Понятие модели и математика.
Часть 2[1]

Сергей Рувимович Когаловский,
профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук, 8 (4932) 32-69-33, askogal@yandex.ru

• предел последовательности • формальная логика • интуитивное усмотрение • строгое доказательство •

Рассмотрим фрагмент сценария занятий со школьниками, посвящённых восхождению к строгому понятию предела последовательности[2]. Мы опускаем начальную часть сценария, посвящённую приобщению к предельному переходу на наивном уровне. В следующей части сценария рассматривается та стадия процесса, которая направлена на столкновение учащихся с пограничными ситуациями, приводящее к осознанию размытости представлений о сходимости последовательности и необходимости их уточнения.

Задача 1. *Последовательность **c** строится из последовательностей*

a: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ *и*

b: $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$

*следующим образом: для всякого n между членами с номерами 2^n и 2^n+1 последовательности **a** вставляется n-й член последовательности **b**. Каков её предел?*

*— Он равен 0. Ведь в **c** всё реже появляются члены последовательности **b**. И там, где номера членов **c** будут непредставимо огромными, члены последовательности **b** будут появляться настолько редко, что **c** почти не будет отличаться от **a**. Значит, **c** приближается к тому же числу, что и **a**.*

*— Хоть члены последовательности **b** появляются в **c** всё реже, они появляются как угодно далеко. Какой бы огромный номер мы ни взяли, у последовательности **c** имеются члены с ещё большими номерами, взятые из **b**. И чем далее, тем ближе такие члены к числу 1, а не к 0. Так что едва ли предел **c** равен 0. Скорее он равен 1.*

*— Но в **c** намного чаще появляются члены из **a**, становящиеся всё ближе к 0, а не к 1.*

— А может быть, и 0, и 1 являются её пределами?

— Но может ли последовательность иметь два разных предела?

— А разве наша последовательность не является тому примером?

— Приходится констатировать, что пока мы не видим подходов к решению этой задачи. Не лучше ли перейти к другим задачам, а к этой вернуться позднее?

---

[1] **Когаловский С.Р.** Понятие модели и математика. Ч. 1 // Школьные технологии, № 4. 2013. С. 49–59.

[2] Подробное изложение этого и других сценариев, посвященных процессам восхождения к понятиям непрерывности, производной, интеграла и других содержится в следующих работах: **Когаловский С.Р.** Развивающее обучение математике как преображающее обучение. Иваново: Изд-во «Иваново», 2010; **Когаловский С.Р.** К методологии преображающего обучения (Обучение школьников математике). LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011; **Когаловский С.Р., Шмелева Е.А., Герасимова О.В.** Путь к понятию (от интуитивных представлений — к строгому понятию). Иваново: Ивановский областной институт повы-шения квалификации и переподготовки педагогических кадров, 1998. 206 с.

Задача 2. *Пусть **a** и **b** — те же, что и в задаче**1**. Последовательность **d** строится из них так: между членами с номерами 2^n и 2^n+1 последовательности **a** вставляется 4^n первых членов последовательности **b**. Каков предел **d**?*

*— Он равен 0. Вставляемые в **a** блоки членов из **b** появляются всё реже. Чем дальше от начала, тем меньше **d** отличается от **a**. Значит, **d** имеет тот же предел, что и **a**.*

*— Да, блоки членов из **b** появляются в **d** всё реже, но они появляются бесконечно много раз. И чем далее, тем ближе такие члены к 1, а не к 0. Так что едва ли **d** имеет предел 0. К тому же блоки из **b** становятся всё длиннее. Каждый из них содержит большее число членов, чем число всех предшествующих ему членов в **d**. Так что чем дальше, тем последовательность **d** становится всё более похожей на **b**. А значит, её предел равен 1.*

— Никакой из высказанных аргументов не доказателен. Они близки аргументам, высказанным при обсуждении задачи **1**. *А рассматриваемая задача тоньше.*

Задача 3. *Каков предел последовательности 1, 1, 1, ...?*

— 1.

— Но разве эта последовательность приближается к какому-нибудь числу? Она постоянна. Она ни к чему не приближается.

