Планирование учителем своей деятельности

Башмаков Марк Иванович, академик РАО, директор Института продуктивного обучения СЗО РАО, профессор, доктор физико-математических наук.
Поздняков Сергей Николаевич,**—** директор ЦПО «Информация образования», редактор журнала «Компьютерные инструменты в образовании», доктор педагогических наук, профессор СПбГЭТУ.
Резник Наталья Александровна, доктор педагогических наук, главный специалист Мурманского технического университета.

Целевые установки

Цели, которые стоят перед учителем при организации учебного процесса, образуют достаточно сложную иерархическую систему. На самом верхнем этаже этой системы находятся общие цели школьного образования, сформулированные в тех или иных программных документах. Например, в концепции общего среднего образования, принятой Всесоюзным педагогическим съездом в 1988 году, указывается, что «главная цель средней общеобразовательной школы — способствовать умственному, нравственному, эмоциональному и физическому развитию личности, всемерно раскрывать ее творческие возможности». Таким образом, эта декларация отличается от предыдущей, политизированной, делавшей акцент на подготовке активных строителей коммунистического общества, тем, что ориентирует на развитие личности. По-видимому, не следует преувеличивать ценность таких деклараций для конкретной работы учителя.

Другим уровнем постановки задач может быть описание общих целей обучения конкретному предмету. Например, на XIX международной конференции по народному просвещению, состоявшейся в 1956 году в Женеве, цели преподавания математики в школе были сформулированы следующим образом: «В средней школе следует достигнуть в возможно большей мере воспитательных целей изучения математики, относящихся к интеллектуальной деятельности и формированию характера. Эти цели сводятся к процессам логического мышления, к рациональным качествам мысли и ее выражения, к духу наблюдения, пространственным и количественным представлениям, к интуиции и воображению в абстрактной области, к развитию внимания и способности сосредоточиться, к воспитанию настойчивости и привычки работать упорядоченно и, наконец, к формированию научного духа...»

Можно сравнить приведённую формулировку с общими целями обучения математике, записанными в программе средней общеобразовательной школы, утверждённой Министерством просвещения СССР в 1986 году: «Основная задача обучения математике в общеобразовательной средней школе — обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования».

Приведённые формулировки имеют существенное различие. Первая прямо ориентирована на развитие личности и лучше соответствует современным представлениям об общих задачах школы, чем вторая, которая предполагает «вписывание» индивидуума в «ежедневную жизнь и трудовую деятельность», что более характерно для идеологии человека-винтика, участвующего в построении некоторой общественной системы.

Ценность для учителя формулировок целей предметного обучения по-прежнему состоит в выборе общей ориентации и ещё далека от применения на практике. Соглашаясь, скажем, с необходимостью формирования логического мышления, воспитания рациональных качеств мысли, пространственных и количественных представлений и т.д., учитель ещё не будет располагать главным знанием — в какой пропорции нужно смешать эти различные (прежде всего по тому, какую учебную работу они предполагают) установки при изучении конкретного раздела программы в конкретном классе, с конкретными учащимися.

Таким образом, мы подошли к следующему уровню целеполагания в деятельности учителя, который можно было бы назвать модульным уровнем (в отличие от рассматривавшихся до этого общесистемного и предметного уровней).

Модулем предметного обучения естественно считать тему (раздел) учебной дисциплины, вписывающуюся в общую структуру учебного плана конкретного учебного заведения. Близким подходом к понятию модуля является выбор не столько темы программы (разделение программы на темы часто носит условный характер), сколько выбор содержательной линии обучения. В любом случае учебный модуль — это не только раздел учебной программы, но и выбранная дидактическая система, основное место в которой занимает взаимодействие различных приёмов и способов учебной деятельности, обеспечивающее вхождение этого модуля в целостную систему предметного и общего обучения и воспитания.

При таком подходе создание модуля становится задачей профессионалов — методиста и технолога, а не учителя, если только последний не является автором — создателем учебной программы, новой учебной технологии (или более широкой педагогической системы).

Основная задача учителя-практика, работающего в условиях, когда выбор дидактической системы (учебного плана, программ, технологии и т.д.) уже сделан, с одной стороны, — развивать и применять технологию, необходимую для реализации учебного модуля, а с другой — переводить целеполагание (планирование) на поурочный уровень, учитывающий не только такие параметры, как общее состояние класса (учебной группы), индивидуальные особенности входящих в него учеников, но и свои педагогические особенности и пристрастия, взаимодействие с другими учителями и т.д.

Тем самым, опираясь на выбранную дидактическую систему изучения модуля, учитель должен создать методическое обеспечение, разработать дидактический комплекс — это и является его основной задачей при планировании своей будущей деятельности на уроке.

Сведём вместе основные уровни целеполагания вместе с обеспечением их задач, которые необходимо решить на каждом из них.

Системный → Формулировка общих целей школьного образования
↓
Предметный → Выбор общей орентации (профиль и уровень обучения)
↓
Модульный → Выбор дидактической системы (вклад в реализацию общих целей)
↓
Поурочный → создание методического обеспечения

Выбор профиля и уровня

Работая многие годы по единым программам и учебникам, мы тем не менее понимаем, что выпускники школы поднимаются на разный уровень математического образования и развития. Речь идет, разумеется, не об уровне, определяемом школьной оценкой в аттестате, а о чем-то более глубоком, зависящем от школы и учителя. Разница в школьной оценке существенна в пределах группы учащихся, обучающихся в одной школе или даже у одного учителя. Несмотря на постоянное стремление методистов унифицировать требования к школьной оценке по предмету, пятерка по математике у разных учителей имеет неодинаковый вес, как и её реальное наполнение у выпускников различных школ.

Рассмотрим ряд подходов к определению типа школьного математического образования. Разумеется, в описании этих подходов многое будет зависеть от выбранной терминологии. Чтобы избежать неоднозначного понимания встречающихся терминов, будем пояснять, в каком смысле употребляются те или иные понятия. При этом мы не претендуем на закрепление за этими терминами того смысла, который в них вкладывается в этой работе.

Естественно, что описание различных возможных (и разумных) рубежей в овладении математикой не может быть, на наш взгляд, линейным. Нельзя придумать шкалу и расположить на ней требования к математическому развитию. Применять линейную упорядоченность уровней можно лишь в кругу лиц, имеющих одинаковую и достаточно узкую цель образования.

Процесс обучения математике развивает различные стороны личности человека. Можно пытаться построить шкалу для сравнения уровня развития одной из таких сторон— скажем, развития алгоритмических навыков или логической культуры, но бесперспективно стараться сравнивать между собой уровень логической культуры и визуального, образного мышления, умение безошибочно производить вычисления и строить математические модели.

В то же время, признавая многомерность описания целей математического образования, мы в практической работе (при составлении программ и учебных планов, при написании учебников и т.д.) столкнёмся с тем, что Винер называл «проклятьем размерности», если разумно не ограничим себя выбором двух-трех главных направлений.

Опишем предлагаемую трактовку уровня школьного математического образования, которая приводит к достаточно большому, но обозримому числу вариантов его построения. В качестве направлений, описывающих эту модель, выберем уровень и профиль. (Термин «уровень» будем понимать гораздо более узко, чем раньше, придав ему линейный характер.)

Термин «профиль» обучения получил широкое распространение в практике работы школы. Попытки выделить профили школьного математического образования предпринимались и раньше, особенно в связи с проблемой соединения общеобразовательной и профессиональной подготовки в средних профтехучилищах. Этот вопрос остро встал сейчас в связи с появлением многочисленных «профилированных» школ и классов, созданием учебных заведений нового типа (гимназии, лицеи, колледжи и т.п.), расширением системы «школа — вуз».

Ориентируясь на проблемы массового обучения, мы предлагаем сосредоточить внимание на трёх возможных профилях школьного математического образования — гуманитарном (H), общем (C) и специализированном (M).

Как определяется профиль математического образования? Естественнее всего — через призму целей обучения. Однако этот путь не прост. Во-первых, о целях образования написано слишком много и слишком красиво, поэтому можно «заболтать» сложную проблему и не прийти ни к каким практическим результатам. Во-вторых, мы не уверены в адекватности выдвигаемых целей образования и мотивов выбора учащимся (или его родителями) «профиля» образования. По нашему мнению, различие в профиле обучения математике состоит в различных характеристиках учебной, самостоятельной деятельности ученика.

Деятельность ученика в процессе обучения математике достаточно хорошо проанализирована. Каковы основные её направления, параметры, по которым можно будет провести «профилизацию»? Принятый характер обучения математике в старших классах школы берется нами в качестве основного массового общего профиля. Разумно описывать отклонение от него, а не пытаться сразу отказаться от накопленного с таким трудом опыта преподавания. Как описать деятельность ученика на уроке математики? Ученик работает с математическим текстом (преобразует, решает уравнение, вычисляет, переписывает с доски или пишет под диктовку и т.д.), при этом думает, рассуждает (отвечая активно, слушая учителя, размышляя о решении задачи и т.п.), наконец, он мыслит образами, визуально (представляет себе расположение фигур, делает мысленные преобразования, читает график, строит чертежи и т.п.).

