информации. Искомое — объём шара, который вычисляется по формуле $V = \pi R^3$ см^3. Следовательно, надо найти радиус шара R. Это явная информация (рис. 12 б). Следующая информация: «проведено сечение» означает, что построенная на чертеже фигура есть окружность с площадью $S = \pi r^2$. Эта окружность имеет свой радиус *r*, который мы также внесём в нашу визуальную модель (рис. 12 в).

Теперь решение очевидно: обнаруживается замечательный стандартный образ —прямоугольный треугольник со сторонами 3 и 4, гипотенуза которого (т.е. радиус шара) равна 5. Отсюда

$V = \pi 5^3$ см^3.

Чрезвычайно полезны текстовые альтернативные задачи, которых, к сожалению, недостаточно «в арсенале» учителя математики (рис. 13).

«Задача о тросе и мачте»—это математический парафраз знаменитого указа одной из русских императриц: «Казнить нельзя помиловать». Пропущенная запятая создает альтернативу, разрешить которую можно только, если вдуматься в смысл вопроса задачи. Ясно, что подобные примеры редки, но тем более высока их ценность.

Перевод информации с одного языка на другой как бы заново формирует очередную задачу, вытекающую из исходной. Факты, о которых «умалчивает» первоначальный текст или формула, выведены и дальнейшие действия определяются использованием явной и поиском скрытой заданной информации уже на новом, более обозримом материале. Мы как бы начинаем решать новую задачу. Благодаря последовательному анализу и соответствующим преобразованиям часто удаётся сузить диапазон поиска, свести процесс к обнаружению «элементарного основания» искомого вопроса.

Выявление скрытой информации имеет особое значение для решения геометрических задач. Вербальная информация, обычно описывающая их условия, не всегда способствует обнаружению ориентиров, а иногда даже тормозит восприятие подсказки. При решении таких задач часто приходится осуществлять дополнительные построения, чтобы необходимые сведения оказались визуально обозримы.

Важность формирования навыков выявления дополнительных данных информационных сообщений диктуется не только потребностями получения математического образования. Умения расшифровывать, раскрывать, дополнять вербальные, формульные или геометрические структуры могут стать инструментом при изучении других общеобразовательных дисциплин.

Визуальный план решения задачи

Приступим к описанию очередной «параллели» между «живым созерцанием» и визуальным поиском. Мысленному составлению плана работы мы соотнесем визуальный (письменный или устный) план решения задачи. Подобный план рождается также в ходе наблюдений, экспериментов, определяющих отдельные этапы визуального поиска. Главное на этом этапе — отделить существенное от несущественного.

Выявление существенного в условии задачи чаще всего строится на определении зависимости между переменными и параметрами. Имеются две возможности: либо числовые значения параметров вообще не влияют на структуру связей, либо определённое числовое значение какого-либо параметра является решающим фактором. В первом случае существенной является сама структура зависимости между отдельными блоками информационного сообщения. Подобная структура визуально и логически воспринимаема (обозрима). Во втором— структура ограничена действием параметра, причём последний обычно влечёт за собой неявно заданные дополнения. Рассмотрим примеры.

На рисунке 14 представлена текстовая задача, к условиям который приложен рисунок-подсказка, «обнажающий» структуру заложенной в тексте информации. Обозримость подобной структуры помогает найти ответ на искомые вопросы. Если же подобные подсказки отсутствуют, то информация, сосредоточенная в них, является для большинства учеников скрытой, неявной. От того, насколько прочно сформирован навык перевода таких задач в рисунок или формулу, и зависит успешность их решения. Рассмотрим несложный пример.

Задача. Дана прямая $by - ax - c = 0$. Определить угловой коэффициент другой прямой, если известно, что:

а) прямые параллельны;

б) прямые перпендикулярны.

Что существенно, например, для решения вопроса а)?

Представив параллельные прямые, приходим к выводу: угловые коэффициенты таких прямых должны совпадать. Для численных значений их следует учесть лишь одно требование: $b \neq 0$. Во втором случае б) структура связей между прямыми гораздо сложнее, в уме её представить трудно, поэтому придётся прибегнуть к наблюдениям.

Последний этап — решение данной задачи в ситуации поиска так, как если бы учащийся забыл многое из того, что ему полагается знать по этому материалу (рис. 15).

Учащиеся осуществляют перевод (рис. 15 а, б)

Они начинают думать.

— Что требуется найти? (Угловые коэффициенты неизвестных прямых.)

— Где их можно найти? (В формуле прямой с угловым коэффициентом.)

— Когда мы сумеем вычислить нужные «k»? (Когда определим, как отражается характер связей между прямыми на значениях этого параметра). Следовательно, необходимо разобраться в этом характере связей между прямыми в каждом отдельном случае.)

Таким образом, мы выявляем существенное — главным являются не конкретные значения параметров, а связи между теми объектами, которые порождают их.

Далее следует второй «виток цикла».

— Что характеризует связи между парами прямых? (Углы их наклона.) Отсюда сразу ответ на первый вопрос задачи: $k_1 = k_2$ (рис. 15а).

Ученики продолжают поиск. На рисунке 15 б структура связи между прямыми принципиально иная. Необходимо найти дополнительные сведения —скрытые от глаз условия. Следовательно, рисунок 15 б, в придется преобразовать, дополнить так, чтобы эти условия оказались выведенными наружу.

— Когда мы сможем разгадать «секрет» задачи? (Когда найдем ориентир.)