— На вопрос о том, каков предел этой последовательности, были высказаны разные версии. Это свидетельствует о том, что наши представления о пределе последовательности нечётки, размыты. По этой же причине мы не смогли решить задачи **1** *и* **2**.

Следующая часть сценария посвящена стадии процесса, направленной на уточнение представлений о предельном переходе, которое приведёт к определению строгого понятия предела последовательности. Это определение будет ещё мыслиться в рамках освоенного пространства процедур, значений и смыслов. Многое из того, что связано с этим пространством, «имеется в виду», хоть и не оговаривается явно, а часто и не осознаётся.

— Давайте уточним наши представления о пределе, «очистим» их от «замутнённости», «экстрагируем» из них рациональное содержание, точнее говоря, сформируем строгое понятие предела последовательности, такое, которое давало бы возможность в конкретных ситуациях находить надёжное решение вопроса о том, сходится ли последовательность (и если да, то каков её предел), и открывало бы возможность осуществлять надёжную проверку истинности общих утверждений о сходящихся последовательностях. Это потребует от нас пристального всматривания в наши представления о том, что такое предел последовательности. Итак, что значит, что последовательность (a_n) имеет предел А?

— То, что с возрастанием n её члены становятся всё ближе к А.

— Но то, что a_n становятся всё ближе к А, означает, что все члены (a_n), начиная с некоторого, будут отличаться от А меньше, чем на 0,1, то есть будут находиться в 0,1 — окрестности точки А; что все её члены, начиная с какого-то, возможно, намного более далёкого, будут отличаться от А меньше чем на 0,01, то есть будут находиться в 0,01 — окрестности этой точки; что все члены, начиная с некоторого, возможно, несравненно более далёкого, будут находиться в 0,001 — окрестности этой точки, и т.д. Короче говоря, это значит, что для всякого числа $\varepsilon>0$, каким бы малым оно ни было, все члены, начиная с какого-то, будут отличаться от А меньше чем на ε. Иначе говоря, это значит, что для всякой окрестности точки А, то есть для всякого содержащего её интервала, каким бы малым он ни был, все члены последовательности, начиная с некоторого, войдут в него. Иными словами, число А есть предел последовательности (a_n), если для всякой окрестности точки А существует номер N такой, что все члены с номерами, большими N, принадлежат этой окрестности.

Вот мы и получили чёткое описание того, что такое предел последовательности. Его естественно принять в качестве определения понятия предела последовательности.

(В действительности процесс восхождения к этому понятию был не процессом экстрагирования рационального содержания из наших интуитивных представлений о предельном переходе, а процессом конструирования одного из многих возможных вариантов рациональной модели этих представлений).

Сформированное определение «само по себе» ещё не обеспечивает ни преображения способа мышления, ни строгости. Но сообразование его со способом мышления, «настраиваемым» формальной логикой, «очищает» представляемое им понятие и превращает его в понятие трансцендентального характера по отношению к освоенному до этого пространству значений и смыслов. Использование формально-логических средств преображает продукт уточнения. Он раскрывается как имеющий новую природу, как продукт творческого акта. Это происходит на стадии процесса, которая начинается с испытания сформированного понятия на работоспособность, являющегося одновременно первичным его освоением. Процессы его реализации приводят к усмотрению качественно новых возможностей, которые оно несёт.

Такие процессы представляют эффективный и природосообразный инструмент формирования строгих понятий как продуктивных моделей представлений, как «выразителей» их «сущностей», как их идеальных форм.

— Становится ли возможным с помощью полученного уточнения решение вопросов, оставшихся открытыми? Начнём с вопроса о том, может ли последовательность иметь более одного предела. Допустим, что какая-нибудь последовательность (a_n) имеет пределы A_1 и $A_2 \neq A_1$. Тогда существуют непересекающиеся окрестность U_1 точки A_1 и окрестность U_2 точки A_2. Так как A_i — предел (a_n), то существует номер N_i, такой, что все члены последовательности, номера которых больше N_i, принадлежат U_i ($i=1, 2$). Но тогда все члены, номера которых больше N_1 и N_2, принадлежат и U_1, и U_2, что невозможно.