Рискнём дать свою субъективную оценку соотношения этих трёх направлений деятельности ученика в усреднённой обстановке (не принимая во внимание время, в течение которого ученик бездельничает или занимается посторонними делами) — 7:1:2. Главное не в этих абсолютных цифрах, а в тех изменениях, которые надо сделать при переходе от общего профиля к гуманитарному или специализированному. На наш взгляд, от соотношения 7:1:2 для гуманитарного профиля надо перейти к соотношению 2:4:4, а для специализированного — 5:3:2. При этом надо помнить, что переход к гуманитарному профилю будет означать, как правило, сокращение числа учебных часов по математике, а к специализированному — увеличение. Поэтому увеличение, скажем, для гуманитарного профиля доли вербальной — мыслительной деятельности с 10 до 40% на фоне сокращения вдвое часов приведёт лишь к удвоению отводимого на эту работу времени.

Заметим, что гуманитарный профиль обучения математике не обязательно должен вписываться в общий гуманитарный профиль образования. Иными словами, он может быть выбран не только для «исторических», «филологических» и других классов с гуманитарной специализацией. Конечно, гуманитарный профиль в большей степени ориентирован на тех, кому в дальнейшем математика будет не нужна, для них регулярные занятия этим предметом завершаются в школе, но он ни в коем случае не является ущербным. Более того, за счёт второго параметра, к обсуждению которого мы сейчас и переходим, он может привести к весьма высокому качеству математического развития.

Для второго направления сохраним привычный термин — уровень, предлагая три его градации: базисный (1), основной (2) и углублённый (3).

Какие параметры позволяют различить предлагаемые уровни? Прежде всего это перечисление объёма основных знаний, раскрытие содержания предмета. Здесь можно опереться на большую работу, проделанную при определении базисного уровня среднего математического образования, планируемых минимальных результатов обучения.

Другой параметр, по которому несложно провести линейную градацию уровня, — это выбор списка основных алгоритмов. Успешность обучения математике мы привыкли оценивать прежде всего по тому, насколько свободно ученик овладел основными способами решения типовых задач. Ограничить или расширить список таких задач можно при определении уровня программы по математике.

Наконец, последний параметр связан с задачами поискового, творческого характера. Этот параметр может проявляться при включении в программу задач на исследования, проведении лабораторных работ, при использовании математических моделей и приложений.

Таким образом, наша двумерная модель типов обучения математике, имея две оси отсчёта (профиль и уровень) и по три позиции на каждой из осей (гуманитарный, основной или специализированный профили, базисный, основной или углубленный уровни) формально приводит к девяти вариантам программ по математике для старших классов средней школы (включая средние профтех-училища и, возможно, часть техникумов). Крайний случай M_1 (специализированный профиль на базисном уровне) следует, вероятно, из рассмотрения исключить. Получится схема из восьми возможных программ.

В центре таблицы находится программа C_2 , примерно соответствующая действующей стандартной программе. Программу M_3 можно было бы отождествить с действующей программой для математических школ. Разработка программ и учебников для других типов обучения — дело будущего.

	M_2	M_3
C_1	C_2	C_3
H_1	H_2	H_3

Кроме того, отметим, что один и тот же учебник может реализовать несколько типов обучения. Так, по выпущенному автором в издательстве «Высшая школа» учебнику «Математика» можно реализовать типы H_2, C_1 и C_2, а по учебнику «Алгебра и начала анализа 10–11» — типы C_2, C_3 и M_2.

Сейчас готовится к выпуску учебник, реализующий типы H_2 и H_3.

Вклад в реализацию общих целей

В процессе обучения математике учащиеся знакомятся с определёнными понятиями, овладевают математическими методами решения тех или иных задач. В этом проявляется одна из функций обучения предмету — образовательная или обучающая.

Есть и другая важная функция обучения математике — развивающая. Ю.К. Бабанский и М.М. Поташник так определяют функцию развития при обучении: «Учебный процесс должен воспитывать волю, развивать интеллект, познавательные интересы и способности учащихся, их творческие возможности, эмоциональную сферу, формировать мотивы и потребности учения».

Математика так же, как и другие школьные предметы всесторонне и гармонично развивает личность, формирует характер и общую культуру человека. Наряду с этим у учащихся развивается «стиль мышления особого рода», или «математическое мышление». «Развитие определённых структур мыслительной деятельности, объединяемых под названием «математическое мышление», А.А.Столяр выделяет «в качестве специальной и первой цели обучения математике».

Третьей функцией обучения математике является воспитательная. К ней, несомненно, относится воспитание таких качеств личности, как внимание, аккуратность, точность, ясность, способность сосредоточиться, настойчивость, интуиция, воображение, самостоятельность. Воспитание всех этих качеств играет большую роль в формировании характера ученика. В соответствии с этими тремя функциями обучения мы попробуем выстроить некую систему оценки результативности обучения, которая, на наш взгляд, станет надёжным ориентиром для учителя. В основу этой системы положено разделение многообразных параметров на три группы.

Первая из них характеризует общее развитие личности ученика, раскрывает развивающую функцию обучения. Это такие параметры, как алгоритмическая направленность, развитие дедуктивного, логического мышления, развитие пространственных геометрических и графических представлений, математическая речь, способность совершать сложные умственные действия (анализ, синтез, обобщение, конкретизация, установление аналогий и т.п.).

Вторая группа параметров объединяет более традиционные критерии результативности обучения, которые можно связать с образовательной, обучающей функцией предмета. При разработке этой группы параметров учитывались основные содержательные ориентиры обучения математике (вычисления и преобразования, переменные и функции, геометрические измерения, уравнения и неравенства, геометрические фигуры).

Третья группа представляет продуктивную деятельность учащегося. Она наиболее сложна по своей структуре, так как тесно связана с двумя предыдущими. Эту группу можно было бы условно разделить на две подгруппы. Одна из них выделяет параметры, относящиеся к прикладной направленности обучения (построение математических моделей, организация вычислений, исследование результата и т.п.). Вторая подгруппа связана с развитием творческих способностей, самостоятельности, индивидуальных сторон личности учащегося, а также с воспитательной функцией обучения (умение организовать самообразование, самостоятельно пользоваться литературой, навыки самоконтроля, развитие сообразительности, рост творческих навыков и т.д.).

Составим блок-схему введённых нами параметров, характеризующих вклад обучения математике в реализацию общих целей школьного образования.

ПАРАМЕТРЫ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
Общее развитие личности → Объём научных знаний → Продуктивная деятельность

Общее развитие личности
Алгоритмическая деятельность
Логико-дедуктивное мышление
Визуально-образное мышление
Математическая речь и символика

Объём научных знаний
Широта и качество знаний по содержательным линиям обучения
Динамика индивидуального усвоения знаний
Глубина знаний в выбранном разделе

Вычисления и тождественные преобразования
Функции и графики
Уравнения и неравенства
Фигуры и тела
Измерения величин и геометрические преобразования

Прикладная направленность мышления

Организация вычислений
Моделирование
Исследование результата
Самоконтроль

Продуктивная деятельность
Развитие творческих способностей
Самостоятельность
Сообразительность
Способность к обобщению
Способность ориентироваться в новой ситуации

Методическое обеспечение

Согласившись с общими целями образования, выбрав профиль и уровень предметной подготовки, остановившись на некоторой системе обучения (или в простейшем варианте на одном из параллельных учебников), учитель приступает к главному — составлению календарного плана на ближайший раздел программы и поискам необходимого методического обеспечения.

Главное при поурочном планировании — распределить учебное время между различными формами учебной деятельности. При этом учитель обычно пользуется готовыми методическими рекомендациями или опирается на свой педагогический опыт. В любом случае у него получается некий список уроков с их основными темами (подразделами учебной темы) и ведущими типами (объяснение нового материала, закрепление, проведение самостоятельной работы и т.п.). Вопрос типологии уроков хорошо разработан в дидактической литературе, имеет устойчивые традиции и учитель редко испытывает здесь затруднения. Главная трудность на этом этапе планирования — подбор, адаптация старых и подготовка новых дидактических средств, обеспечивающих весь спектр целевых установок и все своеобразие конкретной учебной ситуации, в которой работает учитель.

Теперь многое зависит от того, насколько широк доступ учителя к различным информационным средам, понимая под широтой такого доступа не только возможность получения готовой информации, но и возможность её преобразования.

Остановимся на классификации сред по использованной в ней форме представления знаний, выбрав те из них, которые наиболее существенны для методического обеспечения работы учителя.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ
Описания:
Учебники
Книги
Журналы

Образы:
Графика
Карты
Таблицы

Модели:
Физические модели
Аналоги

Задания:
Лабораторные работы
Задачи
Вопросы

Инструменты:
Калькулятор

Циркуль
Программа
Микроскоп

Сейчас нас интересует постановка задачи — каково то поле возможностей, которое должно быть перед учителем при методическом обеспечении поурочного плана.

Приведём пример. Учитель математики работает в 11-м классе общеобразовательной школы. Класс имеет гуманитарный профиль, уровень класса по общим параметрам развития — выше среднего. Очередная изучаемая тема: «Интеграл и его применение», на которую программой отводится 12 часов. Эти общие установки отражают предметный и модульный уровни планирования.

