Методика моделирования дробных чисел в условиях повторительного школьного курса математики

Татьяна Ивановна Кузнецова,
профессор Центра международного образования МГУ имени М.В. Ломоносова, доктор педагогических наук, kuzti45@gmail.com

• дробное число • числовая ось • изображение • теорема Фалеса • генетическое дерево • предвузовское образование •

Оценивая учебник, обычно говорят, что он логичен или нелогичен. Что же может пониматься под этими словами?

Логика — это наука о наиболее общих законах и формах мышления, под логикой понимают также ход рассуждений, умозаключений. Логика учит, как правильно построить рассуждение, чтобы прийти к истинному выводу из истинных посылок, она считает верным рассуждение, характеризующееся последовательностью, непротиворечивостью, доказательностью. В учебном процессе под «логичностью» изложения чаще всего понимают такую последовательность его рассмотрения, при которой любая последующая порция материала основывается на предыдущей.

В школе обычно используют такие приёмы умственной деятельности, как описание изучаемого объекта, его обсуждение, рассказ об объекте, сочинение о его свойствах и т. п. Эти и любые подобные им приёмы называют термином «описание». Описать какой-либо объект — значит перечислить ряд признаков, которые более или менее полно раскрывают его. При описании желательно начинать с наиболее значимых характеристик объекта и переходить к менее значимым. Если в описании мысли связаны так, что содержание каждой с необходимостью вытекает из предыдущей и предыдущее позволит понять последующее, то такое описание называют *систематическим*. Учебный материал, построенный по методическому принципу систематичности, усваивается учащимися без особых затруднений.

1. Постановка задачи. Нами было выявлено нарушение логической последовательности в школьном изложении изображения дробных чисел на числовой оси, восстановлена историческая «научная» справедливость в этом вопросе и глобально намечена логическая последовательность его решения[1]. Теперь мы должны восстановить его «генезис», то есть реконструировать систему понятий и предложений, необходимых для осуществления логической последовательности изложения материала, начиная с самых азов — от основных понятий и аксиом. А это не что иное, как генетическое дерево, которое представляет собой специальный граф — его-то и предстоит нам наметить.

2. Основные понятия. Итак, мы имеем задачу изображения дробей на числовой оси. Сначала перечислим основные понятия, используемые в формулировке задачи:

1) дробь;
2) числовая ось;
3) изображение дроби на числовой оси.

Каждое из этих понятий не является основным, то есть каждое из них является сложным понятием, использую-

[1] **Кузнецова Т.И.** К вопросу о принципе единства исторического и логического в преподавании повторительного курса математики в условиях предвузовского образования // Вестник ЦМО МГУ. 2000. № 3. Ч. 3. С. 54–85.

щим другие, менее сложные, которые находятся «ближе» к основным понятиям в генетическом дереве рассматриваемой задачи. Поскольку изображение на числовой оси отрицательных дробей осуществляется аналогично изображению положительных дробей (только в другую сторону относительно начала отсчёта) и поскольку такой частный случай дроби, как число нуль, изображается самим началом отсчёта и потому не вызывает никаких трудностей в изложении и усвоении, позволим себе ограничить свои исследования только положительными дробями, т. е. дробями вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Кроме того, вследствие специфики объекта нашего исследования из всех интерпретаций дробей выберем интерпретацию с помощью отрезков прямой.

3. Обратный ход путём генетического исследования. Учитывая только что сделанные оговорки, рассмотрим, какие понятия используются при введении понятий 1) — 3). Покажем, как мы это делаем для 1):

1.1) знаменатель;
1.2) числитель;
1.3) черта дроби.

В работе автора[2] было сконструировано генетическое дерево и описано дальнейшее продвижение к «корням дерева», которое можно представить на рис. 1. Из схемы видно, что осталось вскрыть только генезис теоремы Фалеса. Мы реализовали принцип научности изложения, пройдя по сконструированному генетическому дереву снизу вверх по всем остальным ветвям.