— Где искать его? (Как обычно, в одинаковом или стандартах.) Поиск «одинакового» приводит к рисунку 15в, позволяющему перевести результаты наблюдений в формулу:

$$k_2 = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{1}{k_1}$$

Теперь продемонстрируем этот процесс на конкретном примере.

Задача. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, если эта прямая проходит через точки (1; 2) и (3; 6).

Проведём рассуждения, опираясь на «живое созерцание» учащихся. Визуальный перевод текста даёт рис.16.

Восстановив формульный стандарт — уравнение прямой с угловым коэффициентом, приходим к выводу, что значения абсцисс и ординат точек, через которые проходит прямая, несущественны. Ими могли оказаться любые другие точки данной прямой.

Все основополагающие моменты условия обозначены на чертеже. Теперь «рассортируем» совокупность данных так, как показано на рисунке 17 (внизу). (Кружочками обведены символы объектов, получение значений которых и есть цель решения.)

Остановимся ещё на одном случае и *покажем на иллюстрации*, как можно организовать наблюдения, отыскивая ориентиры и подсказки в материале формульной информации.

Задача. Разложить на множители: $x - 3\sqrt{xy} + 2y; (x, y \geq 0)$.

Данная задача относится к разряду сложных — путь её решения совсем не очевиден. Здесь подсказка кроется в самом условии задачи —разложение выражения на множители подразумевает наличие одинаковых элементов, объединив которые, можно получить искомый результат (рис. 18).

Такие поиски позволяют ученику понять, что он может самостоятельно разобраться в трудной или непривычной для него задаче, если будет ставить (сам себе) вопросы и искать на них ответы.

Как мы уже отмечали, во многих случаях помогает прием отыскания одинаковых элементов. При этом становится возможным выявить в качестве подсказок некоторые формульные или геометрические стандарты. Практика показывает, что демонстрация не только собственно решения задачи, но и возможного «подхода к ней» весьма интересует учащихся. Но, кроме того, каждому полезно понять, каким образом мыслит преподаватель, откуда он берёт «подсказки», как строит модель для аналогичных мыслительных действий.

Поисковые задачи

Задания для индивидуальной работы («Оформите серию») начинаются с элементарных шагов — действий по образцу — и подводят учащихся к самостоятельным обобщениям. Приведём пример, позволяющий учащимся накапливать опыт в ходе индивидуальных «экспериментов» (рис. 19).

Первая таблица позволяет сопоставить собственные вычисления с готовыми результатами, вторая —предлагает продолжить подобные вычисления строго по порядку возрастания степеней. Третье задание несколько «сбивает» этот порядок и заставляет сделать первые наблюдения и сопоставления с результатами предыдущих таблиц. В таблице 4 надо сделать определённые выводы, иначе вычисления займут слишком много времени. Завершая эксперименты со степенями мнимой единицы, следует решать примеры таблицы 5, в которой имеются обобщения и соответствующий алгоритм.

Заполняя таблицы данной серии, учащийся может самостоятельно вывести соответствующий закон, а учитель определить моменты «неудачи обучения». Кроме этого, можно определить:

— формально или нет относится учащийся к выполнению заданий;

— насколько высока утомляемость учащегося при осуществлении однотипных, но постепенно усложняющихся операций;

— любит ли учащийся «докапываться» до результатов, делать свои маленькие открытия.

Роль поисковой серии может выполнять и один пример. Так, получение результата в задании «Решить уравнение $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x)))=$ » связано с серией преобразований, основанных на едином визуальном действии (рис. 20).

В результате ученик, узнав (увидев), как и на что нужно смотреть, что и как можно делать, в силах устно решить несложный пример типа «Найти решение уравнения $\log_4\log_2\log_2 x = 0$». Это объясняется тем, что обычно процесс абстрагирования связан не только с опознанием некоторого формульного стандарта, являющегося ключом к решению задачи — столь же активно работает сопоставление.

Наблюдения позволяют установить необходимые параллели. Например, серии, подобные приведённой выше, помогают процессу свёртывания. Получив необходимый визуальный опыт, учащийся может приступать к самостоятельному решению задач типа: «Доказать $3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ ». Решение представлено на рис. 21.

Трансформация визуального образа (рисунка или формулы), по нашему мнению, является одной из самых сложных мыслительных операций. Для того чтобы умения и навыки таких преобразований формировались более или менее естественным образом, необходимо постоянно «поддерживать» такой процесс.

Визуальные задачи представляют собой богатейший материал для образования групповых поисковых ситуаций. При усвоении навыков визуального поиска учебным группам под силу не только использование готовых информационных схем, но и их составление, что позволяет активизировать самостоятельность учащихся, «разбудить» их зрение и мозг, увлечь процессом познания.

Мы глубоко убеждены, что точка зрения, утверждающая, что «открывать» новое в математике для ученика труднее, чем заучивать готовое, ошибочна. Разрабатывая различные приёмы визуализации доказательных рассуждений, демонстрируя с их помощью возможный ход мысли в поиске ответа на вопрос, мы «раздвигаем рамки» интеллектуальных возможностей ученика, готовим его к активному поиску ответов на вопросы, которые могут возникнуть в его дальнейшей профессиональной деятельности.