Общие методические рекомендации по поурочному планированию (взятые из журнала «Математика в школе», полученные в методическом кабинете, составленные самим учителем...) таковы:

1. Введение понятия интеграла	1 час
2. Первообразная	2 часа
3. Теорема Ньютона-Лейбница	1 час
4. Вычисление интеграла	2 часа
5. Применение интеграла к вычислению площадей	2 часа
6. Решение прикладных задач	2 часа
7. Обзорные занятия и контроль	2 часа
Итого:	12 часов.

Тема «Интеграл» для учащихся гуманитарного класса имеет общекультурный характер. Рассмотрим, как изучение этой темы способствует развитию учащихся (при этом будем следовать приведённой выше блок-схеме параметров).

1. **Научные знания:** завершение содержательной линии обучения, связанной с изменением величин, многое изучается в обзорном порядке.

2. **Динамика усвоения знаний:** в значительной степени зависит от усвоения функциональной линии (функции, графики, производная), предполагает актуализацию необходимых знаний.

3. **Алгоритмическая деятельность:** составляется список основных алгоритмов, на овладение алгоритмами отводится 30–40% рабочего времени.

4. **Логико-дедуктивная сторона:** незначительна; проведение строгих и полных доказательств затруднительно; выделяются важнейшие в логическом отношении узлы изучения темы (связь с производной, теорема Ньютона–Лейбница, свойства площади и свойства интеграла).

5. **Визуальное мышление:** необходимость акцента на образно-аналоговую сторону (интеграл — это площадь), использование таблицы первообразных; подготавливается информационная схема, включающая основные результаты; роль перевода с формульного языка на графический и обратно; на визуальные задачи отводится не менее 30% рабочего времени.

6. **Математическая речь и символика:** возможны значительные трудности в связи с новыми словами и обозначениями; планируется усиление описательной стороны (значение интеграла, его использование, история вопроса) вместо формализации (вряд ли стоит учить аккуратной традиционной форме преобразований интеграла и его вычисления).

7. **Прикладная направленность:** особое внимание уделяется геометрическим приложениям (около 30% рабочего времени); механические приложения используются в обзорном порядке.

8. **Развитие творческих способностей:** особенно способности ориентироваться в новой ситуации (запись с помощью интеграла законов физики и т.п.); в целом возможности темы ограничены из-за поверхностного её изучения.

Каковы же те информационные среды, взаимодействие с которыми должно обеспечить учителю решение поставленных целей?

1. **Описание.** Необходим учебник, ориентированный на гуманитарный профиль изучения математики. Это особенно важно для обсуждаемой темы, так как ставшее традиционным из-

ложение интеграла в школьном курсе не соответствует сформулированным целям.

Необходимы другие описательные материалы (книги по истории математики, популярная литература и т.п.), так как проведение бесед с учащимися (что связано с обзорным характером изучения темы) потребует значительной подготовки (с учётом незначительного опыта преподавания темы «Интеграл» в школе).

2. **Модели.** Изучение интеграла может быть построено на двух моделях — площадь или механическое движение. В качестве основной выбрана первая из них. Надо обдумать возможность представления выбранной модели (использование палетки, аксиоматическая модель, закрашивание областей на экране и т.п.).

3. **Инструменты.** Создание специализированных инструментов, освобождающих ученика от рутинной работы и позволяющих ему не заниматься техникой вычисления интегралов, могла бы помочь решению поставленных задач. Такие инструменты можно реализовать, используя компьютер.

4. **Образы.** Необходимы визуальные задачи, ясные по своему построению таблицы связи между производными и интегралами. В связи с отсутствием устоявшихся зрительных образов, ассоциирующихся с понятием интеграла, разработка зрительного ряда, сопровождающего изучение темы, является серьезной методической проблемой.

5. **Задания.** Нужен подбор широкого спектра заданий, обеспечивающих необходимую дифференциацию и индивидуализацию обучения.

Таким образом, поурочный уровень планирования предполагает взаимодействие учителя с разнообразными информационными средами. Для успешной работы учителя с ними (в них) эти среды должны удовлетворять таким требованиям:

1. **Доступность.** Учитель может знать о существовании тех или иных полезных ему материалов, но он никогда не включит их в поурочное планирование, если у него нет к ним лёгкого доступа.

2. **Структурированность.** Информационная среда должна быть хорошо и удобно структурирована.

3. **Гибкость.** Среда должна допускать легкую приспосабливаемость её материалов к конкретным условиям.

4. **Открытость.** Желательно, чтобы учитель мог самостоятельно наполнять среду, внося в неё результаты своего педагогического опыта, закрепляя их для дальнейшего использования.

5. **Технологичность.** Под технологичностью среды понимается её инструментальная обеспеченность, позволяющая сохранять общность подходов к разным задачам и переносимость, отчуждаемость её составляющих.

Развитие визуального мышления в информационной среде

В процессе обучения происходит интеллектуальное развитие школьников, проявляющееся в раскрытии и обогащении различных сторон их мышления, качеств и черт их личности и характера. Разработанная психологами типология мышления выделяет такие его виды, как абстрактное и конкретное, речевое и эмоциональное, логическое и алгоритмическое и т.п. Широкое распространение получил термин «визуальное мышление» (зрительное, образное), означающее, как пишет Арнхейм, «мышление посредством визуальных (зрительных) операций»*. В основе наших дальнейших рассуждений лежит следующее определение, данное В.П. Зинченко: *«Визуальное мышление — это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определённую смысловую нагрузку и делающих значение видимым»**.

* Арнхейм Р. Визуальное мышление. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 98

** Зинченко В.П. Современные проблемы образования и воспитания// Вопросы философии. 1973. № 1. С.46.

Все свои соображения мы иллюстрируем примерами, подавляющее большинство из которых относится к предметной области «Математика». В отдельных случаях такие примеры будут содержать материалы других дисциплин, что позволит наглядно представить и обосновать общность важнейших положений.

Визуальное мышление и учебная знаковая информация

Понятие визуального мышления, как особого вида человеческой деятельности, широко использовалось философами, психологами, искусствоведами прежде всего для изучения психологии искусства, художественного восприятия и творчества (важно было найти чувственный аналог интеллектуального познания). Р. Арнхейм в книге «Искусство и визуальное восприятие» пишет: «Восприятие не является механическим регистрированием сенсорных элементов, оно оказывается поистине творческой способностью мгновенного схватывания действительности, способностью образной, проницательной и прекрасной. Качества, характеризующие деятельность мыслителя и художника, свойственны любому проявлению разума… Любое восприятие есть также и мышление… любое наблюдение разума — также творчество»*. В настоящее время мысль о продуктивном характере визуального мышления получила достаточно широкое признание. Педагогика, методики преподавания, опыт работы учителей накопили богатый материал, подтверждающий необходимость целенаправленного использования визуального мышления в практике обучения. Попытаемся трансформировать эти идеи применительно к потребностям математики и других школьных дисциплин.

---

* Арнхейм Р. Искусство и визуальное восприятие. М.: Прогресс, 1974. С. 20–21.

Визуальное мышление связано с формированием устойчивых зрительных образов (понятий) и овладением различными мыслительными операциями над ними, аналогичными таким общим процессам, как абстрагирование, отделение главного от второстепенного, структурирование, логические рассуждения и т.п. При правильном и планомерном использовании и развитии визуального восприятия эта сторона мышления становится вполне самостоятельной (деятельной) по отношению к процессу мышления вообще. Обучение в школе может и должно активно применять и развивать прекрасную способность зрения, давать пищу разуму — «посредством глаза, но не глазом смотреть на мир умеет разум» (Уильям Блейк). Поясним наше сравнение более подробно.

Духовное и интеллектуальное развитие ученика, являясь главной целью и основным содержанием процесса обучения и воспитания, способствует появлению самостоятельно развивающихся подсистем (мышления), богатство и разнообразие которых обеспечивает успешное функционирование всей системы. Наличие опорных конспектов, развитие аудиовизуальных средств, использование монитора ПК, стремление авторов учебных пособий и учителей наглядно изложить учебный материал и, главное, исследования отечественных и зарубежных психологов убеждают нас в том, что следует уделить особое внимание к той подсистеме мышления, которая предназначена преобразовать свойства чувственного, визуального восприятия в полноценную продуктивную мыслительную деятельность.

Визуальное восприятие

В результатов исследований психологии художественного восприятия был сделан вывод о необходимости специального обучения «искусству видеть» и разработки методов этого обучения. Грегори в книге «Разумный глаз» пишет: «… понимать — значит видеть вещи определённым образом»*. В другой книге, следуя Гельм-гольцу, он ещё более чётко определяет: «… чтобы правильно видеть вещи, необходимо обучение»**. Обучение умению «правильно видеть», а значит и понимать содержание предметных абстрактных образов, становится актуальной задачей методик преподавания школьных дисциплин: «… видеть вещи и явления можно лишь в ходе процесса, аналогичного решению задач. Все сенсорные факты — ощущения— суть вопросы, задаваемые мозгу рецепторами, а все восприятия — ответы, иногда верные, иногда неверные»***.

