Пучки задач как средство построения методик продуктивного обучения

Бузлаева Екатерина Николаевна, аспирантка СПбГУ, специальность теория и методика обучения математике.
Иванов Олег Александрович, доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей геометрии СПбГУ. Сфера научных интересов — дифференциальные уравнения, проблемы математического образования.

В работе исследуется возможность построения методик обучения, обеспечивающих усиление обучающей роли задач в процессе изучения математики. С теоретической точки зрения ключевыми моментами при разработке подобных методик являются понятия *пучков задач* и *структурообразующих вопросов*.

Прежде всего приходится с сожалением констатировать, что все попытки реформировать обучение математике в школе не приносят желаемых результатов. Математическое образование, которое получает большинство выпускников средней школы, чересчур формально и не образует того, что принято называть системой знаний. В подтверждение этой вполне пессимистической точки зрения приведём некоторые фактические данные. В 1999 году на олимпиаде одиннадцатиклассникам была предложена следующая задача, решение которой, как нетрудно видеть, сводится к цепочке простых логических рассуждений и использованию стандартных формул.

а) Решите систему

$$\sin x \cos x = 0$$
$$\cos x \sin x = \frac{1}{2}$$

{¿¿¿ ¿ ¿

Однако для того, чтобы получить правильный ответ, эти стандартные формулы следовало ещё правильно проинтерпретировать. Не приводя ответ полностью, выпишем одну из четырёх серий решений:

$$(x, y) = \left(2\pi k, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right), \qquad k, n \in Z$$

К сожалению, 125 из 420 участников олимпиады вместо этого привели свой ответ в виде:

$$(x, y) = \left(2\pi k, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right), \qquad k \in Z$$

(упустив тем самым, условно говоря, большую часть решений). Правильно решили эту задачу всего 112 человек, а 135 даже допустили ошибки при решении стандартных тригонометрических уравнений.

Статус этой олимпиады предполагает, что в ней принимают участие только те выпускники школ Санкт-Петербурга, которые достаточно высоко оценивают свои знания математики и интересуются ею настолько, чтобы прийти на олимпиаду математико-механического факультета. Таким образом, множество её участников — не случайная выборка из всех одиннадцатиклассников: эту олимпиаду можно рассматривать в качестве «срезовой контрольной» для выпускников классов с углублённым изучением математики. Тем грустнее анализировать общую статистику: половина участников решила менее трёх из предлагавшихся на олимпиаде десяти. Приведённый пример весьма точно характеризует уровень предлагавшихся задач, сложность которых была чуть выше школьной. Однако оказалось, что наши школьники не в состоянии справиться с задачей, если существенную (хотя и небольшую) часть её решения составляет логическое рассуждение.

Далее, интересные данные были получены в результате проведенного в 1999 году совместного российско-британского исследования (см. [7]), которые показывают, что в нашем школьном математическом образовании слабо представлены такие формы математической деятельности, как *кодирование* информации и *интерпретация* результатов. В преподавании математики в российской школе по-прежнему доминирует формальный подход, связанный с отработкой конкретных методов решений. В связи с этим полезно вспомнить работу [1], в которой говорилось, что если учащемуся предлагают упражнения только одного типа, выполнение каждого из них сводится к одной и той же операции. Если эту операцию не приходится выбирать среди сходных, и условия, данные в упражнении, не являются для учащегося непривычными, и он уверен в безошибочности своих действий, то учащийся перестает задумываться об их обоснованности. Авторы этого тезиса приводят следующую психолого-дидактическую закономерность: последовательность рассуждений (A, B, C, ... M), повторяющаяся при решении однотипных задач, может свёртываться до составной ассоциации (A, M). Однако обратный процесс — развёртывание — не у всех учащихся происходит без потерь. Поэтому в некоторых случаях желательно замедлить процесс свёртывания (мы вернёмся к этой мысли чуть далее; см. также [8]).

Понятие «пучка задач» было введено одним из авторов данной статьи (см. в [4, 5]; оно нашло практическое применение при составлении вариантов контрольных и экзаменационных работ для учащихся специализированных классов и школ Санкт-Петербурга (см. [6]). С дидактической точки зрения пучком задач становится такая их совокупность (*дидактическая единица*), определяющей характеристикой которой является наличие разнотипных взаимосвязей между отдельными составляющими эту совокупность задачами, обеспечивающее включение обратной связи в процессе их решения. Различные эмпирические данные позволяют утверждать, что построение занятий на основе пучков задач способствует лучшему пониманию сути математических методов и самого предмета математики.