Организация поисковой деятельности учащихся

Желание искать и способность находить решение учебной задачи у многих учащихся совсем отсутствует не потому, что это свойственно только способным (или даже самым способным из них). Процесс обучения в школе по многим причинам гасит желание попробовать свои силы в решении трудных примеров и задач. Они не только не под силу многим учащимся, но, что гораздо хуже, неинтересны им. По нашему мнению, в первую очередь мы должны восстановить дар, данный человеку от природы — здоровую любознательность и веру в свои познавательные силы (при том что восстановление утраченного идёт значительно труднее, чем первоначальное формирование). Затем это окупится приобретением ценных качеств: желанием разбираться в трудных ситуациях и умением выходить из тупика. Мы не должны полагаться только на интеллект ученика, следует активизировать его визуальное мышление, которое (в совокупности с логикой) и может дать желаемый результат.

Ситуации группового поиска

Ситуации визуального поиска можно организовать не только при анализе локального факта теории или решения конкретной учебной задачи. Доступные учащимся логические и визуальные умозаключения могут привести к конструированию информационной схемы.

В качестве иллюстрации мы избрали тему «Преобразования графиков функций». Излагаемая ниже схема действий достаточно проста:

1. В формулах типа $Af(x)$ $f(kx)$ $f(x+p)$, $f(x)$ + B анализируется положение параметра в их структуре.

2. В ситуациях визуального поиска моделируются возможные случаи изменения графика функции $f(x)$ и строится определённая гипотеза о характере таких изменений.

3. Осуществляется проверка высказанного утверждения и устанавливается вывод.

В качестве примера возьмём построение графика функции $f(x+p)$. Для других случаев ограничимся лишь необходимыми замечаниями и полезными указаниями, позволяющими (с учётом результатов разрабатываемого образца) строить и разрешать аналогичные проблемные ситуации.

а) Постановка задачи и анализ её условия

Задача. По исходному графику $f(x)$ построить график $f(x+p)$.

Мы не просто должны решить традиционную учебную задачу, а осуществить поиск общего алгоритма решения всего класса задач определённого типа. Поскольку в формуле $f(x + p)$ число p соединяется знаком «плюс» с переменной x, то изменяться должна именно эта переменная. При этом следует учесть две возможности для p: $p > 0$ или $p < 0$ (так как при $p = 0$: $f(x + p) = f(x)$.

б) Построение гипотезы

Ясно, что при переходе от графика функции $f(x)$ к графику $f(x + p)$ обязательны изменения. На первый взгляд возможен параллельный перенос стандарта по оси X вправо на заданное число p. Отметим, что данное предположение в настоящий момент не проверяется, а лишь высказывается как некоторая интуитивная догадка.

в) Моделирование ситуации

Продемонстрируем «ход событий» на примере одной из самых известных учащимся функций $y = x^2$. Для этого стандарта может быть составлена индивидуальная задача: «По графику функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x + 2)^2$. Примем как гипотезу, что график функции $y = (x + 2)^2$ может быть построен переносом параболы вдоль оси абсцисс на две единицы вправо. Осуществим проверку. Составив таблицу значений функций $y = x^2$ и $y = (x+2)^2$ в нескольких точках, построим чертеж (рис. 22).

Гипотеза неверна — сдвиг графика исходной функции произошёл в обратном направлении. Остается принять — параметр р в задании $f(x + p)$ означает параллельный перенос стандарта $f(x)$ вдоль оси аргумента на p единиц влево. Полезно предложить учащимся построить графики функций типа 2^{x+1}, $\cos(x-\pi/2)$, предоставив им самим убедиться в правильности общего вывода.

Учащиеся должны как можно больше «открывать, а не принимать на веру то, что им сообщает учитель или написано в учебнике. Учебные эксперименты (маленькие научные опыты) более необходимы, чем конкретные готовые знания (рис. 23).

По мнению В. Серве, «математика является меньше знанием, чем умением»*. Такие умения приобретаются в ходе опыта, наблюдений и анализа их результатов. Важно «развивать свойства ума и характера, связанные с навыками к... строгой целеустремлённой дисциплине, к выражению на различных языках (языке общения, фигур, формул и графиков), со схематической мыслью, сжатой и чёткой».

---

* Серве В. Преподавание математики в средней школе. М., 1957.С. 24.

Разумеется, предлагаемый подход к продемонстрированной выше проблеме строгим не назовешь. Но он достаточно образен и вполне приемлем для усвоения учащимися с различными уровнями подготовки и восприятия. Такой способ анализа учебной знаковой информации позволяет ученикам проявлять необходимую самостоятельность. Тем более что образованию каждой из команд формируемого алгоритма предшествуют догадки и гипотезы, сопутствуют проверка на истинность. Всё это обеспечивает необходимую мыслительную активность обучения, вырабатывает уверенность в собственных возможностях.

г) Обобщение и свертывание

После составления предписаний для каждого из случаев ($Af(x)$, $f(kx)$, $f(x + p)$, $f(x)$ + B) естественно перейти к оформлению общего алгоритма в виде информационной схемы, которая представлена на рисунке 24. Эта схема сочетает необходимую словесную интерпретацию каждого из параметров с указаниями-ориентирами: влево, вправо, вверх, растяжение и т.д. Итак, поставив проблему— нахождение алгоритма преобразования графиков функций, мы сначала уменьшили диапазон поиска, рассмотрев случай преобразования графика $f(x)$ в график $f(x +1)$. Получив нужный результат и проведя аналогичные «испытания», мы пришли к информационной схеме, описывающей геометрический смысл всех параметров функции $Af(kx + p)$ + B.