---

* Грегори Р.Л. Разумный глаз. М.: Мир, 1972. С. 7

** Грегори Р.Л. Глаз и мозг. М.: Прогресс, 1970. С. 223.

*** Там же. С. 7.

При изучении многих школьных предметов учащимся предъявляется достаточно трудный для усвоения, зачастую идеализированный материал. Естественно, что у них возникает потребность овеществить абстракцию. С.А. Шапоринский так объясняет это: «Дело заключается в том, и это особенно важно отметить, что ... мышление формирует для себя чувственную основу в виде схем, графиков, моделей и т.п. Именно поэтому усиление роли мыслительных компонентов может приводить и к усилению взаимодействия и взаимосвязи чувственных и собственно логических компонентов»*. К сожалению, как показывает практика, какие бы межпредметные связи мы ни приводили, как бы их ни интерпретировали, всё равно чаще всего для учеников формула — это одно, а словесное описание какого-либо соответствующего (например, физического) закона — это нечто иное. По-видимому, этим объясняется то, что на уроках естественно-научного цикла учащиеся с трудом применяют известные правила преобразований (например, при составлении химических формул или решении физических задач).

* Шапоринский С.А. Обучение и научное познание. М.: Педагогика, 1981. С. 51.

На наш взгляд, это происходит потому, что элементы мышления и элементы восприятия ещё не объединены сознанием в единую систему, хотя несомненно, что «восприятие и мышление нуждаются друг в друге; их функции взаимодополнительны» и более того: «Восприятие без мышления было бы бесполезно, мышлению без восприятия не над чем было бы размышлять»*. Для превращения познания в единый непрерывный процесс необходимо, чтобы элементы мышления в восприятии и восприятия в мышлении дополняли друг друга, образовывали новую ступень мышления, которую понятнее было бы назвать визуально-логической (и не только при изучении математики).

* Арнхейм Р. В защиту визуального мышления. М.: Прометей, 1994. С. 15.

Учтём ещё одно обстоятельство. Предметы естественнонаучного цикла, а также ряд гуманитарных дисциплин имеют собственный язык — язык символов (знаки, графики, рисунки и т.п.), и, соответственно, все визуальные формы имеют строгую логическую структуру организации по определённым правилам, которые также визуально обозримы. Все это с определёнными оговорками можно легко применить к любой знаковой информации, которая является исходной для начала мыслительной деятельности учащегося. «Информация — это ... система знаков или символов; переработка информации— различного рода преобразования этих знаков по определённым правилам ... информационная модель ... — сведения о задаче, представленные или накапливаемые (в виде нового описания) в памяти решающей системы»*.

* Тихомиров А.К. Информационные и психологические теории мышления. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 329.

Здесь мы ориентируемся на строго определённый вид информации — учебную знаковую информацию, предназначенную и направленную на усвоение содержания учебной теории и её практических приложений. Итак, учащийся получил абстрактный (знаковый) материал, овеществлённый в виде формул, графиков, картинок-иллюстраций. Даже если всё это сопровождается словесными интерпретациями, то он, разумеется, не сразу начинает мыслить (вникать в содержание теории или решать задачу). На данном этапе у него активно работает зрение и зрительное восприятие. Любые объяснения, комментарии в этот момент будут несвоевременны — учащийся прежде всего должен рассмотреть то, о чём пойдет речь, обдумать, проанализировать то, что он видит, воспринять (принять!) предлагаемый материал. Если учащемуся предложить материал неизвестного ему содержания и непривычного оформления, то он не воспримет, не увидит (в разбираемом смысле) ничего. Нельзя видеть, не понимая: «... слово «видеть» имеет два значения: зрительно воспринимать что-либо и понимать что-либо»*.

* Грегори Р.Л. Глаз и мозг. М.: Прогресс, 1970. С. 7.

Однако степени «понимания» могут быть весьма различны: от смутного ощущения до полной ясности. Чаще всего при любом новом «повороте» обучения — новой информации— глаз видит предъявляемое, но мозг не успевает (не умеет, не может) данную новизну обработать (составить достаточно точное и полное представление о ее содержании). Чтобы оптимизировать процесс усвоения материала, нам нужно растолковать ученику, что именно и в каком порядке он может (должен) рассматривать, чтобы иметь хотя бы относительную ясность (воспринять материал так, чтобы использовать его при решении несложных стандартных задач): «... разумное восприятие представляется главным путём, по которому следует ребёнок в поисках порядка в беспорядочном мире»*.

* Арнхейм Р. В защиту визуального мышления. М.: Прометей, 1994. С. 163.

Визуальный анализ

Как облегчить учащемуся проникновение в содержание, значение предъявляемых зрительных образов? Прежде всего этому должно способствовать качество самих этих образов. Как невозможно понять живопись, рассматривая бездарную мазню и убогие репродукции, так нельзя научить математике, физике, географии или химии, показывая безграмотные чертежи, неверные формулы, неправильно подобранные иллюстрации, непродуманно составленные (с точки зрения визуального восприятия) опыты или демонстрации. Весьма примечателен пример, приводимый Арнхеймом в книге «Новые очерки по психологии искусства»*: «... ко мне обратился за советом один ... студент ... Он работал над анализом визуальных аспектов демонстрации химических опытов ... и, обнаружив, что в гештальтпсихологии разработаны принципы визуальной организации, попросил разрешения прислать ... материалы ... у меня сложилось впечатление, что ... демонстрация опытов ... рассматривается как достигающая своей цели, если химический процесс ... физически присутствует на занятиях. Форма и расстановка... бутылок, горелок, трубок вместе с их содержимым определяется тем, что технически требуется и что самое удобное и дешёвое ... при этом мало внимания обращается на способ, которым визуально воспринимаемые формы ... доходят до глаз ... а также на отношения между тем, что наблюдается, и тем, что понимается. Вот маленький пример.

* Арнхейм Р. Новые очерки по психологии искусства. М.: Прометей, 1994. С. 169–171.

Двухкомпонентные газы, азот и водород ... соединяются в одной прямой трубке, от которой отходит короткое соединение к тонкой прямоугольной трубке, по которой газы идут в сосуд, где и происходит образование аммония. Единственная прямая вертикальная трубка, конечно, самый простой и дешёвый способ проведения реакции синтеза, но она обманывает визуальное мышление студентов. Она наводит ... на ложную мысль о непосредственной связи газов друг с другом, в результате чего они не замечают соединения газов для синтеза. Такая, казалось бы, мелочь... как соединение двух трубок в Y-образной форме, могла бы направить глаза, а вслед за ними и мышление ... в нужную сторону.

Итак, предъявляемая информация уже своей внешней формой должна направлять визуальное мышление ученика на анализ её структуры: «... мышление осуществляется посредством структурных характеристик, встроенных в образ, и потому образ должен быть сформирован и организован разумно, чтобы наиболее важные его свойства были видимы».

При переходе от устных объяснений к записям, печатному тексту происходит отвлечение, перестройка сознания на восприятие знаков как конкретных образов. Именно эта знаковая материализация учебных понятий и отношений между ними принимается нами как необходимый атрибут процесса приёма и усвоения математических знаний в условиях обучения. Момент необходимый, так как любую учебную знаковую информацию можно подразделить на отдельные относительно самостоятельные образования, среди которых встретятся знакомые, одинаковые или же неизвестные. Эти образования в свою очередь «...отличаются целостностью, но нерасчленимой целостностью». Их понимание и усвоение требует одновременно и абстрактного мышления и «картинного» воображения»*.

* Шехтер М.С. Психологические проблемы узнавания. М.: Просвещение, 1967. С. 45.

В посильном для изучения материале учащийся находит некоторые известные ему объекты, материализованные, к примеру, в виде символов обозначений элементарных функций (в математике), химических формул, функциональных обозначений гармонических последовательностей (в теории музыки) и т.д. Ученик выделяет их в структуре информационных сообщений, дифференцирует их по степени сходства и однородности. Наконец, определяет известный ему структурный стандарт по отношению ко всему информационному сообщению или его отдельному блоку. Таким образом, анализ визуальной информации начинается с осознания общей структуры информационного сообщения и выделения его элементов. Поясним, что мы понимаем под словами «элемент учебной математической информации» и «структура учебной математической информации».

Под **элементами** учебной знаковой информации будем подразумевать не только сами символы (знаки), но и такие их сочетания, которые можно рассматривать как логически осмысленные «части» (взаимосвязанные блоки) этой информации.

Так, если a и b — элементы некоторого алгебраического выражения, то $a + b$, $a - b$, $a \times b$, a/b и т.д. в зависимости от условий также могут оказаться его элементами. Естественно, что и аналитическая форма задания функциональных зависимостей ($\sqrt{x}$, x'', $|x|$, $\lg x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и т.д.) выступает как некоторый самостоятельный неделимый элемент.

Определяя элементы информации, учащийся осуществляет «тот практический реальный анализ, который представляет первую ступень познавательной деятельности и в этом смысле предшествует умственному анализу и синтезу, совершающемуся в словесном плане»*.

* Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1950. С. 132.

К примеру, ученик неполной средней школы, знакомый с правилом сокращения дроби, но не имеющий представления о логарифмах, может сообразить, что $\frac{(\ln x)^2}{\ln x} = \ln x$, оперируя с выражением $\ln x$ как с единым неделимым элементом.

Знаковая информация, задаваемая иллюстративным образом, также довольно чётко подразделяется на элементы. При изображениях пространственных тел или плоских фигур в одних случаях к элементам относятся сами эти фигуры, в других — выделенные на чертежах их составляющие (высоты, углы, грани, вершины и т.д.). Графическая интерпретация функциональных зависимостей включает в качестве элементов оси координат, области определения и множества значений, конкретные значения переменных, участки кривых, оси симметрии и т.п.