4. Метод полной математической индукции. Прежде чем приступать непосредственно к теореме Фалеса, обратим внимание читателя на метод полной математической индукции. В работе автора[3] предлагается преподносить его с помощью аксиом Пеано. Существует полное обоснование возможности и целесообразности использования этого способа на подготовительном факультете[4].

5. Генетическое дерево теоремы Фалеса. Перейдём теперь непосредственно к теореме Фалеса — восстановим её генетическое дерево. Прежде всего, вспомним формулировку в её расширенном виде:

«Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые отсекут на второй прямой равные между собой отрезки».

5.1. Проанализируем эту формулировку, рассматривая её как задачу. Для начала выделим понятия, которые используются в этой формулировке:

(1) Две прямые.
(2) Равные отрезки.
(3) Несколько равных отрезков.
(4) Отложить отрезок на данной прямой от заданной точки.
(5) Параллельные прямые.
(6) Несколько параллельных прямых.
(7) Через заданную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
(8) На прямой «отсечь» отрезок.

Понятие равных отрезков (2) обсуждалось в п. 3.4[5], понятие параллельных прямых (5) необходимо предварительно ввести, что обычно и делается на одном из первых занятий при обсуждении взаимного расположения двух прямых[6].

Понятия нескольких равных отрезков (3) и нескольких параллельных прямых (6) подразумевают использование свойства транзитивности равенства отрезков и параллельности прямых. В средней школе на этом внимание учащихся, как правило, не акцентируется — эти свойства считаются естест-

[2] **Кузнецова Т.И.** К вопросу о реализации принципа единства генетичности и научности на уровне предвузовской математической подготовки. — В кн.: Секции «Методика и педагогика» и «Проблемы высшего и среднего образования в XXI веке». Труды XXXVII Всероссийской научной конференции по проблемам математики, информатики, физики, химии и методики преподавания естественнонаучных дисциплин. 22–26 мая 2001 г., г. Москва. М.: Изд-во ПАИМС. С. 50–59.

[3] Там же.

[4] **Кузнецова Т.И.** Дедукция и индукция в повторительном курсе математики на уровне предвузовского образования // Байкальский психологический и педагогический журнал. 2003. № 1. С. 88–94.

[5] **Кузнецова Т.И.** К вопросу о реализации принципа единства генетичности и научности на уровне предвузовской математической подготовки. С. 50–59.

[6] **Кузнецова Т.И., Грибков И.В.** Геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 6.