В этой работе мы опишем, каким образом можно использовать пучки задач для организации обобщающего повторения на уроке. Цель подобных занятий — «превращение суммы знаний учащихся в систему, что предполагает на определённом этапе обучения необходимость перекомпоновки, соподчинения, систематизации материала, выявления новых связей и отношений между элементами этой суммы знаний» [5].

Рассмотрим план урока по теме «Решение иррациональных уравнений и неравенств» и дадим необходимые пояснения и комментарии. Как будет видно из дальнейшего изложения, в процессе обсуждения предложенных задач будут затронуты также вопросы, связанные с такими темами, как: логика в математических рассуждениях; свойства числовых неравенств; графики элементарных функций и преобразования графиков; свойства функций и графическая интерпретация решений уравнений и неравенств*.

* Как сказано в [2], «наибольший дидактический эффект получается при создании специфически нового учебного предмета, когда основные теоремы алгебры или анализа сопровождаются геометрическим толкованием, и наоборот».

Перейдем непосредственно к самому уроку.

Пример 1

Решите неравенства:

а) $\sqrt{x+3}\le x-3$; б) $\sqrt{x+3}\le|x-3|$.

б) Найдите наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x+3}>|3-|x||$.

в) Найдите все значения a, при которых неравенство $\sqrt{x+3}>a|x-3|$ выполняется для всех $x\ge6$.

На первых порах учащимся бывает трудно и даже подчас невозможно без посторонней помощи понять существующую взаимосвязь между различными задачами. С другой стороны, математическая суть каждой из них, границы применимости используемых методов решений и их внутренней логики могут быть полнее осознаны при сопоставлении немного (но лишь по внешнему виду) отличающихся по своим формулировкам задач. Важную роль в этом процессе играют задаваемые учителем специально сконструированные вопросы. Школьникам полезно не просто угадывать верные ответы, а логически обосновать их и даже попытаться записать проводимые рассуждения. В связи с тем, что подобные вопросы способствуют выявлению внутренней структуры и конкретных задач и общих методов, естественно назвать их *структурообразующими*.

Приведём набор заданий, ответы на которые следует обсудить и получить до того, как учащиеся непосредственно приступят к решению примера 1:

— докажите, что всякое решение неравенства а) является также решением неравенства б); можно ли утверждать обратное? (приведите контрпример!);

— докажите, что неравенства а) — б) на луче имеют одно и то же множество решений; что можно сказать о множестве решений неравенства в) на этом луче?

— какие значения заведомо не удовлетворяют условию пункта г)?

— верно ли, что всякое решение каждого неравенств а) — в) является также и решением соответствующего неравенства, полученного из него при возведении обеих его частей в квадрат?

— приведите примеры, для которых обратное утверждение неверно.

И самый последний (который может быть задан и первым!) вопрос:

— какое из неравенств а), б), в) или г) проще всего решить?

Ещё одна педагогическая задача, которая решается посредством предварительного обсуждения вопросов, относящихся к заданию в целом, состоит в том, что при этом происходит «торможение» процесса перехода к непосредственному решению для того, чтобы учащиеся начали мыслить, а не действовать по укоренившемуся шаблону, что к тому же развивает и навыки самоконтроля*.

* «Instruction and pedagogical devices are often required interrupting the physical immediacy of situation, so that the teacher may encourage reflection, prediction, and thought» [8]

Отметим, что, несмотря на достаточно простые формулировки, пример 1 можно предварить богатым набором структурообразующих вопросов. Приведём еще несколько: на каком промежутке находятся решения неравенства а)?; выберите вид решения неравенства а) из следующего списка и обоснуйте ваш выбор: $(-\infty;A]$, $[A;B]$, $[0;A)$, $[3;A]$, $[A;+\infty)$, $[A;B]$, $[C;+\infty)$, $[A;B]\cup[C;D]$, где $A>3$, (подсказка — какая из функций быстрее стремится к бесконечности: $y=\sqrt{x+3}$ или $y=x-3$?); что можно сказать о решении неравенства в) на луче $[3;+\infty)$? и объясните теперь полную очевидность ответа этого задания.