Разумеется, подобная дифференциация знаков информации на элементы весьма условна. Так, при изучении частных значений функции к элементам относятся все мельчайшие подробности как формульного, так и геометрического способов их предъявления. При переходе же к оценке поведения функции на отрезке мы укрупняем наблюдаемые элементы, нас интересуют уже не «частности», а поведение функции «в целом» — на определённом интервале.

Под **структурой** информационного сообщения мы подразумеваем относительно устойчивую систему связей элементов, образующих целое — исходную информацию. Для осознания структуры информационного фрагмента очень важно определить связи между его элементами.

При переписывании учениками условия задачи часто встречаются ошибки типа $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ вместо $\sqrt{a+b}$, $a^3\sqrt{b}$ вместо $a\sqrt[3]{b}$ и т.п. приводит к изменению смысла исходного условия. Здесь дело не только в незнании определённых математических знаков, но и в «невоспитанности» математического зрения. Именно этим и можно объяснить огромное количество «описок» при перенесении информации с доски или учебника в тетради учащихся. Они так увидели и переписали, не подумав о возможности различных связей между отдельными элементами математической конструкции.

Осознание, визуальный анализ, «живое созерцание» структуры информации имеет громадное значение при использовании известной формулы, активное созерцание которой недостаточно используется в учебной практике. И это при том, что подавляющее количество примеров и задач любого учебника для каждого класса школы посвящено отработке навыка — по известной формуле составить, преобразовать, вычислить значение. Практически нет раздела дисциплины естественно-математического цикла, где умение расчленять информацию на элементы и определять ее структуру не было бы востребовано.

Проблему, связанную с восприятием визуальной информации, активным анализом её элементов и структуры, можно решить при помощи специальной организации учебного материала.

Опишем одну из характерных ситуаций. После разбора положения о вынесении числа при задании вектора его координатами предложен пример:

«Пусть $(3;3;p)=\vec{a}$; $(1;m;1)=\vec{b}$; $\vec{a}=3\vec{b}$. Найти числа *m* и *p*».

Если подобная задача не была сначала решена в классе, то возникает ряд недоразумений. Оказывается, несмотря на всю простоту данных, учащиеся не воспринимают тот факт, что имеются одинаковые символы в соответствующих информационных сообщениях. Лишь немногие видят, что $(3;3;p)=3\times(1;m;1)$. Только что изложенное теоретическое положение остаётся для большинства вне поля их зрения. Им трудно сделать первый шаг: $(3;3;p)=(3\times 1;3\times m;3\times 1)$.

Выделим этот момент особо, поскольку для учащихся со слабо развитым математическим мышлением характерна «остановка» уже при начальном вводе в ситуацию. Более того, «тормоз» того же типа препятствует их деятельности при каждом переходе от одного этапа преобразований к другому.

Даже зная свойства координатной формы задания векторов, многие ученики не могут ими воспользоваться. Поэтому задачей первостепенной важности является умение переоформлять и перестраивать символьную информацию.

Важным этапом анализа визуальной информации является нахождение одинаковых элементов. Формально такие элементы распознать легко. Особое значение имеет нацеленность на их обнаружение.

Выполняя задание на вычисление выражения $\dfrac{\sqrt{6{,}3\times 1{,}7}\left(\dfrac{\sqrt{6{,}3}}{1{,}7}-\dfrac{\sqrt{1{,}7}}{6{,}3}\right)}{\sqrt{(6{,}3\times 1{,}7)^2-4\times 6{,}3\times 1{,}7}}$

большинство учащихся, имеющих микрокалькуляторы, стремятся выполнить все операции с его помощью, вместо того чтобы выделить всего два повторяющихся числа «6,3» и «1,7» и применить формулы сокращённого умножения $\dfrac{\sqrt{a\times b}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b}-\dfrac{\sqrt{b}}{a}\right)}{\sqrt{(a\times b)^2-4\times a\times b}}$.

Целенаправленное оформление информационных данных необходимо в организации «живого созерцания» на школьных уроках. Специальное распределение информационных элементов (блоков, фрагментов) на плоскости листа или дисплее позволяет осознать определённую установку:

— найди одинаковые элементы и приравняй их;

— найди «родственные» по содержанию элементы и определи связь между ними.

Создание новых образов

Умение определять, «видеть» структуру формульных конструкций формируется долго и трудно. Следует всячески помогать учащимся в приобретении этого важного и полезного умения. Дифференциация знаковой информации на элементы и осознание её структуры позволяют перейти к следующему важному этапу работы с ней.

Вопросы, предлагаемые самой информацией, учителем или возникшие в голове ученика, концентрируют внимание учащегося на определённом фрагменте текста, деталях формулы или рисунка. Детали, привлекшие внимание своей схожестью или различием, новизной или привычностью обозначения или оформления, могут побудить учащегося к преобразованию предъявленной информации. Зрительные ориентиры (визуальные стандарты) дают возможность осуществить второй этап визуального анализа — классифицировать характер разбираемого фрагмента учебной теории или конкретного практического задания, представленных знаковым образом, и на основе этого перейти к созданию новых визуальных образов и форм. Здесь полезно напомнить некоторые из операций мышления, с помощью которых осуществляется классификация понятий*:

— установление признаков объектов, подлежащих классификации;

— сравнение между собой объектов по общим и специальным признакам;

— разделение объектов на классы в соответствии с полученным основанием классификации.

* Столяр А.А. Педагогика и математика. Минск: Вышейшая школа, 1974. С. 43.

Получение начальных, явным способом предлагаемых данных информации приводит к вычленению признаков объекта, которые являются основой для формирования его **первичного** образа. Поиск возобновляется и учащийся приступает к уточнению и детализации инвариантов. Он выстраивает их в системы, сравнивает визуальные комбинации с некоторым **обобщённым** образом (стандартом, эталоном).

Распознавание стандартной ситуации, стандарта происходит как по постановке задачи, так и по схеме «специализация— обобщение». Это может быть узнавание знакомой формулы в новых обозначениях, отождествление заданного числа со значением известной функции в некоторой точке или сопоставление нотного символа с функциональным значением его в соответствующей тональности, уяснение частного вида более общего знакомого понятия и т.д.

Вследствие проделанной работы учащийся получает (выявляет) новую дополнительную информацию. При этом он ещё раз уточняет и проверяет инварианты, оценивает однородность и контрастность деталей, анормальности относительно первоначально исследованного эпизода и другие морфологические особенности. Учащийся всё время должен решать: достаточна ли информация для достижения поставленной цели? Приходится сортировать, отбрасывать избыточную информацию, уточнять и корректировать необходимую. В случае, когда речь идёт об определённом важном фрагменте учебной теории, в памяти учащегося происходит окончательное закрепление — образование содержательных (опорных) образов (сигналов).

Таким образом, вся деятельность визуального восприятия учащегося при работе со знаковым материалом может быть рассмотрена как непроизвольное самообучение, которое приводит к развитию навыков поиска — фиксации (классификации) своеобразия информационных визуальных сообщений. Главным здесь является отождествление её отдельных фрагментов с известными ему достаточно простыми объектами и понятиями, которые мы называем **стандартами**. Чтобы усилить целенаправленность этой работы, необходимо разобраться в постановке задания, понять и сформулировать, «на что» дана задача, т.е. к какому стандартному типу она может быть отнесена.

Основная часть работы по распознаванию стандарта происходит по схеме «специализация — обобщение». Разумеется, первый и второй этапы работы с визуальной информацией часто не разделяются во времени, а тесно переплетаются.

Например, увидев на доске выражение типа $A = 4^x + 3 \times 2^{2x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}$, учащийся в каждом слагаемом должен опознать функцию вида $y = ka^x$, отметив для себя, какие основания показательной функции включены в условие.

Если выражение A входит в уравнение $4^x + 3 \times 2^{2x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 0$, то визуальный анализ этой формулы может содержать следующие моменты:

1. Уравнение включает в себя показательные функции — это показательное уравнение — опознание стандартной постановки задачи.
2. В уравнение входят показательные функции с основаниями 2, 4 и 1/2 — распознавание стандартного объекта.
3. Все слагаемые в левой части можно представить как показательные функции с одним и тем же основанием « 2 » — опознание одинаковых элементов.
4. Известны два типа показательных уравнений: $a^x=b$ и $a^{2x}+pa^x+q = 0$. Для их опознания надо сравнить показатели степеней, не обращая внимания на постоянные (отождествление a^{x+c} и ka^x) — целенаправленность дальнейшего анализа.
5. Все слагаемые имеют вид $k2^{2x}$, т.е. представляют собой одинаковые степени одного основания (теперь видно, что этим основанием можно взять как число 2, так и 4) с точностью до постоянного множителя— отождествление одинаковых элементов.
6. После выкладок мы получим в левой части три подобных слагаемых типа $k2^{2x}$ и, сложив их, придём к стандартному уравнению вида $A\times 2^{2x}=5$, для решения которого есть стандартная формула (свернут ещё один шаг, при котором 2^x воспринимается как z без формальной замены $z = 2^x$).

Теперь всё готово к проведению заключительного этапа анализа — составлению мысленного плана работы, который мы рассмотрим позже.