Следующим этапом развития данного алгоритма может стать свертывание операций параллельного переноса вдоль осей OX и OY. Эти действия теперь объединены в одно: центр (0; 0) перенесем в точку ($-p/k$; B). В результате все сводится к несложному перечню визуально обозримых операций:

1. Приведи формулу функции к виду $Af(kx+p)+B$.

2. Перенеси начало координат в точку ($-p/k$; B) и продолжай все остальные построения в новой системе координат.

3. Восстанови график стандарта с его «направляющими прямоугольниками» .

4. По заданию функции $y = Af(kx)$ произведи деформацию направляющих прямоугольников и построй график искомой функции (рис.25).

В таком случае информационная схема «Влияние параметров на преобразование графика функции при A > 0 и $k > 0$ » приобретает иную структуру. Новый справочник самым явным образом отражает свёртывание общего алгоритма.

Самым ценным, на наш взгляд, является то, что в результате подобных исследований, учащиеся приобретают способность ориентироваться в новых для нас данных опыта. Подчеркнём, однако, что подобную свободу восприятия можно сформировать только при *постоянном, длительном, тщательном* воспитании живого созерцания, сопровождая визуальный поиск переводами. Источником прошлого опыта и ранее приобретённых знаний являются хорошие идеи. В противном случае описываемые приёмы принесут вред, а не пользу — из-за непонимания, слишком быстрого темпа, необычности подхода учащегося может постигнуть очередная неудача обучения.

Распространение метода

Довольно часто очередная «порция» учебного материала воспринимается учащимися как нечто абсолютно новое, не связанное с предыдущим материалом. Знакомыми в таком случае являются общие термины (понятия), незнакомыми — способ оперирования ими в непривычных ситуациях. Процесс «выведения наружу» в их сознании общих закономерностей растягивается, а иногда так и остаётся незавершённым к окончанию школы. Мы полагаем, что специальное внимание к таким закономерностям может значительно повысить продуктивность школьного урока.

Обратимся к алгоритму построения графика дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Для того чтобы использовать общую инструкцию построения графика функции с параметрами, необходимо привести формулу $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ к виду $Af(kx+p)+B$. Тем самым мы заменим громоздкие и длительные геометрические построения быстрыми преобразованиями формулы.

Для начала произведём деление числителя на знаменатель (рис. 26 а) и осуществим необходимые преобразования так, чтобы получить формулу исследуемой функции в виде $Af(kx+p)+B$ (рис. 26 б).

Теперь можно использовать рассмотренные схемы (рис. 25), или схему (рис. 26). Однако для гиперболы операции растяжения (сжатия) по обеим осям весьма трудны. Преобразуя формулу к стандартному виду, максимально сокращаем число геометрических преобразований.

Итак, при данном виде формулы дробно-линейной функции необходимыми являются лишь три операции:

в старой системе — перенос центра координат;

в новой системе — построение графика-стандарта;

деформация по оси Y.

Проиллюстрируем решение на примере построения графика

функции $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$

Решение:

1. Преобразование формулы (рис. 27 а).
2. Анализ формулы (рис. 27 б).
3. Построение графика (рис.27в).

Подведём итоги. Поставив обширную проблему — нахождение алгоритма преобразования графиков функций, мы сначала уменьшили диапазон поиска, рассмотрев случай преобразования графика $f(x)$ в график $f(x + p)$. Получив нужный результат и проведя аналогичные «испытания», мы пришли к информационной схеме, описывающей геометрический смысл всех параметров функции $Af(kx+p)$ + B. Для свёртывания этой схемы в более компактный вариант мы сначала рассмотрели её упрощённую модификацию, которую обеспечили переносом центра координат из точки (0; 0) в точку ($-p/k$; B) . Задавшись целью ещё более упростить построение графика дробно-линейной функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, мы ввели операцию «выделение целой части» и получили схему, по которой весь цикл преобразований этой функции можно реализовать в три этапа:

а) перенос центра координат;

б) построение стандарта типа $y = \pm 1/x$ в новой системе координат;

в) растяжение полученного графика вдоль оси ординат в новой системе.

Всё это мы осуществили в ситуации поиска, основными этапами которого были: сужение диапазона исследования, распространение полученных закономерностей на всю область поиска, и, наконец, конструирование новых, более удобных вариантов для реализации осваиваемого действия. При усвоении навыков визуального поиска учебным группам под силу не только использование готовых информационных схем после освоения определённой темой, но и конструирование их по ходу изучения. Таким образом, текст, рисунок и формула тесно связаны между собой. Рациональное использование принципа разумного равноправия всех трёх языков представления учебной математической информации позволяет упростить трудные преобразования, свернуть громоздкие операции, увидеть общее и различное в применении единого алгоритма в различных ситуациях.

Перенос полученных знаний и умений в новую ситуацию

У многих учащихся желание искать и способность находить решение учебной задачи отсутствует не потому, что они свойственны только способным (или даже очень способным) из них. Процесс обучения в школе по многим причинам «гасит» желание попробовать свои силы в решении трудных примеров и задач. С ними не только не могут справиться многие учащиеся, но, что гораздо хуже, они неинтересны им. В сентябре 1994 года Мировой банк опубликовал проект доклада «Российское образование в переходный период». Эксперты Банка проанализировали результаты тестирования по математике тринадцатилетних школьников из семи стран. Оценка производилась по трём категориям: общее знание фактической информации (А), применение этой информации для решения проблем (Б), использование для новых и ожиданных задач (В). По первому параметру показатели школьников из бывшего Советского Союза, Венгрии и Словении лучше, чем в других странах. Но советские школьники намного хуже используют свои знания в аналитических ситуациях, чем их английские, французские, канадские и израильские сверстники. По нашему мнению, в первую очередь мы должны восстановить дар, данный человеку от природы, — здоровую любознательность и веру в свои познавательные силы. Не надо полагаться только на интеллект ученика, следует активизировать его визуальное мышление, которое (в совокупности с логикой) и может дать желаемый результат.