*— Теперь ясно, как решить задачу **1**. Никакое число, меньшее 1, не является пределом последовательности **c**. Ведь если бы какое-нибудь число $k < 1$ было её пределом, то любая окрестность k содержала бы все её члены, начиная с некоторого. Но это не так: ни один член последовательности, больший 1 (а таких членов бесконечно много — это члены последовательности **b**), не входит в окрестность k, лежащую слева от 1. Аналогичные соображения показывают, что никакое число $m \geq 1$ не является пределом этой последовательности. Аналогично доказывается, что и последовательность **d** из задачи* **2** *не имеет предела.*

Условимся последовательности, имеющие пределы, называть сходящимися, а не имеющие — расходящимися.

— Теперь обратимся к задаче **3**. *Если бы число 1 было пределом последовательности, то во всякую окрестность этого числа входили бы все члены последовательности, начиная с некоторого.*

— Но это действительно так! Более того, во всякую окрестность точки 1 входят все члены последовательности, потому что все они равны 1. А это значит, что 1 есть предел нашей последовательности!

— Это утверждение противоречит здравому смыслу: последовательность 1, 1, 1, ... постоянна, она ни к чему не стремится. А то, что последовательность имеет предел A, означает, что её члены приближаются к A, что они <u>становятся</u> как угодно близкими к A.

— Но что значит «становятся как угодно близкими к A»?

— Это значит, что с возрастанием n расстояние между точками a_n и A, то есть $|a_n - A|$, становится всё ближе к 0.

— Опять это «становится»! Как его выразить в такой форме, которая позволяла бы осуществлять надёжную проверку того, действительно ли члены последовательности «становятся» всё ближе к A? Обсуждение задач **1** *и* **2** показало*, насколько ненадёжными бывают суждения, основанные на интуитивных представлениях.*

— Значит ли это, что при решении математических вопросов необходимо отказываться от интуитивных представлений и использовать только строгие определения?

— Но откуда берутся строгие определения и чему в реальной жизни они соответству-

ют? Где в реальной жизни Вы видели точки, прямые, бесконечные последовательности? Разве не представления являются истоками этих понятий?

Вернёмся к вопросу о том, что значит, что число А — предел последовательности (a_n). Это значит, — сказали Вы, — что значения $|a_n – A|$ с возрастанием n становятся всё ближе к 0, что они становятся как угодно близким к 0. Но это значит, что какое бы число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, каким бы малым оно ни было, для всех a_n, начиная с некоторого, будет $|a_n – A| < \varepsilon$, то есть что для всякого $\varepsilon > 0$ все a_n, начиная с некоторого, попадут в ε — окрестность точки А. Это значит, что А — предел последовательности (a_n) в последнем смысле.

— Но последовательность 1, 1, 1,… ни к чему не стремится!

— Иначе говоря, определение понятия предела последовательности не вполне соответствует Вашему (да и не только Вашему) представлению о том, что значит, что $\lim a_n = A$.

— То есть оно неудовлетворительное. Значит, его надо отбросить и сформировать удовлетворительное определение.

— Но возможно ли сформировать такое чёткое определение, которое во всём соответствовало бы нашим размытым представлениям о пределе? Да и нужно ли это? Разве географическая карта местности бесполезна, поскольку она не тождественна самой этой местности? Разве чертёж узла машины бесполезен, поскольку он не «адекватен», не тождествен самому этому узлу? Чертёж — модель этого узла. А модель изучаемого объекта и должна быть не «адекватной» ему для того, чтобы она могла быть эффективным средством его изучения, чтобы в ней выпячивались интересующие нас стороны этого объекта и чтобы при этом другие стороны дела их не затеняли.

— Таким образом, сформированное строгое понятие предела последовательности — это модель наших представлений о стремлении к пределу?

— Да. И оценивать его следует как модель. Если это понятие помогает решать интересующие нас вопросы, если оно продуктивно, то оно удовлетворительно как модель.

— Но для одного и того же объекта можно построить много разных моделей.

— Это так. Нередко возникают проблемы выбора модели, многосторонних испытаний выбранной модели на продуктивность и её совершенствования, то есть формирования более работоспособной её модификации.

