Решение нестандартных задач — основа творческой деятельности учащихся

Хабибуллин К.Я.

Творческая деятельность учащихся в процессе изучения математики заключается, прежде всего, в решении задач. Умение решать задачи характеризует в первую очередь способности учащихся применять свои теоретические познания в конкретной ситуации. Только те учащиеся, которые успешно решают математические задачи, могут с полным основанием утверждать, что они освоили науку математику и что они владеют ей хорошо. Известный современный методист и математик Д. Пойа пишет: "Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причём не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности". [1]

При решении традиционных школьных задач учащиеся применяют для их решения определённые знания, умения и навыки по узкому кругу вопросов программного материала. Поэтому их роль заключается в отработке и закреплении таких конкретных умений и навыков. При этом известная алгоритмизация способов их решения ограничивает творческий поиск учащихся. Учащиеся, постоянно следуя жёстко предписанным операциям, привыкают к однотипным действиям, что, естественно, тормозит их творческую активность.

Нестандартная задача в отличие от традиционной не может быть непосредственно (в той форме, в которой она предъявлена) решена по какому-либо алгоритму. Вот как определяют понятие нестандартной задачи в методической литературе: "Нестандартные задачи — это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения". [2] Следовательно, возникает необходимость поиска решения, что требует творческой работы мышления и способствует его развитию. Д. Пойа высоко оценивает значение для воспитания творческих способностей учащихся при обучении математике решения нестандартных задач, порождающих напряжённость поиска и радость открытия — важнейшие факторы развивающего обучения. "Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательными, то вы можете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы". [3]

Однако следует заметить, что понятие "нестандартная задача" является относительным. Одна и та же задача может быть стандартной или нестандартной в зависимости от того, знаком учащийся со способами решения задач такого типа или нет. Но тем не менее решение любой задачи, являющейся на данный момент для него нестандартной, требует достаточно больших усилий, творческого подхода. Необходимость творческого подхода к решению таких задач обуславливается тем, что они для учащегося — новые как в плане формулировки, так и в способах решения. Решённая нестандартная задача или так называемая задача повышенной сложности — это серьёзное открытие, творческое достижение. А как известно из психологии, именно создание чего-либо нового характеризуется как творчество.

"Творчество — деятельность, результатом которой является создание новых материальных и духовных ценностей. …Творчество предполагает наличие у личности способностей, мотивов, знаний и умений, благодаря которым создаётся продукт, отличающийся новизной, оригинальностью, уникальностью" [4, с. 393].

Естественно, создание нового применительно к процессу решения задач имеет некоторую относительность. Новизна и совершаемые открытия в этом случае субъективны. Значимость этой новизны также относительна. Но тем не менее решение задач повышенной трудности или нестандартных задач — это творческая деятельность, потому что участие школьников в этом процессе показывает их готовность к поиску решения проблем, к творческому преобразованию действительности.

В психологических исследованиях показано: содержание становится предметом творческой деятельности учащихся тогда, когда оно предстаёт перед ними в виде интересной задачи, направляющей и стимулирующей их активность.

Творческая деятельность учащихся при решении нестандартных задач проявляется в таких действиях, как сопоставление данных, комбинирование данных задачи, поиск путей сведения данной задачи к ранее решённым задачам, вспомогательные построения, введение вспомогательных элементов, замена одних элементов другими и т.д. Безусловно, что решение нестандартной задачи — очень сложный процесс, для успешного осуществления которого учащийся должен уметь думать, догадываться, хорошо знать изученный и изучаемый материал, владеть общими подходами к решению задач и конкретными приёмами решения.

Способность учащихся решать нестандартные задания показывает их творческие возможности, умение мыслить оригинально и в целом их творческое развитие. Поэтому обучение учащихся решению нестандартных задач имеет большое значение при формировании и развитии творческих способностей учащихся.

Актуальность формирования и развития творческих способностей учащихся следует также из анализа материалов вступительных экзаменов в высшие учебные заведения.

В последние годы среди материалов вступительных экзаменов по математике в различные высшие учебные заведения страны встречаются достаточно сложные задания, представляющие серьёзную трудность для абитуриентов, привыкших выполнять лишь стандартные задачи. К таким заданиям можно отнести комбинированные уравнения и неравенства, в которых одновременно применяются различные функции в различных отношениях. Очевидно, такие задания даются с целью проверки способности учащихся творчески мыслить и умение применять свои знания в нестандартных ситуациях. Поэтому школьников необходимо учить творческому подходу к решению задач.