Описание процесса роста уровня поисковой деятельности учащихся — весьма сложная и трудно осуществимая задача. Это связано с длительностью самого процесса, разнообразием реакций отдельных учеников, неадекватностью проявления результатов в учебных группах с различными уровнями математической подготовки и общего интеллектуального развития.

Этими же трудностями было обусловлено и проведение экспериментов, которые растягивались во времени и слабо поддавались точной экспертной оценке. Чтобы подтвердить соответствующее положение нашей работы, мы предлагаем описание более или менее целостного фрагмента нашей экспериментальной работы, объединённого одним общим сюжетом, представляющим возможность фиксировать определённые приращения умений и навыков учащихся в визуальном поиске решения учебной поисковой задачи.

Предлагаем описание нескольких опытов внедрения идей визуальной методики преподавания математики в сферу профессиональной деятельности учащихся. Поисковые эксперименты в этом направлении велись автором в Мурманском музыкальном училище с 1975 по 1986 год. Не затрагивая эмоциональных и чисто исполнительских вопросов музыкальной теории и практики, мы старались там, где это возможно и насколько возможно, повысить логическую культуру мышления учащихся на доступных им параллелях между музыкальным и математическим материалами. Для того чтобы сложилось более целостное представление о наших поисках в данном направлении, выбран единый, постоянно действующий элемент учебной практики всех отделений музыкального училища — технический зачёт по фортепиано. В него входят: чтение нот с листа, игра гамм, исполнение виртуозного произведения и транспонирование. Эти испытания являются обязательными, проводятся каждый семестр в течение первых трёх лет и представляют особую трудность для первокурсников, не имеющих полной специальной подготовки.

Формирование информационной схемы

Для начала мы обратились к гаммам. Достаточно большой перечень их, состоящий из 48 наименований, затрудняет восприятие и запоминание аппликатурных правил. Поэтому было предложено найти некий принцип разделения всего множества данных объектов на группы, подчиняющиеся общим законам усвоения и исполнения.

В основе понятия «гамма» лежит принцип периодичности— семь ступеней располагаются в определённом порядке в зависимости от рода тональности (мажор или минор) и повторяются, начиная с восьмой. Последовательности этих семи ступеней противопоставляется определённый аппликатурный «стандарт», также действующий периодично, но не синхронно с первым.

Сузив диапазон поиска, мы пришли к мысли, что начинать все исследования надо с наиболее простых, хорошо всем известных гамм — до, ре, ми, соль и ля мажор. Рассмотрим более подробно.

Каждый ученик знает, что самой удобной для игры является гамма ми мажор — аппликатурная «серия» для этой гаммы организуется самой структурой фортепианной октавы (рис. 28). В этой гамме 4-й палец используется в октаве лишь один раз, поэтому его местоположение и было взято в качестве ориентира (рис. 29, сверху).

Мы исследовали остальные тональности и обнаружили: в любой из перечисленных гамм 4-й палец каждый раз попадает на VII ступень (правая рука и на II ступень левая). Причём эта закономерность сохраняется и в одноименных минорных гаммах.

Таким образом, от игры на клавиатуре мы перешли к переводу (переносу) полученных данных на нотный стан — было выведено правило игры десяти гамм (рис. 29, внизу).

Итак, аппликатурный принцип обязательно содержит ориентир, причём это не только конкретный палец, но и его место в общей структуре (здесь — номер ступени).

В результате многочисленных экспериментов (на клавиатуре и нотной бумаге) мы пришли к информационным блокам и для остальных групп гамм (рис. 30).

Итоги отразили в единой информационной схеме (рис. 31).

После этого осталось приобрести навык использования элементов и блоков схемы и заучивать не каждую гамму в отдельности (как это обычно бывает в учебной фортепианной практике), а сразу по 10, 8 и 6 гамм. Таким образом, мы показали, как разрозненные практические сведения можно свести к строго организованной совокупности правил, опираясь на визуальное мышление в ходе визуального поиска.

На примере гамм учащиеся поняли, что методы анализа информации, использование приёмов визуального поиска, создание вспомогательных информационных схем возможно и в их профессиональной деятельности. Мы использовали эту идею для поиска аналогий и построения разнообразных ассоциаций между музыкальными и математическими понятиями.

Приведём ещё один пример.

Transporo (лат.) — переношу, перемещаю. Термин «транспонирование» по смыслу и назначению совпадает с математическим понятием вектора, по исполнению и реализации — с его геометрическим представителем (направленным отрезком). Следовательно, чтобы транспонировать из одной тональности в другую, нужно мысленно перенести нотный рисунок в нужном направлении на заданное расстояние (вверх или вниз на заданный интервал).

Учащиеся отразили на нотных станах этот первый момент (32 а, б) и самостоятельно сделали заключение: необходимо уточнить «область определения» — тональность, внести некоторую корректировку, выставив ключевые знаки (рис. 32 в), и транспонирование завершено.

Мы предложили учащимся решить следующую задачу: в чём может заключаться транспонирование музыкальных отрывков на полтона вверх или вниз?