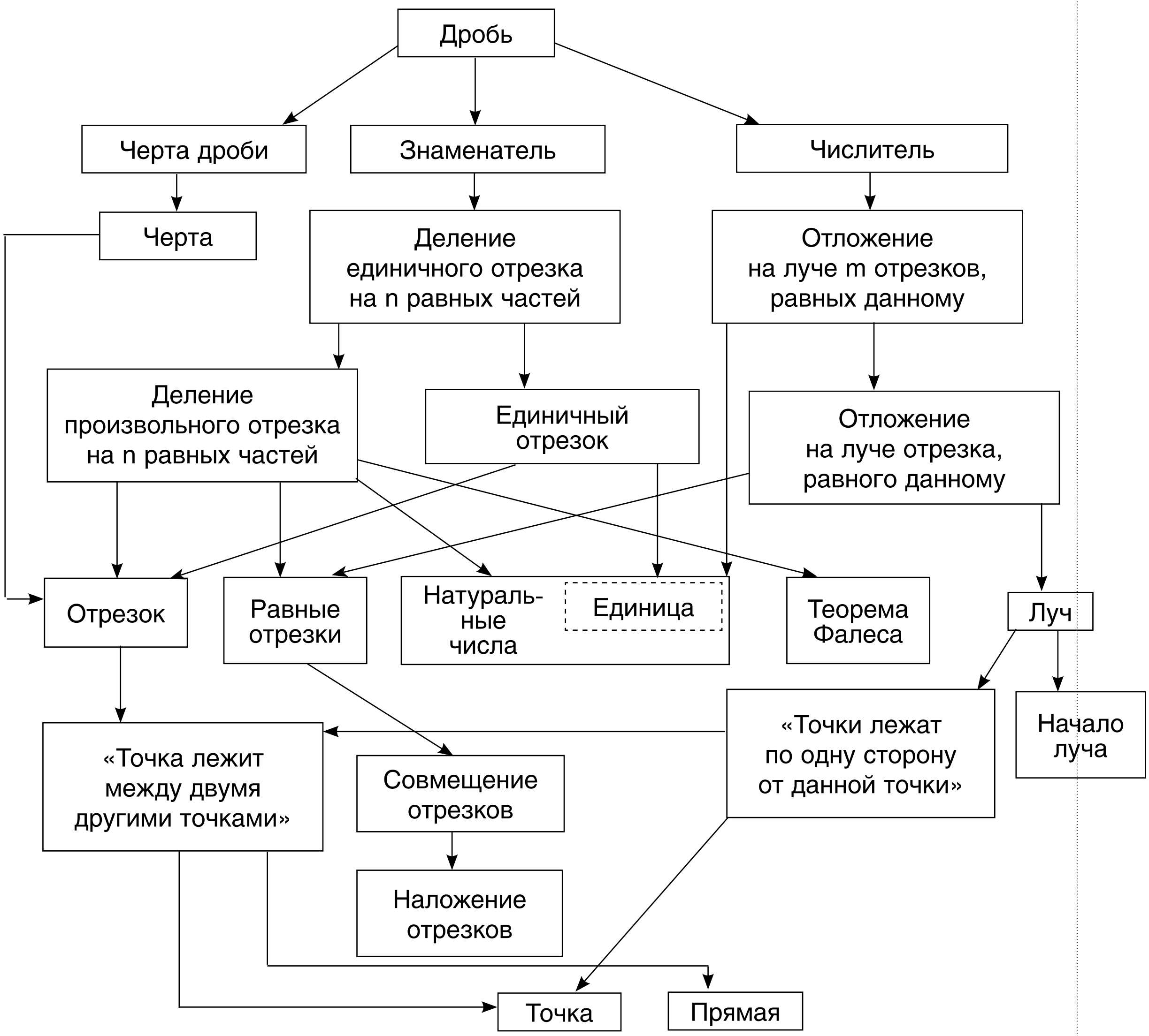

Рис. 1

венными и «сами собой разумеющимися». Однако на уровне предвузовской подготовки такой подход недопустим, поскольку даже среди тех соотношений, которые изучаются в школе, имеются такие, которые не обладают свойством транзитивности, например, соотношение перпендикулярности двух прямых. Поэтому с точки зрения повышения математической культуры будущего студента эту ситуацию необходимо обсудить, причём, возможно, на более раннем этапе. О транзитивности равенства отрезков мы говорили ранее[7], а вопрос о транзитивности параллельности прямых мы обсуждаем сразу после введения определения понятия параллельных прямых (см. теорему 2.2)[8].

Понятие «отложить отрезок на данной прямой от заданной точки» (4) задаётся однозначно сразу после введения понятий отрезка и луча — с помощью аксиомы отложения отрезков (см., например, аксиому VI)[9].

Понятие «две прямые» (1) не однозначно, поскольку

[7] **Кузнецова Т.И.** К вопросу о реализации принципа единства генетичности и научности на уровне предвузовской математической подготовки. С. 50–59.

[8] **Кузнецова Т.И., Грибков И.В.** Геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 7.

[9] Там же. С. 11.

взаимное расположение прямых имеет три геометрически различных варианта: они могут пересекаться, быть параллельными и могут совпадать. Однако последний вариант целесообразно исключить, учитывая замечание-соглашение: «Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д. будем считать, что эти точки, прямые различны»[10].

Таким образом, в дальнейшем мы будем вынуждены рассматривать два варианта, соответствующие первым двум вариантам взаимного расположения двух прямых:

А. Данные прямые пересекаются.
Б. Данные прямые параллельны.