Трудности учащихся при решении задач вообще и нестандартных задач в частности объясняются несколькими причинами. Во-первых, психологическим фактором, выражающимся в нежелании решать задачи из-за боязни их трудности, из-за неуверенности учащихся в своих силах и возможностях. Во-вторых, техническим и методическим факторами, то есть отсутствием необходимых для этого умений и навыков.

Психологические исследования проблемы воспитания творчества учащихся в процессе решения задач показывают, что основные причины несформированности у учащихся общих умений и способностей к решению задач состоят в том, что школьникам не даётся необходимых знаний о сущности задач и методах их решений и поэтому они выполняют эту работу, не осознавая при этом своей творческой деятельности. Для решения таких проблем нужно вооружать их различными общими методами и частными приёмами решения задач.

Эффективным и красивым способом решения нестандартных заданий, особенно комбинированных уравнений и неравенств, является такой нестандартный приём, как выделение полного квадрата из аналитического выражения уравнения или неравенства. Воспитание у учащихся умения видеть полный квадрат в заданном выражении существенно облегчит им поиски решения задачи. При этом уравнения или неравенства, являющиеся довольно-таки сложными при решении их напрямую, после соответствующих преобразований сводятся к стандартному виду и решаются легко. Кроме этого выделение полного квадрата в аналитическом выражении уравнения или неравенства помогает привести это выражение в удобный для различных рассуждений вид.

Рассмотрим решение нескольких уравнений и неравенств методом выделения полного квадрата какого-либо выражения.

Пример 1. Решить уравнение:

$$x^2+\frac{9x^2}{(3+x)^2}=7$$

Решение: Попытки решить это уравнение стандартным путём, то есть приведением к общему знаменателю, приводят к уравнению 4-й степени, решить которое в данном случае затруднительно. Надежда угадать корни путём перебора вариантов не осуществима, так как у этого уравнения нет рациональных решений. Поэтому откажемся от этого замысла и попробуем выделить полный квадрат в левой части уравнения. Для этого к левой части уравнения прибавим и отнимем одно и то же выражение

$$2x\frac{3x}{3+x},$$

представляющее собой удвоенное произведение двух слагаемых

$$x \text{ и } \frac{3x}{3+x},$$

квадраты которых заданы в условии. При этом данное уравнение перепишется в виде:

$$x^2-2x\frac{3x}{3+x}\frac{9x^2}{(3+x^2)}+2x\frac{3x}{3+x}=7.$$

Первые три слагаемых представляют собой квадрат разности, и поэтому получится такое уравнение:

$$\left(x^2-\frac{3x}{3+x}\right)^2=7-\frac{6x^2}{3+x},$$

которое после несложных преобразований можно представить в виде:

$$\left(\frac{x^2}{3+x}\right)^2=7-\frac{6x^2}{3+x}.$$

Применим ещё один стандартный приём: замену переменной. Обозначим выражение

$$\frac{x^2}{3+x}$$

через t и заменим его. Получим квадратное уравнение относительно t:

$$t^2+6t\text{-}7=0,$$

корнями которого являются числа -7 и 1. Вернувшись к нашему обозначению, решим два уравнения

$$\frac{x^2}{3+x}=-7 \text{ и } \frac{x^2}{3+x}=1$$

первое из которых не имеет решения, а решениями второго являются числа

$$\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Таким образом, данное уравнение имеет два решения [5].

Ответ:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0 \quad .$$

Решение: Заменив 1 = *sin*² (*xy*) + *cos*² (*xy*), перепишем данное уравнение в виде:

$$x^2+2x\sin(xy)+\sin^2(xy)+\cos^2(xy)=0 \quad .$$

В левой части уравнения легко выделяется полный квадрат двучлена, и получится такое уравнение:

$$(x+\sin(xy))^2+\cos^2(xy)=0 \quad ,$$

левая часть которого является суммой неотрицательных чисел и имеет решение при одновременном выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x^2+\sin(xy)=0 \\ \cos^2(xy)=0 \end{cases}$$

Из условия *cos* (*xy*) = 0

следует, что *sin* (*xy*) = ±1. Поэтому полученная система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2+1=0 \\ \cos(xy)=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-1=0 \\ \cos(xy)=0 \end{cases}$$

Решениями этих систем являются соответственно пары чисел:

$$x=1,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ n\in Z$$

$$x=-1,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi r,\ r\in Z$$

Ответ:

и

$$x=1,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ n\in Z$$

[5].

$$x=1,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ n\in Z$$

Пример 3. Решить уравнение

$\cos(\pi x) + x^2 + 6x + 10 = 0$.