Сначала кто-то сказал, что «это сыграть трудно». Но потом нашли подсказку: «диез» — это знак повышения на полтона, а «бемоль» — понижения. Следовательно, нужно лишь мысленно выставить знаки альтерации у всех нот музыкального эпизода и играть с учётом этой поправки так, как показывает исходный текст.

Учащиеся способны придумывать неожиданные и необычные аналоги математических понятий. Приведём сокращенный перечень аналогов понятия «вектор», сочинённых ими: секвенция в музыке, канон, правильно написанные нотные диктанты, гаммы на несколько октав, репродукции картины художника, книги одного автора и одного года издания, передвижение транспорта по прямой, работа лебёдки, коллекционные модели автомобиля одной марки и серии, тиражирование, переиздание книги, повторение телепередачи в разное время и в разных местностях и т.д.

Анализ информационных сообщений

Приведём второй пример из практики автора, покажем, как формирование техники перевода вербальной информации может стать инструментом к анализу информационного сообщения гуманитарного характера.

На одном уроке математики было предложено: «Не пользуясь справочной литературой, составить историческую справку о хазарах». Процесс обсуждения начался с вопроса учащихся: «Что такое историческая справка?». Ответ: «Под исторической справкой здесь будем понимать такие сведения: а) когда жили, б) где жили, в) какова численность, г) каков уровень развития, д) чем занимались.

Поиск необходимой информации не составил труда. Все помнили, что слово «хазары» встречается в «Песне о вещем Олеге» А.С. Пушкина. Ответы давались с обязательными обоснованиями (отмечены в скобках):

а) тысячу лет назад (время княжения Олега);

б) южное Приднепровье (Киевская Русь);

в) многочисленные (набеги буйные, значит воевали не умением, а числом);

г) полудикие племена (неразумные хазары);

д) скотоводство и земледелие (села и нивы, набеги — значит были кони).

Таким образом, выяснилось, что учащиеся приобрели и даже закрепили навык анализа и обнаружения неявно заданных сведений в специальных информационных блоках.

Процесс перевода вербальной информации в формулу или картинку, анализ структуры и элементов формальных или визуальных конструкций достаточно перспективен для побуждения учащихся к активной мыслительной деятельности не только в процессе решения задачи, но уже при предъявлении её условия.

В цикле «Картинки с выставки» М.П. Мусоргского есть пьеса «Старый замок». В одном из изданий этого цикла есть постскриптум: «Перед старым обветшалым замком трубадур поет свою песню». Учащиеся должны были так сформулировать вопросы к данному примечанию, чтобы ответы на них дали представление о характере музыки этого произведения (предвидение формы и структуры). Вот эти вопросы:

1. В каких странах имеется много старых замков?
2. Кто такие трубадуры?
3. Какие инструменты применялись для сопровождения пения?
4. О чём пели трубадуры?

Получив ответы на некоторые из них от наиболее эрудированных участников (вопросы 2 и 3), учащиеся смогли достаточно толково и правильно описать характер данного программного произведения, прокомментировать свои догадки при его прослушивании.

Поиск гуманитарных аналогий математических понятий благоприятно влияет на отношение учащихся к предмету «Математика» и к обучению вообще. Выполнение таких упражнений способствует росту их общекультурного уровня, умению выражать мысли вслух, вдумываться в скрытый смысл сказанного или написанного, приводить необходимые образные сравнения, выстраивать доказательные рассуждения, обогащая их разнообразными ассоциациями.

Визуальный анализ знаковой конструкции

Рассмотрим теперь, как анализ структуры блоков и элементов знаковой информации, «живое созерцание» её конструктивных особенностей, отыскание «общего» и «различного» помогает в решении профессиональных задач.

Одна из них излагалась учащимися Мурманского музыкального училища так: «Давайте применим математику, чтобы хорошо читать с листа, быстро и правильно разбирать и запоминать нотный текст».

Основная идея заключалась в следующем. Нотный текст представляет собой определённую знаковую информацию. Следовательно, анализируя его структуру, находя общие и различные «формулы» (пассажи, аккорды и т.д.), можно обнаружить некоторые закономерности, позволяющие выявить основные трудности и составить достаточно четкую программу действий для их ликвидации при изучении нотного текста.

Предварительно были рассмотрены различные задачи, один из примеров которых представлен на рисунке 33.

Выбрали несложный этюд Лемуана (ор. 37 № 20) и договорились, что к очередному занятию каждый принесет свой экземпляр сборника, содержащего это произведение.

<u>Другой пример.</u> Было предложено рассмотреть, а затем записать по памяти алгебраическое выражение (рис. 34 а) .

Это оказалось по силам лишь тем, кто заметил два основных момента: а) общий элемент $\frac{a+b}{a-b}$ и б) основную структуру: $\frac{*m+*n}{*m-*n}$. Тем самым учащиеся были «настроены» на то, чтобы перед тем, как начинать работать с какой-нибудь формулой, разобраться в её конструкции, обнаружить одинаковое и различное, определить главные связи между элементами-блоками, т.е. структуру.

Следующие задачи: «Рассмотрите и воспроизведите по памяти графики» (рис. 33 б, в). Обсуждение результатов дало такие ориентиры для запоминания: графические стандарты, симметрия и периодичность. Вспомнили, что симметрия и периодичность часто встречаются как в этюдах, так и в произведениях полифонического стиля.

Провели аналог: прежде чем разбирать этюды, играя их на инструменте, нужно предварительно проанализировать нотный текст.