Понятие «через заданную точку провести прямую, параллельную данной прямой» (7) предполагает, что заданная точка не лежит на данной прямой, иначе проведение искомой прямой просто невозможно — ведь если заданная точка лежит на данной прямой, то данная и искомая прямая уже имеют общую точку (заданную), что противоречит определению параллельности прямых. Однако отметим, что замечание-соглашение, на которое мы только что ссылались, даёт нам право на уверенность в том, что концы откладываемого отрезка не совпадают. Кроме того, необходимо акцентировать внимание на том, что проводимые нами параллельные прямые должны пересекать (т. е. строго пересекать — случай их совпадения полностью исключается) первую из данных прямых. Это условие, которое необходимо наложить на проводимые параллельные прямые.

Продолжая последнюю мысль и связав её с понятием «отсечь на прямой отрезок» (8) — на второй прямой, подразумеваем, что отсекающие (проводимые) прямые должны пересекать отсекаемую прямую (т.е. вторую из данных прямых). Заметим, что формулировка учебника Л.С. Атанасяна более осторожная по сравнению с приведённой выше, поскольку включает в себя это условие:

«Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, <u>пересекающие вторую прямую</u>, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки»[11].

Таким образом, для существования решения нашей задачи необходимо существование единственной общей точки каждой из проводимых прямых и второй данной прямой, т. е. проводимые прямые не должны совпадать со второй прямой и не должны быть ей параллельны.

Итак, завершая исследование, заключаем, что задача может иметь решение только при условиях, что данные прямые либо пересекаются (А), либо параллельны (Б), а проводимые прямые не параллельны данным прямым и ни одна из проводимых прямых не совпадает ни с одной из данных прямых. Это положение мы будем использовать в дальнейшем решении-доказательстве, т.е. на рисунках и в рассуждениях будем учитывать, что проводимые прямые пересекают данные прямые.

А теперь, отрешившись от общепринятого стереотипа, зададимся сомнением, подвергнув дополнительному анализу выражение «на одной прямой отложить последовательно несколько равных отрезков». Что означает «последовательно»? Судя по рисункам, да и по доказательствам тоже, это означает то, что каждый последующий отрезок откладывается от конца предыдущего, естественно, в каком-то одном направлении. А что, если не обязательно таким образом, как только что мы описали? А произвольно, сохранив только условие равенства отложенных отрезков? Поставив этот вопрос, при доказательстве теоремы постараемся получить ответ и на него.

В этом плане отметим, что формулировка учебника А.В. Погорелова ещё более осторожная, чем формулировка учебника Л.С. Атанасяна, и при желании даёт возможность включить в себя и только что рассмотренную ситуацию:

«Параллельные прямые, <u>пересекающие две данные прямые</u> и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой»[12].

---

[10] Геометрия: Учебник для 7–9 кл. общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 10-е изд. М.: Просвещение, 2000. С.5.

[11] Там же. С. 101.

[12] **Погорелов А.В.** Геометрия: Учебник для 7–11 классов общеобразоват. учреждений. 8-е изд. М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 1998. 383 с.; 10-е изд. 2000. С. 90.