Пример 2

Придумайте иррациональное неравенство, множеством решений которого является вся его область определения.

Важно рассмотреть хотя бы некоторые из придуманных учащимися задач в аудитории для того, чтобы обсудить, в чём их сходство и в чём различие. Составление таких задач позволяет не только заглянуть «внутрь» конкретной задачи, но и представить общую картину, уже не говоря о том, что процесс «предварительного обсуждения — решения обсуждения» вызывает интерес школьников к рассматриваемой теме и развивает свободу мышления, способствует правильной организации знаний учащихся.

Пример 3

а) Решите уравнение $\sqrt{x+2}=x$.

б) Найдите все *a*, такие что произведение корней уравнения $\sqrt{x+2}=a|x|$ равно -2.

в) Решите уравнение $\sqrt{x+2}=x-a$.

г) Найдите все *a*, при которых уравнение $\sqrt{x+2}=|x|-a$ имеет ровно два решения.

Задание читателю: проанализируйте предложенный пример и дополните набор приводимых ниже (структурообразующих) вопросов, которые необходимо обсудить с учащимися. Вполне вероятно, что в конкретной аудитории придётся снова обсудить те же задания, что и перед решением примера 1 (те из них, которые вызвали наибольшие затруднения).

— Объясните появление постороннего корня при возведении уравнения а) в квадрат;

— в какой области решения уравнений в) и г) заведомо совпадают?

— следует ли из того, что уравнение в) имеет два корня, то, что уравнение г) также имеет два корня?

— докажите, что одно из решений (какое именно?) уравнения г) является также решением уравнения в);

— какие значения в пункте б) заведомо не нужно рассматривать?

— при каких уравнение б) имеет два решения?

Как вы считаете, часто ли после подобного обсуждения учащиеся будут делать стандартную ошибку — игнорировать знаки частей уравнения при возведении их в квадрат (что и приводит к появлению «лишнего» корня)?

Последнее из предлагаемых для решения и обсуждения заданий.

Пример 4

Придумайте иррациональное уравнение, имеющее 0, 1, 2 или 3 корня.

В конце урока целесообразно провести небольшую самостоятельную работу.

Контрольное задание.

Дана функция $y=\sqrt{4x+1}$.

а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку её графика с абсциссой $x = -2$ и параллельной прямой $y = -x$.

б) Решите неравенство $\sqrt{4|x|+1}\le 5-|x|$.

в) Найдите число целых значений *x*, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{4|x|+1}\ge 5-|x|$.

г) Найдите все *a*, при которых все $x\in\left[-\frac{1}{4};2\right]$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{4|x|+1}<a-x$.

Попробуйте объяснить полученные ответы: а) чисто логически и б) наглядно-графически.

Авторы убеждены, что пучки задач как нельзя лучше подходят для того, чтобы дать учащимся не просто разрозненный набор фактов, а сформировать именно систему знаний, а на первых порах наибольший эффект достигается при сочетании пучков задач и системы структурообразующих вопросов.

Литература

1. *Груденов Я.И., Середа А.М., Середа В.И.* Психология подсказывает методике // Математика в школе. 1990. Вып. 6. С. 36–37.
2. *Гусев В. А.* Индивидуализация учебной деятельности учащихся на основе дифференциального обучения математике в средней школе // Математика в школе. 1990. Вып. 4. С. 27–32.
3. *Далингер В. А.* Методические рекомендации к проведению обобщающего повторения // Математика в школе. 1983. Вып. 1. С. 10–12.
4. *Иванов О. А.* Обучение поиску решения задач (фантазии в манере Пойи) // Математика в школе. 1997. Вып. 6. С. 47–51.
5. *Иванов О. А*. Теоретические основы построения системы специальной математической и методической подготовки преподавателей профильных школ. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997.
6. *Иванов О. А.* Практикум по элементарной математике. Алгеброаналитические методы: Учебн. пособие. СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. 224 с.
7. *Evans W., Ivanov O., Karp A*. Classroom Activity vs Examination: Beliefs and Practice in Mathematics Education (a Russian / UK Comparative Study), Workshop at CIEAEM-51, Chichester, UK, 1999 (to appear).
8. *Pimm D.* Diverse Communications, In: Communication in Mathematics: K-12 and Beyond, 1996. Yearbook, NCTM, Inc., Restin, 1996. P. 11–19.