— Как, с этой точки зрения, следует оценить сформированное понятие предела?

— Полуторавековой опыт истории математики подтвердил его продуктивность. Отметим и то, что применительно к монотонным последовательностям это понятие вполне соответствует нашим интуитивным представлениям о пределе последовательности.

Обращение к следующим ниже задачам помогает освоению сформированного понятия.

Задача 4. *Доказать, что сходящаяся последовательность ограничена.*

Задача 5. *Доказать, что сходимость последовательности* ***a****: $a_1, a_2, a_3,\ldots$ к числу А равносильна сходимости к А последовательности* ***b****: $a_2, a_3, a_4,\ldots$*

Из утверждения, являющегося предметом задачи 5, следует: сходится ли последовательность и то, каков её предел (если она сходится), не зависит ни от какого её члена, ни от какого её начального куска. Это совершенно новая для учащихся ситуация, заставляющая настраиваться на существенно иной способ мышления.

Эта новая ситуация выступает как ситуация парадоксальная: выходит, свойство последовательности быть сходящейся не связано с её «плотью»! Это похоже на улыбку чеширского кота. Парадоксальность снимается истолкованием свойства последовательности быть сходящейся как общего свойства её «хвостов» $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$[3]. Такое истол-

[3] Такое истолкование обсуждаемой ситуации подобно тому, как парадокс «Стрела» Зенона разрешается истолкованием движения, относящегося к тому или иному моменту времени, как характеристики, относящейся к временным окрестностям этого момента. Заметим также, что такое истолкование несет потенцию восхождения к понятию предела по фильтру, а тем самым восхождения на топологический уровень рассмотрения.

кование несёт «возвращение» этому свойству «плоти». Но «плоть» эта трансцендентальна как и само понятие *бесконечной* последовательности. И парадоксальность обсуждаемого свойства снимается в процессе освоения отвечающей ему логики.

Решением задач на сходимость последовательностей осуществляется явным образом взаимодействие интуитивного и рационального планов. Это и ведёт к развитию *представлений* о предельном переходе и способствует более полнокровному освоению *понятия* предела.

Задача 6. *Сходится ли последовательность*

$$\left(\frac{n^4+2n^3-2}{n^4+n+1}\right)?$$

— Разделив почленно числитель и знаменатель выражения n*-го члена последовательности на* n^4, *получим выражение, значения которого стремятся к 1 при неограниченном возрастании* n.

— Таким образом, весьма правдоподобна гипотеза, что предел последовательности

равен 1. Попытаемся её доказать. Пусть ε *— какое-нибудь положительное число. Попытаемся доказать, что неравенство*

$$\left|\frac{n^4+2n^3-2}{n^4+n+1}-1\right|<\varepsilon$$

выполняется для всех значений n, больших некоторого. Это неравенство преобразуемо в следующее:

$$\left|\frac{2n^3-n-3}{n^4+n+1}\right|<\varepsilon.$$

Так как $2n^3-n-3<2n^3$ *для всякого натурального n, то достаточно доказать, что неравенство*

$$\frac{2n^3}{n^4+n+1}<\varepsilon$$

выполняется для всех n, больших некоторого. А так как $n^4+n+1>n^4$ *для всякого n, то достаточно доказать, что неравенство*

$$\frac{2n^3}{n^4}<\varepsilon$$

выполняется для всех n, больших некоторого. Это неравенство выполняется для всех

$$n>\frac{2}{\varepsilon}.$$

Приведённое решение демонстрирует, как именно «научные понятия прорастают вниз через житейские» и как при этом «житейские понятия прорастают вверх через научные»[4]: неразвитые представления о предельном переходе, являвшиеся первоначальным объектом изучения, и сформированное строгое понятие предела, явившееся их моделью, их идеальной формой, меняются ролями[5]. Этот феномен достоин специального изучения и с позиций методологии математики, и с позиций методики обучения математике[6]. Он несёт и дополнительный аргумент в пользу пересмотра понятия модели по В. А. Штоффу.