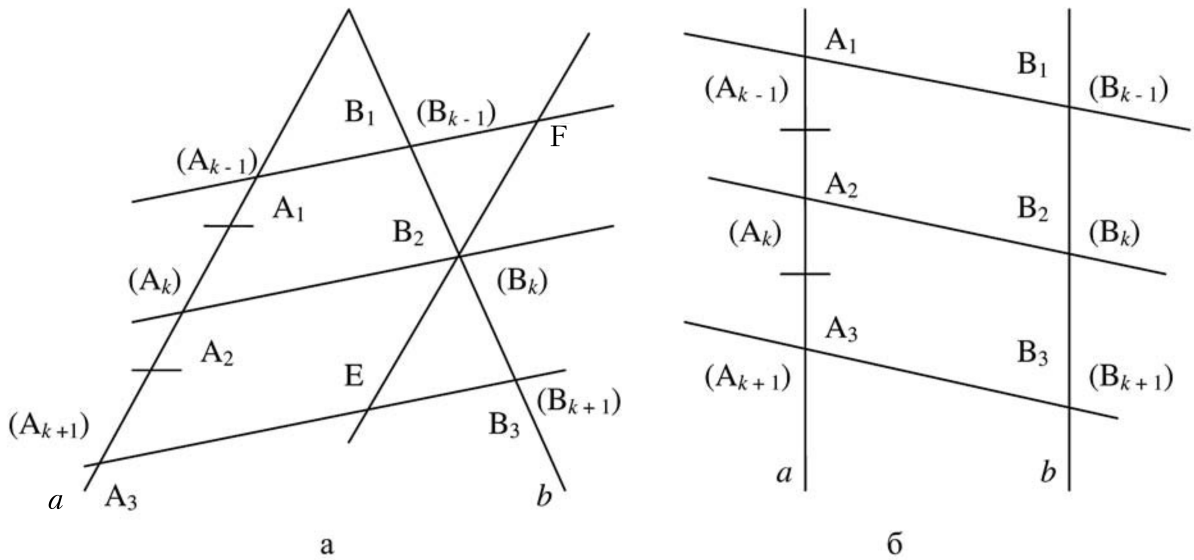

Рис. 2

5.2. Теперь переходим к непосредственному решению задачи. В соответствии со школьными учебниками для случаев А и Б рисуем рис. 2а и 2б. Как и в учебниках, пусть A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 — параллельные прямые, пересекающие две данные прямые *a* и *b*, причём, точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3 и $A_1A_2 = A_2A_3$. Докажем, что тогда $B_1B_2 = B_2B_3$.

5.2.1. Рассмотрим сначала случай Б, т. е. когда прямые *a* и *b* параллельны (см. рис. 2б). Так как $a \parallel b$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$ — параллелограммы (по определению параллелограмма). По первому свойству параллелограмма противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$. Так как по условию $A_1A_2 = A_2A_3$, то, вспоминая свойство транзитивности равенства отрезков, делаем вывод о том, что $B_1B_2 = B_2B_3$, что и требовалось доказать.

5.2.2. Теперь рассмотрим случай А, когда данные прямые *a* и *b* пересекаются (см. рис. 2а). Через точку B_2 проведём прямую EF, параллельную A_1A_3 (т. е. прямой *a*), до пересечения с прямыми A_1B_1 и A_3B_3 (см. анализ, проведённый выше, и аксиому параллельных прямых). При этом E — точка пересечения построенной прямой с прямой A_3B_3, F — точка её пересечения с прямой A_1B_1. Таким образом мы оказываемся в ситуации случая Б, следовательно, $FB_2 = B_2E$.

Рассмотрим треугольники B_2B_1F и B_2B_3E. В них, как уже отмечено, $FB_2 = B_2E$. Кроме того, углы B_1B_2F и B_3B_2E равны как вертикальные (см. теорему 8.3)[13], а углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при $A_1B_1 \parallel A_3B_3$ и секущей EF (см. теорему 17.3)[14]. Следовательно, $\Delta B_2B_1F = \Delta B_2B_3E$ по второму признаку равенства треугольников (см. теорему 19.1)[15].

Из определения равенства треугольников следует, что $B_1B_2 = B_2B_3$, что и требовалось доказать.

5.2.3. А теперь проведём доказательство для случая, когда на данной прямой *a* построено *n* точек A_1, A_2, ..., A_n, таких, что $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$. Используем для этого метод математической индукции, о пользе которого мы уже говорили выше. Итак,

1) для *n* — наименьшего, равного трём, теорема уже доказана.

[13] **Кузнецова Т.И., Грибков И.В.** Геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 18.

[14] Там же. С. 28.

[15] Там же. С. 31.