Главной отличительной особенностью технических этюдов является ориентирование их текста на усвоение одного из видов фортепианной (инструментальной) техники.

Следовательно, в каждом из них есть своя основная «формула», повторяя которую в предлагаемых нотами вариантах, добиваются нужного результата.

Углубились в созерцание нотного текста (рис. 35).

Определили, на сколько частей по своим техническим задачам можно разделить данный этюд. На это указали пассажи, в первой части предназначенные для исполнения правой рукой, во второй — левой.

Обсуждение и поиск начали с «формулы», определяющей основную техническую задачу:

— Изучению каких навыков игры на рояле посвящён этот этюд? (Гаммаобразным пассажам.)

— Какова основная особенность этих пассажей? (Четыре ноты идут поступенно вниз, затем опять, но начиная уже от нового звука (рис. 36 а.)

— Именно так развивается нотная «линия» во всех тактах первой части? (Только в первых двух тактах, дальше движение вверх.)

— В первых четырёх тактах найдите общее и различное. (В первых двух тактах движение вниз, начиная с сильной доли, а дальше —наоборот.)

— Как именно «наоборот»? (Движение вверх и начало от слабой доли, рис. 36 б).

— Можете ли вы сразу записать по памяти или сыграть на инструменте партию правой руки первых четырёх тактов? (Молчание.)

— Достаточно ли запомнить первые ноты, с которых начинается каждый пассаж в первых двух тактах? (Сразу согласились и запели: фа – ре – си – соль – ми – до – ля – фа.)

— Как эту последовательность нот запомнить? (Начинать от ноты фа третьей октавы и вниз по терциям, рис. 36 в).

— Во время быстрой игры вам некогда будет «вычислять» эти терции. Найдите другой принцип, который согласовывался бы с уже предложенным.

Учащиеся принялись «играть» на столах. Обнаружили, что каждый последующий пассаж начинается «на ступень вверх» от конца предыдущего. Изобразили они это так, как показано на рис. 36 г).

— Проанализируйте движение в следующей паре тактов и обратите внимание на ключевые и случайные знаки.

— Обратите внимание на окончания третьего и четвёртого тактов, разберите мысленно партию левой руки и, закрыв ноты, запишите первые четыре такта по памяти.

Большинство быстро и точно справилось с этой работой. Причём, пока шло письменное оформление, многие успели продемонстрировать игру на инструменте «на память». Характерно, что каждый сначала «примерялся», беззвучно проигрывая над клавиатурой пассажи и по несколько раз повторяя манипуляции левой руки (накопление визуального и тактильного опыта). Дальнейший текст анализировался аналогичным образом, но гораздо быстрее. Без напоминания обратили внимание на сходство и различие обеих частей, на закономерности в партиях правой и левой рук.

В заключение была предложена задача: «Даётся партия правой руки пьесы Бартока «Зеркальное отражение».

Ориентируясь на название произведения, определите, с какой ноты должна начинаться партия левой руки так, чтобы учитывался «принцип зеркала» при игре на фортепиано» (рис.37).

Варианты ответов учащихся представлены на рисунке 37 (справа).

Общие выводы: В начале работы над нотным текстом, в том числе и при «чтении с листа», надо сделать следующее:

1. Разделить его на части и выбрать одну из них для анализа.

2. Этот фрагмент исследовать с позиций «общего», т.е. выявить основную конструктивную «формулу».

3. Определить последовательность таких «формул».

4. Найти её модификации.

Выводы

Учащийся, получив в свое распоряжение некоторую знаковую информацию, воспринимает средства её выражения (символы и рисунки) как некоторые материальные образы. Он начинает образовывать визуальные понятия и может оперировать ими как визуально определяемыми объектами. В связи с этим мы выделили три этапа восприятия и переработки визуальной информации.

Первый из них мы обозначили как анализ её структуры. Ему должны соответствовать два важнейших параметра— нацеленность учащихся на действенное, активное восприятие и специальная организация учебного материала. Большую роль при этом играют специальные способы организации, оформления и подачи учебного материала, которые могут стать опорой в процессе решения учебных задач.

Второй этап связан с созданием новых образов на материале уже имеющейся информации. В связи с этим мы определили необходимость перехода от наивного использования наглядности как средства повышения эффективности урока к формированию визуальных знаковых (математических) понятий, которые по своему объёму, степени обобщённости могут не уступать привычным вербальным понятиям.

Третий этап по своим целям и учебным возможностям мы относим к поисковой деятельности. Любая формула, рисунок или законченный фрагмент текста подразумевают подсказку, помогают составить план работы с ними. Нужно лишь нацелить ученика на обнаружение подсказки, дать инструменты к её извлечению и применению. Опора мышления на визуальные модели, развитие техники зрительного восприятия могут оказать существенное влияние на деятельность учеников.

Решая учебную задачу, учащийся тем или иным образом изменяет, преобразовывает исходные данные. Для правильных действий ему необходимо распознать тот визуальный знаковый стандарт, к которому можно свести задачу. В связи с этим (на основе математического материала) мы выделили три основные стандартные модели, организующие мысль ученика в нужном направлении: изображение основных понятий, визуализация свойств этих понятий и операций над ними и иллюстрации связей между понятиями. Первую (и важнейшую) из моделей мы представили достаточно полно и подробно.

Каждая школьная дисциплина имеет не только определенное содержание, но предполагает и соответствующим образом организованное движение мысли, постигающей это содержание. Реализация —представление, оформление и последовательное изложение— такое «управление» движением мысли осуществляется с помощью трех различных способов — средств её выражения: геометрического, символьного и вербального.