— Решение задачи с самого начала направлялось нашей интуицией: мы исходили из подсказанного интуицией предположения, что предел данной последовательности существует и что он равен 1. Решение свелось к проверке этого предположения, то есть к проверке его соответствия сформированному определению.

— Теперь понятно, каково соотношение между интуитивным усмотрением и строгим доказательством: интуиция подсказывает путь решения, а формальная логика

[4] **Выготский Л.С.** Мышление и речь // Выготский Л. С. Собр. соч. Т.2. М., 1982. С. 263.

[5] Точнее говоря, ролями меняются сформированное понятие и протопонятие, к которому приводит развитие исходных представлений. Описанный процесс формирования понятия предела снимает конфликт между «житейским» и «научным» понятиями, между натуральной и культурной формой посредством осуществления пе-рехода «натуральное—культурное» не как втискивания мыследеятельности учащихся в «правильную» форму мыслеповедения, не как «вживления» последней, а как направляемого «само»-развития наличествующей фор-мы, ведущего к рождению культурной формы, представляемой сформированным понятием. Тем самым становятся существенно иными отношения между реальной и идеальной формами и сам характер идеального, поскольку сформированное понятие не становится противостоящим протопонятию, послужившему его истоком, а воспринимается и работает как его идеальная форма.

[6] Он является и проявлением закономерности общего характера, а именно онтологизации идеального и превращения его в неотъемлемый элемент культуры.

ведёт по этому пути. Она позволяет строго проверить, не обманула ли нас интуиция.

— Это так. Но роль интуиции далеко не исчерпывается сказанным: разве не интуитивные соображения вели нас по пути формирования строгого понятия предела последовательности, разве к строгому понятию мы пришли без прямой и решающей помощи интуиции? Правда — в постоянном и активном взаимодействии интуиции и логики, ведущем к развитию как интуиции, так и понятийного уровня мышления. Без интуиции нет мышления. Следование логике без интуиции присуще тупому автомату, действующему без цели и смысла, хоть и «по правилам».

— На свои вопросы я бы теперь ответил так: согласно моим интуитивным представлениям, последовательность 1, 1, 1,... ни к чему не сходится, но она сходится в смысле нашего определения. Согласно моим интуитивным представлениям последовательность ***c*** *из задачи 1 имеет предел 0, но она расходится в смысле этого определения.*

Но осталось неясным следующее: как могло произойти то, что процесс уточнения представлений о пределе последовательности, происходивший под неустанным контролем смысла, привёл к понятию, имеющему новый смысл? Почему (некоторая) неадекватность сформированного понятия этим представлениям не усматривалась сразу, а обнаружилась лишь в результате его применения?

— Причина и кроется в применении, точнее, формальном применении этого понятия, при котором вступает в свои права формальная логика. Она «отключает» контроль смысла. Она навязывает иной способ рассмотрения. Она делает предметом нашего внимания иные, формальные стороны дела. Она рождает новый контекст, и тем самым — новый смысл сформированного понятия[7]. Так что формальная логика несёт в себе и творческое начало. Она является средством расширения смыслов понятий и рождения новых смыслов.

Трудно переоценить развивающую роль задач на сопоставление разных вариантов «уточнения» представлений о сходимости последовательности, например, сформированного варианта со следующим.

Пусть ***a = (*** a_n***)*** *— какая-нибудь последовательность, A — какое-нибудь число. Каждому числу* $\varepsilon > 0$ *сопоставим такую последовательность* ***c = (*** c_n***)****, что* c_n *есть доля тех членов* ***a*** *среди* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, которые не входят в* ε *— окрестность точки A. Будем говорить, что число A является как-бы-пределом последовательности* ***a****, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *соответствующая последовательность* ***c*** *является бесконечно малой. Сопоставьте понятие как-бы-предела последовательности с обсуждением задач* **1** *и* **2**. *Выясните, справедливы ли следующие предложения:*

1. Всякая последовательность имеет не более одного как-бы-предела.
2. Всякая как-бы-сходящаяся последовательность ограничена.
3. Если существуют как-бы-пределы последовательностей (a_n) *и* (b_n)*, то существует и как-бы-предел их суммы* $(a_n + b_n)$ *и он равен сумме как-бы-пределов* (a_n) *и* (b_n)*.*
4. Аналогичное верно для как-бы-пределов разности, произведения и частного последовательностей.
5. Как-бы-предел монотонной последовательности есть её предел.
6. Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда всякая её подпоследовательность имеет как-бы-предел и все эти как-бы-пределы равны.