Рассмотрим функции

$f(x) = \cos(\pi x)$ и

$g(x) = x^2 + 6x + 10$.

Преобразуем функцию $g(x)$, выделив полный квадрат из выражения $x^2 + 6x + 10$.

Так как $|f(x)| \le 1$, а $|g(x)| \ge 1$,

их сумма равна нулю лишь при выполнении одного условия, а именно при $f(x) = -1$ и $g(x) = 1$, то есть данное уравнение равносильно системам уравнений:

$$\begin{cases} \cos(\pi x) = -1 \\ (x+3)^2+1=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos(\pi x) = -1 \\ x+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x=\pi+2\pi n,\ n\in Z \\ x=-3 \end{cases}$$

Полученная система уравнений совместна при $n = 1$ и $x = -3$

Ответ: $x = -3$.

Пример 4. Найти все значения параметра а, при которых неравенство

$$\cos x-2\sqrt{x+9}\le-\frac{x^2+9}{a\cos x}-a$$

имеет единственное решение [6].

Решение: Перепишем данное неравенство так:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} + \frac{x^2+9}{a+\cos x}$$

Приводим левую часть неравенства к общему знаменателю и после несложных преобразований получим неравенство:

$$\frac{\cos^2 x + \left(x^2+9\right) + a^2 + 2a\cos x - 2a\sqrt{x^2+9} - 2\cos x\sqrt{x^2+9}}{a+\cos x} \le 0$$

Очевидно, что в числителе полученного неравенства —полный квадрат трёхчлена и поэтому неравенство примет вид:

$$\frac{\left(\cos x + a - \sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x} \le 0$$

Для того чтобы данное неравенство имело единственное решение, необходимо выполнение условия $\left(\cos x + a - \sqrt{x^2+9}\right)^2 = 0$, т.е. $\cos x + a = \sqrt{x^2+9}$.

Решим полученное уравнение графическим способом. Построим графики функций $y=\cos x + a$ и $y=\sqrt{x^2+9}$ (См.рис.).

Уравнение имеет единственное решение, когда графики функций имеют лишь одну общую точку. В данном случае графики функций $y=\cos x + a$ и $y=\sqrt{x^2+9}$ имеют только одну общую точку с координатами (0;3) при условии, что $a = 0$.

Ответ: $a = 2$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left(x^2-6|x|-a\right)^2 + 12\left(x^2-6|x|-a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$ имеет два корня [6].

Решение: Выделим в левой части уравнения полный квадрат и после несложного преобразования получим следующее уравнение:

$$\left(x^2-6|x|-a+6\right)^2 + 1 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

Применяем рассуждения, аналогичные примеру 3. Полученное уравнение имеет решение только при выполнении условий:

$$\cos\frac{18\pi}{a} = 1$$
$$x^2 - 6|x| - a + 6 = 0$$

¿

|¿ ¿ ¿

¿

Из первого уравнения системы следует, что $\frac{9}{a} = n,\ n \in Z$ или $a = \frac{9}{n},\ \in Z$

Из последнего равенства получаем, что параметр a находится среди чисел $+9,\ \pm\frac{9}{2},\ \pm 3,\ \frac{9}{4},\ \pm\frac{9}{5},\ \pm\frac{9}{6},\ \pm\frac{9}{7},\ \pm\frac{9}{8},\ \pm 1,\ \pm\frac{9}{10}$ и т.д.

Перепишем второе уравнение системы, выразив параметр a через переменную x и решим его графически на координатной плоскости $(x;\ a)$ (См.рис.).

$$a = x^2 - 6|x| + 6$$

На графике видно, что из перечисленных значений параметра a условию задачи удовлетворяют лишь два значения: a = - 3 и a = 9 , так как при этих значениях параметра графики имеют две общие точки пересечения.

Ответ: $a = -3$, $a = 9$.

Использованная литература

1. *Пойа Д.* Математическое открытие. М., 1970. С. 16.
2. *Фридман Л.М. Турецкий Е.Н.* Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1989. С. 48.
3. *Пойа Д.* Как решать задачу. Львов: Журнал “Квантор”. 1991. С. 5.
4. Психологический словарь/Под общей редакцией *А.В. Петровского, М.Г. Ярошевской.* Политиздат. 1990.
5. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для 10–11 кл. сред. шк./*Б.М.Ивлев, А.М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С.И. Шварцбурд.* М.: Просвещение, 1993.
6. *Черкасов О.Ю., Якушев А.Г.* Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Рольф, 1997.