Принцип замены играет существенную роль в использовании стандарта. Заменяя «эталон» на определённый символ, мы как бы освобождаем от его влияния основную структуру выражения и помогаем увидеть (предвидеть) ответ, облегчая дальнейшую работу.

Например, уравнение $(\lg x)^{\sin^2 23°} \times (\lg x)^{\cos^2 23°} = 3$ может быть решено, если учащийся умеет производить мысленные замещения:

$\lg x = a$

$a^{\sin^2 23°} \times a^{\cos^2 23°} = 3$

$a^{\sin^2 23° + \cos^2 23°} = 3$

$a = \lg x$, $a = 3$, $\lg x = 3$

$x = 10^3$

Таким образом, в практическом задании стандарт является ориентиром, позволяющим определить именно то учебное понятие, свойствам которого посвящено задание.

В процессе визуального анализа информационного сообщения формируется тактика переработки этой информации в соответствии с поставленными задачами. Это объясняется тем, что «... приспосабливаясь к ... разнообразию видов структур, человеческий разум взял на вооружение две ... процедуры — интуитивное восприятие и интеллектуальный анализ»*.

* Арнхейм Р. Двойственная природа разума: интуиция и интеллект. М.: Прометей, 1994. С. 41.

Этап мысленного составления плана работы является самым важным в ходе визуального анализа предъявленных данных. Ученик должен определить порядок дальнейших действий, постараться в уме свернуть некоторые из хорошо знакомых ему операций, осуществить прогонку вариантов. Этот этап по своим целям и учебным возможностям следует отнести к поисковой деятельности. Мы считаем, что некоторые особые приёмы и навыки такой деятельности явным или скрытым образом «диктуются» самой визуальной знаковой информацией. Любая формула, рисунок или текст подразумевают подсказку. Нужно лишь нацелить учащегося на поиск такой подсказки, дать инструмент к её извлечению и применению. Путь к этому лежит через воспитание визуального мышления.

Организация описанных выше этапов «живого созерцания» знаковой информации приводит к тому, что становится возможным ещё до оформления рассуждений (доказательств теорем, решений примеров и задач) наметить план работы и оценить вероятные результаты. При составлении плана работы надо: определить порядок действий, свернуть отдельные операции, прогнать варианты решения задачи.

План работы над примером или задачей может быть составлен при помощи перевода результатов визуального анализа данных в список конкретных команд. При этом отношение изолированности для каждого из моментов «живого созерцания» особенно активно преобразуется в отношение связи. Происходит «динамический поиск наилучшей интерпретации имеющихся данных»*.

---

* Грегори Р.Л. Глаз и мозг. М.: Прогресс, 1970. С. 15.

При прочно сформированных навыках визуального анализа учебной информации задания типа «Упростить $\dfrac{tg^4\alpha - tg^6\alpha}{\dfrac{1}{tg^4\alpha} - \dfrac{1}{tg^2\alpha}}$»

легко переводятся учащимися в серию предписаний:

1. Заменить элемент «$tg^2\alpha$».
2. Вынести общие множители.
3. Осуществить действия над дробями.
4. Вынести общие множители и, если можно, сократить (перспектива сокращения на ($1-tg^2\alpha$) может быть обнаружена визуально).
5. Оформить результат.

Такая вербальная расшифровка исходного указания «Упростить» на деле является ответом на «немой» вопрос, неявным образом присутствующий в каждом практическом задании— какие знания требуются, чтобы можно было получить ответ?

Составляя план работы, учащийся одновременно отмечает именно те правила (формулы, теоремы), которые позволяют прийти к искомому результату. Как отмечал Эльконин, «в процессе обучения невозможно игнорировать первую ступень познания — живое созерцание, так как только на его основе возможно развернуть в полной мере работу абстрактного мышления»*.

---

* Эльконин Д.Б. Развитие устной и письменной речи учащихся. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 254–264.

Завершающим моментом составления плана работы является прогонка вариантов — наиболее сложная часть визуального анализа. Навыки мыслительной прогонки возможных вариантов вырабатываются в течение долгой и кропотливой работы. Этот момент трудно контролируется, так как во многом связан с индивидуальными особенностями ученика. В то же время овладение данным навыком способствует большей самостоятельности и творческой активности учащегося.

Здесь уместно вспомнить слова П.Я. Гальперина: «Речевое действие строится как отражение материального действия. Для этого последнее снова развёртывается и шаг за шагом переносится в речевой план»*. Таким образом, последовательно организуя все изложенные операции «живого созерцания» учебной знаковой информации, мы не только используем природные свойства зрения ученика, но и формируем некоторые специальные особенности, которые у способных детей образуются часто непроизвольно, спонтанно. Можно сказать, что развиваемая нами теория призвана трансформировать визуальное восприятие в продуктивное мышление, как его понимает Грегори: «Нас привлекает взгляд на восприятие как на процесс, который реализуется в мозге и подобен логическим процессам. Например, таким, которые используются при получении и интерпретации научных данных, при формировании различных гипотез, проверяемых затем путём спланированных наблюдений»**.

---

* Гальперин П.Я. Формирование умственных действий. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 83–84.

** Грегори Р.Л. Разумный глаз. М.: Мир, 1972. С. 172.

Формирование стандартного зрительного образа

Каждая учебная задача предполагает преобразование, свёртывание данных к некоторому достаточно простому, хорошо известному объекту. Геометрическая или аналитическая интерпретация найденного стандарта позволяет возможно быстро и точно ответить на поставленный вопрос. С точки зрения определённых психологических свойств мышления это естественно. В предисловии к русскому изданию книги «Распознавание образов» Пинскер пишет: «... любое решение, любое действие, связанное с обработкой внешней информации, основано на узнавании и той конкретной ситуации, которой это действие отвечает, т.е. на распознавании образов»*.

* Пинскер И. Распознавание образов. М.: Мир, 1970. С. 5.

Решая определённую задачу, учащийся так или иначе вынужден изменять (преобразовывать) исходные данные, предварительно распознав тот визуальный стандарт, к которому можно свести её содержание. На уроке русского языка таким стандартом может быть определённая часть речи или хорошо известный член предложения. В физике им может оказаться закон Кулона, опираясь на который, можно решать различные задачи, связанные с электростатикой и т.д.

Активное и целенаправленное использование визуального мышления в процессе обучения основано на выработке устойчивых стандартных образов основных учебных понятий. Подготовка добротных геометрических изображений этих понятий, адекватно отображающих их основные черты, удобных в работе, пригодных для многократного использования, является первой задачей.

Большинство изображений устоялось в практике преподавания математики. Перечислим важнейшие:

1. Число — точка числовой оси.
2. Вектор — направленный отрезок.
3. Функция — график.
4. Линейная функция — прямая.
5. Квадратичная функция — парабола.
6. Обратная пропорциональная зависимость — гипербола.
7. Колебательный процесс— синусоида.
8. Производная — наклон касательной.
9. Экстремум — горб или впадина.
10. Интеграл — площадь.

Естественно, что объём содержания такого визуального образа не полностью совпадает с объёмом содержания соответствующего понятия. Так, отношение «Экстремум — горб или впадина» позволяет по графику определить важнейшие «параметры» поведения функции (точки максимума и минимума, изменение функции вблизи этих точек — возрастание с одной стороны и убывание с другой), «измерить» значение самого экстремума и т.д.

Однако чтобы осуществить дефиницию самого понятия, необходимо нечто большее. Нужна дисциплина зрительного восприятия, знание стандартных зрительных образов, понимание, что само слово «экстремум» нуждается в описательном расширении типа «экстремум функции в заданной точке» и т.д. Необходим грамотный, квалифицированный перевод с языка образов на язык слов и формул.

Обратим внимание на то, что новым в предлагаемом нами подходе является акцент на «первичность» образа, на быструю и возможно более точную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию. Насколько важна такая «первичность» писал еще Павлов: «При страшной сложности работы больших полушарий, по-видимому, имеется такой принцип: все то, что было образовано, не переделывается, но остается в том же виде, а новое лишь наслаивается»*.

* Платонов К.К. Занимательная психология. М.: Мол. гвардия, 1986.

Для того чтобы «базовый» рисунок-стандарт помогал решать конкретную учебную задачу, необходимо продумать его содержание и расставить все важнейшие акценты. По словам Вазари, «рисунок... имея свое начало в рассудке, извлекает общее понятие из многих вещей... отсюда следует, что он познает соразмерность целого с частями и частей между собой и с целым ... из этого познания рождается определённое понятие и суждение... и можно заключить, что рисунок этот не что иное, как видимое выражение и разъяснение понятия, которое создалось в идее. И отсюда, возможно, и возникла греческая пословица: «По когтю льва»*.

* Вазари Д. Жизнеописание наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих. М.: Искусство, 1960. С. 214.

Комплекс «график — уравнение» должен чётко отмечать в своем геометрическом блоке все «точки опоры» — элементы, позволяющие прийти к необходимым обобщениям, предопределить свёртывание мыслительных операций. В частности, для геометрического задания синуса к таким элементам можно отнести точки, обозначенные на оси абсцисс: $-\pi/2$, 0, $\pi/2$ ...пунктирные (или тонкие) линии, отмечающие область значений этой функции. При соблюдении упомянутых условий у учащихся довольно просто формируются формульные стандарты типа:

— нули синуса: $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ ...;

— область допустимых значений синуса: $x \in [-1;1]$ и т.д.