Попытайтесь найти теоретико-вероятностное истолкование понятия как-бы-предела последовательности.

На начальных стадиях описанного процесса работают и развиваются представления о предельном переходе, имеющие «динамический», или «процессный» характер, тогда как продукт этого процесса имеет «статический» характер. Но «статические» пред-

[7] В этом не вся правда: процесс «восхождения» к строгому понятию предела, отталкивающийся от прото-представлений о пределе последовательности сопровождался резким сужением веера возможных рациональных толкований этих представлений уже в силу самого характера анализа ситуации, рассматриваемой в задаче 1, настраиванием учащихся, настраиванием исподволь, на квалификацию этой ситуации как на расходимость рассматриваемой последовательности. Однако нетрудно сформировать строгое понятие сходимости (близкое по духу к понятию сходимости по вероятности), взаимоопределимое с классическим понятием сходимости последовательности и такое, что в соответствии с ним рассматриваемая в задаче 1 последовательность будет иметь предел.

ставления, стоящие за сформированным понятием, не были рождены процессом формирования, они уже существовали в форме прото-представлений. До столкновения с пограничной ситуацией они пребывали в спорадическом состоянии, а затем начали развиваться благодаря взаимодействию с «динамическими» представлениями (доминирование которых предопределялось заданным характером начала процесса). Начальные представления о предельном переходе несут в себе синкретичное смешение разных его протообразов и протоидей (среди которых и протообразы, протоидеи актуальной бесконечно малой). Об этом свидетельствует история математики.

На разных стадиях исторического процесса развития математики идея предельного перехода облекалась в разные формы, за которыми стояли разные протообразы предельного перехода. И то, что в течение почти полутора столетий анализ бесконечно малых (обретший строгие формы в лице нестандартного анализа) успешно конкурирует с математическим анализом в духе Больцано-Вейерштрасса, говорит о том, что строгие понятия, выступающие как уточнения исходных представлений, не схватывают всего того орудийного потенциала, который несут эти представления. Это свидетельствует о важности начальной, наивной стадии процессов формирования строгих общих математических понятий как создающей потенцию далеко идущего их развития. Она открывает дорогу к Живому Знанию. И с неё же начинается Живое Знание.

«Динамические» представления о предельном переходе выступают в приведённом сценарии не просто как неразвитая форма строгого понятия предела последовательности, но как поводырь, ведущий к своей идеальной форме (к одной из своих идеальных форм). Такую же роль играли первичные представления в исторических процессах становления строгих общих понятий. И это также говорит о важности начальной, наивной стадии процессов формирования строгих общих математических понятий.

Как неоднократно подчёркивалось Ю.М. Лотманом[8], феноменам культуры присущи полигенетичность и полифункциональность. А значит, их освоение требует погружения в разные контексты. Сказанное в полной мере относится к фундаментальным математическим понятиям. Но за их зримой полигенетичностью скрывается имеющая более глубинные корни *моногенетичность* – те протопредставления, те протомеханизмы, те протосмыслы, которые явились их истоками. Анализ исторических процессов становления и развития таких понятий показывает, что движение от исходного «моно-» к «поли-» — это процесс открытия и первичного освоения разнообразия возможностей, несомых реализацией протопредставлений, способствующий превращению исходного «моно» в предмет изучения, это процесс формирования и развития протопонятия, являющегося моделью продуктов такого процесса[9], это формирование многообразия форм первичного идеального и отправляющееся от этого движение к их развитому и преображённому единству, к развитому идеальному, представляющему продуктивную модель того, что представлено в «поли-». Такая модель характеризуется проявлённостью и доминированием надпредметных и метапредметных планов, представляющих развитое и преображённое исходное «моно». Процесс восхождения к такой модели, её освоения и развития — это процесс развивающегося единства нарастающего разнообразия[10].