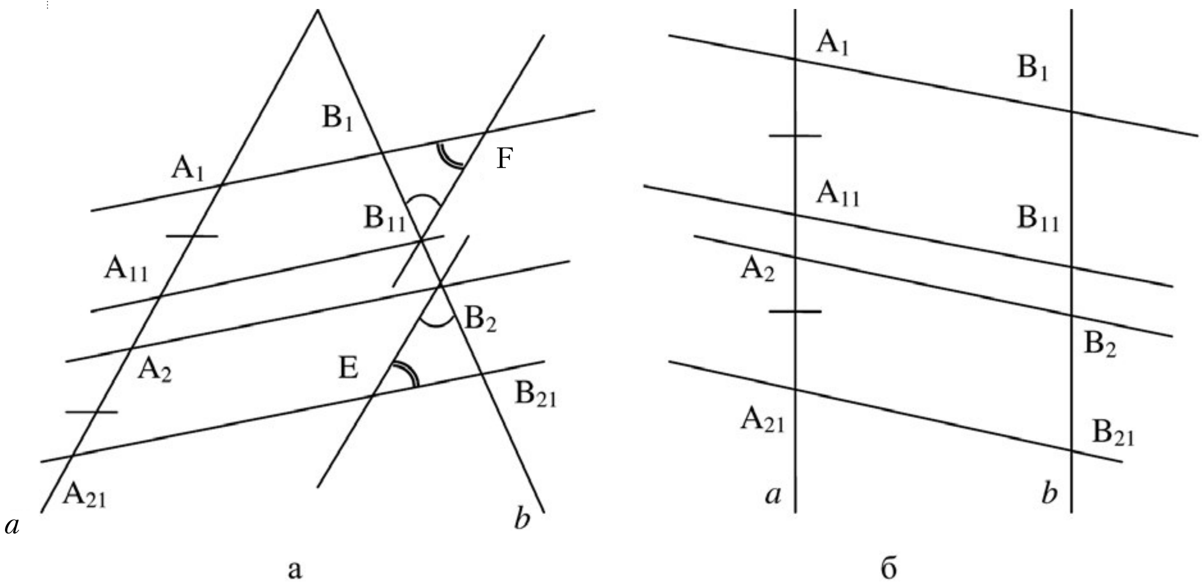

Рис. 3

2) Пусть теперь утверждение верно для $n = k$, т.е. если на данной прямой a выполняется условие $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{k-1}A_k$, то при $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel \ldots \parallel A_kB_k$ выполняются равенства $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{k-1}B_k$. Докажем, что тогда утверждение верно и для $n = k + 1$, т. е. что если на данной прямой a взять ещё одну точку A_{k+1}, такую, что $A_{k-1}A_k = A_kA_{k+1}$, и через неё провести ещё одну параллельную прямую, т. е. прямую $A_{k+1}B_{k+1}$, параллельную прямым A_iB_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, то обязательно выполнится равенство $B_{k-1}B_k = B_k B_{k+1}$.

Для доказательства рассмотрим на данной прямой a три точки A_{k-1}, A_k, A_{k+1} и соответствующие три точки B_{k-1}, B_k, B_{k+1}, полученные в пересечении данной прямой b с параллельными прямыми $A_{k-1}B_{k-1}$, A_kB_k, $A_{k+1}B_{k+1}$. Так как для случая трёх точек на прямой a теорема была доказана ранее (в пп. 5.2.1, 5.2.2, см. рис. 2), то сразу получаем: $B_{k-1}B_k = B_k B_{k+1}$, что и требовалось доказать.

На основании проведённых рассуждений согласно с принципом полной математической индукции делаем вывод о том, что теорема Фалеса действительно верна для всех $n \in \mathrm{N} \setminus \{1; 2\}$. Таким образом, теорема Фалеса в том виде, в котором она подаётся в школьных учебниках, полностью доказана.

[16] **Кузнецова Т.И., Грибков И.В.** Геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 29.

5.2.4. Остаётся только разрешить наши сомнения, высказанные перед началом доказательства. Итак, пусть равные отрезки A_1A_{11} и A_2A_{21} на прямой a не имеют общих концов (см. рис. 3).

Из рис. 3б видно, что аналогично случаю 5.2.1 из условия $A_1A_{11} = A_2A_{21}$ и первого свойства параллелограмма следует, что $B_1B_{11} = A_1A_{11} = A_2A_{21} = B_2B_{21}$, откуда по транзитивности равенства отрезков опять получаем: $B_1B_{11} = B_2B_{21}$, что и требовалось доказать.