Предлагаемое визуальное средство — «направляющие прямоугольники». Оно обеспечивает точность исполнения и ясность восприятия важнейших математических объектов — графиков элементарных функций.

Например, тщательное выполнение графика показательной функции по основанию 2 ($y = 2^x$) может привести к полезным ассоциациям. «Точки опоры» в виде цифр (на оси абсцисс: -1, 0, 1; на оси ординат: 1/2, 1 и 2) позволяют визуально определить, предугадать соответствия для экспоненты с основанием 3 и 4.

Приведём пример возможного хода решения задачи, весьма показательной с точки зрения отработки навыка использования графических стандартов.

Построить график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, x \le -1 \\ \sqrt{x+1}, -1 \le x \le -2 \\ x - 2, x > 2 \end{cases}$$

Для начала построим геометрические стандарты кривых: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x$. При этом мы в визуальной форме отвечаем на вопрос: «Что задано?». Осуществим перемещение графиков в строгом соответствии с формулами условия, т.е. определим: «Где задано?». Выделим те участки кривых, которые удовлетворяют начальным ограничениям и тем самым ответим на вопрос: «Когда, то есть как развивается наша функция во времени?», и, наконец, вносим корректировку, необходимую для сохранения закона функциональности, т.е. определяем поведение функции «на стыках».

Визуальные стандарты могут оказать громадную помощь в прикидке результата. Продемонстрируем их действие на примере.

Определить знак произведения: $A = \lg \sin 32° \times \lg \cos 17° \times \lg \operatorname{tg} 40° \times \lg \operatorname{ctg} 2°$. Осуществляя визуальный анализ геометрического предъявления соответствующих «порций» информации, от опорного стандартного образа приходим к ответу: $A < 0$.

$\alpha = 2°; 17°; 32°; 40° < 45°$

$0 < \sin 32° < 1$

$0 < \cos 17° < 1$

$0 < \operatorname{tg} 40° < 1$

ctg2° > 1

lg sin32° < 1
lg cos17° < 1
lg tg40° < 1
lg ctg2° > 1

Визуальные образы не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение таких образов в учебный процесс предполагает не только последовательное восстановление их, но при необходимости расчленение, сборку отдельных деталей в единое целое — новое образование. Этому способствует умение выделить на визуальных стандартах важнейшие свойства понятий, отразить определённые операции над ними.

Обратимся, для примера, к разделу «Векторы». Поскольку на соответствующие разделы программой (её инвариантной частью) отводится минимум допустимого времени, то особенно важно быстро сформировать умение (мысленно или письменно) восстанавливать основные стандарты:

а) противоположно направленные и сонаправленные векторы;

б) сумму двух векторов;

в) разность двух векторов.

Учащиеся хорошо знают, что диагональ векторного параллелограмма, соединяющая концы составляющих его векторов, есть вектор их разности, однако направление этого вектора они обычно определяют с трудом. Здесь может помочь визуальная подсказка — стрелка вектора разности двух заданных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должна соприкасаться со стрелкой вектора-уменьшаемого.

Уже на первых порах изучения этой (как и любой другой) темы необходимо сосредоточить внимание на формировании свободного переключения с одного языка предъявления информации на другие, что полезно постоянно поддерживать разнообразными задачами. Все сведения о правилах изображений векторов и основных операций над ними можно сосредоточить в двух информационных схемах. Первая из них представляет блок визуальных образов, в каждом из которых акцент делается на связи между словом и термином.

правило растяжения

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda > 0$ СО-направленные векторы

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda < 0$ ПРОТИВО-направленные векторы

$\vec{a}, -\vec{a}$, ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ векторы

Вторая схема концентрирует внимание учащегося на трудном для усвоения соотношении между буквенными обозначениями и визуальными представлениями векторов с точными указаниями их начала и конца.

правило растяжения

$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, $\lambda > 0$ СО-направленные векторы

$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, $\lambda < 0$ ПРОТИВО-направленные векторы

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ векторы

В теме «Векторы» каждое теоретическое положение и его применение хорошо «визуализируются». Иллюстрируемые визуальные стандарты помогут учащимся в решении задач, подобных следующей: «Точка О является центром тяжести треугольника *ABC*. Доказать, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 0$».

Решение. Примем:

$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$,

$\overrightarrow{OA} = \vec{m}, \overrightarrow{OB} = \vec{n}, \overrightarrow{OC} = \vec{p}$

Используя стандарты, имеем: $\vec{m} = \vec{c} - \vec{n}, \vec{n} = \vec{a} - \vec{p}, \vec{p} = \vec{b} - \vec{m}$. Произведя несложные вычисления, мы от известного образа $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ перейдём к визуальному обобщению — «векторному свойству» центра тяжести треугольника $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \vec{0}$.

Итак «образ — это сплав зримого и знаемого. Последнее не только входит в содержание образа, но и определяет то, что извлекается из зримого. Наглядный образ — результат переработки того, что было запечатлено, было зримо»*.

---

* Шапоринский С.А. Обучение и научные познания. М.: Педагогика, 1981. С. 53

Визуальный перевод

Остановимся на способах предъявления информационных данных — трёх языках учебной знаковой информации. Доминирующим способом введения учебной информации является вербальный. Другим способом предъявления знаковой информации является так называемый геометрический (наглядный, визуальный) способ. Многие науки имеют еще один специфический способ записи своего содержания, который мы называем формульным (синонимы — символьный, аналитический, знаковый).

Три языка учебной знаковой информации

К **вербальному** (описательному) способу предъявления учебной знаковой информации относится раскрытие её содержания на родном языке. При этом способе учащийся слушает или читает связанно изложенное описание, включающее математические, химические, музыкальные или иные термины и их обозначения. Законченный фрагмент информации, предъявленной вербальным образом, мы для краткости будем называть текстом. Сам способ такого введения данных здесь будет именоваться также словесным или описательным.

При **геометрическом** виде информационного сообщения его основная часть сосредоточена на рисунке, графике, наглядном пособии, экране. Это может быть и один кадр, и серия (последовательность изображений) или сложно организованная модель. Главное в обоих случаях — зрительно воспринимаемый образ. Для краткости фрагмент информации, предъявляемый визуально, будем называть рисунком (изображением, картинкой, иллюстрацией).

Под **аналитическим** (формульным, символическим) заданием учебной информации понимается запись фрагмента её содержания с помощью значков и букв. Он отличается от геометрического тем, что использует лишь стандартные обозначения из некоторого алфавита (списка) и имеет чёткие правила организации. Ввиду важности различных формул для всех предметов естественно-научного цикла, а также для некоторых гуманитарных дисциплин, мы выделим этот вид записи особо. Совокупность символов, фиксирующую связи между отдельными объектами предлагаемой знаковой информации с помощью общепринятых или специально введённых (например, стенографических) знаков, будем называть формулой.

Представление знаковой информации вербальными средствами — задача чрезвычайно сложная. Требование детерминированности, однозначности понимания условия является в данном случае основным. Текст должен быть рассчитан на уровень восприятия ученика, его подготовку, запас терминов. Даже такая «элементарная вещь» как предлоги могут озадачить ученика, поэтому при малейшей возможности следует *показывать* «нюансы» терминов, различия и сходство в них.

Задание функции внутри и на всём промежутке

$(a;b)$ — $f(x)$ определена В открытом промежутке

$[a;b]$ — $f(x)$ определена НА замкнутом промежутке

Так как вербальный способ трудно поддаётся непосредственному зрительному восприятию, то здесь необходимы некоторые специфические приёмы. К первому из них мы относим условие перевода фрагментов текста в формулу и рисунок. Ко второму — обогащение словарного запаса, введение понятных терминов, позволяющих воссоздать соответствующий зрительный образ, увидеть и запомнить отличительные, существенные особенности изучаемого понятия.

Умение читать формулу, составленную из знаковых конструкций, является одним из общеобразовательных умений, закладываемых в школе. При целенаправленном обучении умение видеть в символических образах содержание может стать инструментом к познанию. «Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность, по существу, является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения».

Действительно, чтобы объединить, осмыслить тождественность обозначений типа $\lg^2 x$, $(\lg x)^2$, $(\log_{10} x)^2$ и т.д.,

необходима определённая математическая культура — знание различных форм записей одного и того же математического объекта, правил преобразования одной из них в другую, умение смотреть и видеть. Даже в более простых случаях наблюдается, что у учащихся отсутствует восприятие знаковых структур как некоторых зрительно воспринимаемых образований — визуальных образов, особенности которых поддаются активному зрительному анализу.

Обратимся к следующей задаче — выяснению взаимоотношений между различными способами работы с учебной знаковой информацией. Понятие «визуальный перевод» в наших рассуждениях является центральным. Под **визуальным переводом** мы подразумеваем ту умственную деятельность учащегося, которая осуществляется в ходе визуального восприятия начальных или промежуточных данных путём расшифровки их с помощью готовых, известных заранее визуальных форм, символических образований или терминов — наименований. Таким образом, визуальный перевод (или просто перевод) есть не что иное, как установление связей между рисунком, текстом и формулой.