Геометрический или визуальный способ предъявления учебной информации сам по себе обладает свойством наглядности. Благодаря этому роль рисунка при изучении учебной теории и решении практических задач можно значительно повысить. Формульный способ также содержит в себе некоторый запас наглядности. Мы предлагаем расширить, обогатить список символов за счёт знаков, в которых налицо слияние «имени и образа» (слова-термины и мини-рисунки). Вербальный способ трудно поддаётся непосредственному зрительному восприятию. Поэтому здесь необходимы некоторые специфические приёмы: 1) условие перевода фрагментов текста в формулу и рисунок; 2) обогащение словарного запаса, введение понятных терминов, позволяющих воссоздать соответствующий зрительный образ, увидеть и запомнить отличительные, существенные особенности изучаемого понятия.

Под визуальным переводом мы понимаем ту умственную деятельность учащегося, которая осуществляется в ходе восприятия начальных или промежуточных данных информационного сообщения путём расшифровки их с помощью готовых, заранее известных визуальных форм, символических образований или терминов-наименований.

Три языка знаковой учебной информации могут стать «проводником» мысли ученика. Тем не менее взаимозаменяемость вербального, геометрического и формульного способа задания информации с точки зрения визуального восприятия принято нами как относительное, а не безоговорочно абсолютное. Поэтому необходимо учитывать возможные отношения между ними.

Отрабатывая навыки учащихся в решении тех или иных математических или физических задач, выполнении упражнений по русскому языку или биологии и т.д., мы часто не достигаем успеха. Одни успевают в отведённое время усвоить этот навык, другие — нет. Следовательно, нужны такие средства обучения, которые позволили бы каждому учащемуся сформировать необходимое умение. Организация навыков визуального поиска требует специальных средств обучения. На данном этапе из всего массива визуальных задач мы выделяем особую группу — поисковые визуальные задачи. Напомним, что визуальной мы считаем задачу, исходной посылкой которой является некоторый образ. В ходе решения такой задачи образ развивается, приобретает новые формы, направляющие мысленную деятельность ученика так, что из данных визуальной информации он может извлечь ориентиры и подсказки, построить догадку, приводящую к нахождению правильного ответа.

Визуальное представление математических понятий, зрительное восприятие их свойств, связей и отношений между ними позволяют достаточно быстро и наглядно развернуть перед учащимися отдельные фрагменты теории, акцентировать внимание на узловых моментах решения учебной задачи, сформировать и распространить важный алгоритм практических действий, вовлечь полученные знания и приобретённые умения в обсуждение очередных проблем.

Основа любого умения есть понимание. Чтобы понять, нужно знать, что искать, где искать и как искать. Догадка — это «драгоценный камень» в мыслительных сооружениях ученика. Весьма немногие могут самостоятельно её извлечь из условия задачи. Планомерный, постоянный и настойчивый процесс формирования визуального мышления, навыков наблюдений, умения искать подсказку и ориентир может привести к полезным результатам обучения — продуктивной мыслительной деятельности учащегося на школьных уроках.

Учебные задачи различаются по степени сложности решения, возможности проникновения учащегося в существенные моменты их содержания. Простая учебная задача обычно решается в ходе «живого созерцания». Анализируя структуру, сопоставляя отдельные блоки, выявляя общее и различное, учащийся может мысленно составить план работы. Задача «с изюминкой» требует от ученика умения отыскать «ориентир», увидеть подсказку, которая непременно присутствует в ней, но не всегда проявлена.

Задачи более сложной структуры — с недостаточно полным описанием или слишком большим объёмом условий— требуют извлечения дополнительной информации, скрытой от решающего, или определения стандарта, позволяющего «обнажить» существенное для её решения. Для выхода из тупика ученик должен обнаружить скрытую заданную информацию, либо преобразовав её, сузить диапазон поиска с последующим распространением полученных результатов на все данные. В ходе этих операций происходит формирование догадки — важнейшего параметра активной творческой мыслительной деятельности.

Поиск решения математической задачи начинается с наблюдения, в результате которого становятся возможны первые этапы восприятия и переоформления данных. Такое переоформление может осуществляться с помощью перевода, благодаря которому удаётся обнаружить ориентир — тот привычный результат анализа данных, который позволяет выявить существенно общее, присущее отдельным блокам или элементам информационного сообщения. К этой группе следует отнести стандарты формульного или геометрического характера, структуру информационных (логически основополагающих) связей.

Догадка кроется в своеобразии предъявленного информационного сообщения, в том, что отличает его от стандартных, привычных задач. Для того, чтобы догадка пришла как можно скорее, информацию или ее блоки следует представить визуально так, чтобы наружу было выведены все существенные моменты (элементы) текста, рисунка и формулы, составляющие её содержание.

На любом этапе решения задачи имеющуюся информацию можно рассматривать как исходную —явно заданную. Дополнительные условия приводят данные «в состояние готовности» к преобразованиям. Осуществив их, мы получим набор некоторых новых объектов, которые позволяют перейти к очередному этапу. И весь процесс либо начинается заново, если ответ не получен, либо заканчивается, если результат достигнут.

Процесс перевода вербальной информации в формулу или картинку, анализ структуры и элементов формульных, вербальных и визуальных конструкций способствует побуждению учащихся к активной мыслительной деятельности не только в процессе решения задачи, но уже при предъявлении её условия.