Из рис. 3а видно, что, как и в случае 5.2.2, в треугольниках $B_{11}B_1F$ и $B_2B_{21}E$: стороны $B_{11}F$ и B_2E равны, поскольку по условию $A_1A_{11} = A_2A_{21}$ и по первому свойству параллелограмма выполняется следующая цепочка равенств: $B_{11}F = A_1A_{11} = A_2A_{21} = B_2E$; углы $B_1B_{11}F$ и $B_{21}B_2E$ равны как внешние накрест лежащие при $B_{11}F \parallel B_2E$ и секущей B_1B_{21}. Что же касается углов $B_{11}FB_1$ и B_2EB_{21}, то они равны как углы с параллельными сторонами (см. задачу 6)[16]. Следовательно, и здесь $\Delta B_{11}B_1F = \Delta B_2B_{21}E$ по второму признаку равенства треугольников, откуда сразу получаем $B_1B_{11} = B_2B_{21}$, что и требовалось доказать.

Метод полной математической индукции используется совершенно аналогично тому, как это делалось в п. 5.2.3.

Таким образом, мы ответили и на дополнительно поставленный нами вопрос: теорема верна и при произвольном расположении равных отрезков на данной прямой *a*.

5.3. Теперь исследуем содержание исходного материала, используемого при доказательстве теоремы Фалеса.

Во-первых, использовав рассуждения, проведённые при исследовании условия задачи (см. п. 5.1), перечислим основные сведения, необходимые для понимания её формулировки: аксиома прямой; определение параллельных прямых; теорема о взаимном расположении прямых; определение равенства отрезков; транзитивность параллельности прямых и транзитивность равенства отрезков.

Во-вторых, при доказательстве теорем о взаимном расположении прямых и транзитивности параллельных прямых использовался метод доказательства от противного. Практика преподавания на подготовительном факультете показывает, что этот метод плохо усвоен учащимися во время их учёбы в школе. А объясняется это тем, что они не понимают его природу, поскольку не знакомы с логическими основами доказательства утверждений. Подробно эта проблема обсуждалась в наших работах[17].

Из всего сказанного следует, что настоящее исследование может быть использовано в повторительном школьном курсе математики[18].

---

[17] **Кузнецова Т.И.** Научный взгляд на проблему доказательства в условиях предвузовского математического образования. В кн.: Проблемы учебного процесса в инновационных школах. Вып. 8: Сб. науч. тр. / Под ред. О.В. Кузьмина. — Иркутск: Иркут. ун-т. Лаборатория педагогического творчества, 2003. С. 56–69; **Кузнецова Т.И.** Опровержение — необходимый компонент обсуждения работы учащегося, дискуссии (в условиях математического образования) // Байкальский психологический и педагогический журнал, № 1–2. Иркутск: Иркут. ун-т, 2004. С. 135–140; **Кузнецова Т.И.** Терминологические проблемы школьной математики и пути их разрешения в условиях предвузовского образования // Научный вестник МГТУ ГА, № 82(6), сер. «Общество, экономика, образование». М.: МГТУ ГА, 2004. С. 130–139; **Кузнецова Т.И.** Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. М.: КомКнига, 2005. 480 с.; 2-е изд. М.: Либроком, 2011. (Сер. Психология, педагогика, технология обучения); **Кузнецова Т.И.** Взгляд научного редактора: доказательства и опровержения (по материалам для средней школы) // Новые образовательные программы МГУ и школьное образование: Материалы Второй научно-методической конференции. Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 17 ноября 2012 года. В 2-х частях. М., 2012. С. 46–47. (Часть I. Секция 1. Математические науки и информационные технологии); URL: http://teacher.msu.ru/upload/teacher/conf/conf2012/sbornik/sbornik_2012_7-2_1.pdf

[18] **Кузнецова Т.И.** Реализация единства генетичности и научности при моделировании дробных чисел // Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании: Сборник научных трудов участников международной конференции. Москва, РУДН, 4–6 февраля 2013 г. / Под общей ред. Е.И. Саниной. М.: РУДН, 2013. С. 276–285.