Цикличность обусловливается возможностью (и необходимостью) сопровождения каждого из этапов приёма, анализа и преобразования информации словесными, формульными или иллюстративными комментариями. Несомненно, что этот процесс должен рассматриваться двусторонне.

Учитель рассказывает, объясняет. Ученик смотрит и слушает, вникает и запоминает. Однако в этой схеме, как известно, возможны вариации. Учитель превосходно владеет материалом, доходчиво объясняет содержание. Но слушатель не готов воспринимать его интерпретацию — нет прочной базы, он не владеет «языком», посредством которого излагается информация, и т.п. И если в силу каких-то обстоятельств не учитываются возможности учащихся, то как результат следует «неудача обучения». Кроме того, нередки случаи, когда учащийся с хорошей слуховой памятью достаточно точно цитирует несложный вербальный фрагмент текста (определение или теорему), но затрудняется в применении его положений, не владеет инструментами к выявлению его содержательной стороны, основы. Один из путей решения проблемы мы видим в использовании различных языков предъявления информации и развитии навыков перевода с одного языка на другой.

Текст — рисунок

Перевод слова в образ может сопровождать все основные этапы изучения вербального фрагмента. При этом значительно возрастают требования к выполнению рисунка-иллюстрации. Хороший рисунок «Tacet, sed loquitur» (молчит, но говорит) помогает усвоению содержания текста. Действительно, геометрическая интерпретация данных позволяет охватить содержание информации «в целом», выделить стандартные визуальные образы, определить общие или особые (одинаковые или различные) элементы, с помощью которых можно выйти на правильное решение, обобщить на уровне зрительного восприятия многие теоретические положения. Этот момент мы считаем чрезвычайно важным. Он создаёт необходимую основу для взаимообратного перевода с «языка слов» на «явык зрительных образов».

Задания типа: «Скажите, о чем говорится в задаче?», «Определите, что изображено на картинке?», «Уточните, чему посвящено содержание теоремы?» часто ставят учащихся в тупик. На вопрос: «Возникают ли в вашей учебной деятельности ситуации, когда преподаватель спрашивает, а вы даже не знаете, о чём нужно говорить?» ответ в различных группах однозначен: «Почти всегда».

Данное явление объясняется тем, что учащиеся не умеют из информации, предъявленной им тем или иным образом, выявить понятие, являющееся центральным, т.е. осуществить хотя бы частичный перевод. Такой перевод станет возможен, если учащийся сумеет произвести «разбиение изучаемого материала на небольшие порции по смысловому содержанию с выделением опорных пунктов в форме тезисов, заголовков, вопросов».

Разбор любой визуальной задачи можно начинать в рамках известной конструкции Пойя: Что? Где? Когда?* Наибольшие затруднения вызывает ЧТО-вопрос. Учащийся не понимает, что на самом деле его спрашивают: «Какое из понятий здесь изображено?», и только потом возникает требование описания свойств этого понятия. А раз неясен сам изначальный вопрос, то отсюда, как следствие, и непонимание, в каком направлении проводить анализ данных. Здесь, на наш взгляд, должно в первую очередь сработать начальное «звено цепочки», с неизменно заложенными в ней связями: картинка — наименование — формула. Таким образом, все сводится к умению учащихся понимать и выстраивать словесные, а затем (или же одновременно) и формульные описания визуальной информации. У Пойя эти рекомендации несколько расширены: «Ваши лучшие пять друзей: Что? Почему? Где? Когда и Как? Если вам нужен совет, обратитесь к Что, обратитесь к Почему, обратитесь к Где, Когда и Как — и больше ни к кому не обращайтесь»**. Все это мы рассматривали как бы со стороны ученика. Теперь обсудим эту же проблему со стороны учителя.

* Пойя Д. Как решать задачу. М.: ГИЗ МП РСФСР, 1961. С. 107.

** Там же. С. 103.

При постановке вопросов полезно учитывать положение Белнапа: «По числу предоставляемых альтернатив вопросы можно разбить на два класса. В один класс попадают вопросы, которые задают небольшое или во всяком случае ограниченное число альтернатив, а в другой— вопросы, которые задают бесконечное или по крайней мере большое число альтернатив ...»*.

* Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1961. С. 29.

Итак, изучение картинки сопровождается серией вопросов. Однако если вопрос содержит слишком большое число альтернатив, то он ставит ученика в тупик. Следовательно, необходимы вопросы, которые предусматривают определённые, достаточно чёткие альтернативы. Такие вопросы могут формироваться по принципам Пойя: «Характерные черты, общие для всех вопросов и ответов таковы: здравый смысл и общность. Будучи выведенными из простого здравого смысла... они могут сами собой прийти в голову ученику. Будучи общими, они оказывают ненавязчивую помощь, они просто дают общее направление, оставляя учащемуся обширное поле деятельности»*.

* Пойя Д. Как решать задачу. М.: ГИЗ МП РСФСР, 1961. С. 14.

В школьной практике подобные альтернативы весьма полезны— каждый ученик может дать свой ответ и выслушать точку зрения другого. При этом учитель имеет возможность получить информацию о полноте и точности их представлений.

Рисунок — формула

Перейдём к следующей визуальной комбинации «рисунок — формула». Как показала практика, отказ от использования знаков теоретико-множественной символики не упростил обучение. Учащийся волей-неволей вынужден применять различные символы, аббревиатуры в повседневной жизни. Лишая преподавание его важнейшего инструмента — символьного способа предъявления, уменьшая поле его действия и значение, мы, по-видимому, противоречим возникающим новым способам общения. При целенаправленном обучении формирование умения видеть в символических образах содержание может дать инструмент к познанию. «Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность, по существу, является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения».

Геометрическая интерпретация данных с параллельной фиксацией их в виде цепочки символов позволяет составлять план описания рисунка (иллюстрации, чертежа).

Так, к примеру, действуя по принципу «вижу-пишу», можно обосновать все логические переходы в решении задачи: «Дать по рисунку определение возрастающей функции». Если ученик применит алгоритм «Что и Какая? Где? Когда и Как?», то он сможет фиксировать:

а) $f(x)\uparrow$;

б) $x_1, x_2 \in [a,b]$;

в) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Несмотря на то что переход от рисунка к формуле наиболее прост, не всегда такой рисунок в тексте задан. Следовательно, нужно разработать такую методику, которая направляла бы ученика как можно чаще переводить формульную информацию в геометрический образ и уже от него переходить к формуле-результату.

Ярким примером такой методики является часто применяемый учителями способ получения общего решения тригонометрического уравнения.

Например, для решения уравнения $\sin 2x=1/2$ рекомендуется сначала изобразить соответствующие точки на тригонометрическом круге, а затем записать решение в виде формулы:

$x = \pi/4\ (2k+1)$ или $x = \pm\ \pi/4 + \pi k\ (k \in Z)$.

Текст — формула — рисунок

При переходе от текста к формуле активно работает абстрагирование.

Например, решая задачи международного конкурса «Кенгуру», его участники в каждой задаче должны, учитывая реальные или вымышленные условия её сюжета, абстрагироваться от конкретной ситуации. Одной из главных направляющих здесь является дифференциация данных по степени существенности их вхождения в условие задачи.

> У змея Горыныча **20000** голов. Сказочный богатырь отрубил ему одним ударом меча **139** голов. На сколько голов у змея Горыныча больше чем у богатыря?

Для полноты общей картины дадим краткое описание отношения «формула — рисунок». Как мы уже сказали, переход от рисунка к формуле осуществить достаточно легко. С переходом от формулы к рисунку дело обстоит значительно сложнее. Здесь совершенно необходимо абстрагирование от конкретных условий.

Продемонстрируем этот процесс на примере следующей задачи: «Выяснить, какое из чисел больше: $3^{5/4}, 3^{\sqrt{2}}$ или $3^{3/2}$?»

Что может и должен увидеть ученик в ряду заданных чисел? Явным образом просматривается общее основание — число 3, все остальные знаки — показатели степеней этого числа. Требование выстроить данные числа по принципу сравнения также вполне очевидно. Исходные данные распределяются в последовательности: $1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно извлечь фрагмент теории, который позволит получить результат с помощью визуально-логических умозаключений, а не путём вычислений.

Абстрагирование в большинстве подобных случаев можно осуществить с помощью введения стандартного визуального образа, связи между элементами которого дадут необходимые для решения действия.

Поскольку «Абстрагирование не может осуществляться без обобщения, без выделения того общего, существенного, что поможет абстрагированию», мы можем составить следующий план перехода формулы в картинку:

а) определение общего (чаще всего одинакового); исключение несущественного в этом общем (например, конкретных числовых значений);

в) переход к визуальному образу (т.е. выявление структурных связей);

г) подстановка изъятых данных (возвращение, внедрение несущественного, конкретного);

д) получение ответа.

Данный алгоритм позволяет активно использовать стандартные зрительные образы, образуя у ученика прочный навык извлечения их из памяти и применения при решении учебных задач. Здесь мы применили принцип «геометрического познания» по терминологии Биркгоффа, автора книги «Математика и психология». По его мнению, «блестящие достижения греческой математики зависели от сочетания логики с зрительным воображением, без предпочтения той или другой составляющей»*.

---

* Биркгофф Г. Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977. С. 39.

(Продолжение следует)