Напрашивается соотнесение таких процессов с синергетическим подходом, несущим переход исследований «от существования к *становлению*, сосуществованию в сложных эволюционирующих структурах старо-

[8] **Лотман Ю.М.** Чему учатся люди. Статьи и заметки. М.: Центр книги ВГБИЛ им. М.И. Рудомино, 2010.

[9] Такое протопонятие обычно воспринимается как «зачатое» «поли-» и сформированное им, как созданное обобщением продуктов его работы. В действительности роль «поли-» состоит не в «зачатии», а прежде всего, в «родовспоможении» при рождении протопонятия как содержательной абстракции в смысле В.В. Давыдова. «Поли-» участвует и в процессах его преображения в содержательное обобщение. Это хорошо проявляется в укоренившихся способах приобщения школьников к понятиям производной и определенного интеграла.

[10] Представления, явившиеся истоком сформированного строгого понятия, взаимодействуя с ним, задавая начальные направления его развития, развиваются и сами и тем способствуют развитию ориентировки, а значит, и развитию поисково-исследовательской деятельности. И это является дополнительным подтверждением значимости «наивной» стадии формирования строгого понятия. Урезание такой стадии, ее низведение до уровня всего лишь предварительных разъяснений несет трудно восполнимые потери в деле собственно математического и общего интеллектуального развития учащихся.

го и нового; от представлений о стабильности и устойчивом развитии к представлениям о нестабильности и метастабильности, оберегаемом и самоподдерживаемом развитии»[11].

Обучение математике становится способствующим формированию общих форм и способов интеллектуальной деятельности при следовании урокам исторического процесса развития математики, проявляющего глубинные закономерности познавательной деятельности и её развития. Это реализуемо посредством онтогенетического подхода к обучению в смысле, то есть такого подхода, который основывается, в конечном счёте, на построении и использовании продуктивных моделей исторических процессов становления и развития фундаментальных математических понятий, реализуемых следованием принципам, сообразующимся с тем, что такие процессы должны сопровождаться многократными преображениями внутренних форм мыследеятельности[12].

Уже первичное соотнесение онтогенетического подхода с синергетическими понятиями и принципами позволяет усмотреть необходимость его как средства снятия ряда трудностей в обучении математике, поиски эффективных средств, преодоления которых ведутся не одно десятилетие, и как средства достижения целей обучения математике, отвечающих потребностям современного социума.

Центральная задача обучения математике, отвечающая задаче модернизации образования, состоит в способствовании освоению учащимися фундаментальных математических понятий во всех названных выше их ролях и постижении ими логики процессов их формирования и развития. Онтогенетический подход как подход, направленный на решение этой задачи, тем самым направляет обучение на развитие ***гомеостатичности*** системы математических знаний учащихся (СМЗ), такой, которая состоит в сохранении её устойчивости, её жизнеспособности в условиях нарастания разнообразия условий её функционирования, нарастания разнообразия воздействий на все её подсистемы, как высшие, так и низшие. Это достигается не только и не столько наращиванием предметных знаний учащихся, сколько развитием их *надпредметных знаний*, а тем самым таким развитием *управляющей подсистемы* их СМЗ, которое несёт и возрастание потенции её дальнейшего развития. Это не может осуществляться без развития учащихся как субъектов учебной деятельности. Отсюда необходимость следования принципу**,** требующему *«раскрепощения»* ***субъективности*** *учащихся, открывающему возможность её (направляемого) развития, становящегося саморазвитием учащихся как активных* ***субъектов*** *учебной деятельности*[13].

Полнокровному воплощению этого принципа препятствует глубоко укоренившийся способ обучения, несущий, по сути, платонистское представление о фундаментальном строгом понятии как о пред-существующем и открываемом, как о раскрываемой сущности, содержащейся в представлениях, являющихся его истоком. Такое воплощение достижимо посредством осознания того, что ведущее строгое понятие является одной из многих возможных продуктивных *моделей* этих представлений, что выражаемая им «сущность» не открывается, а созидается, что она есть продукт творческой деятельности.

Развитие ***гомеостатичности*** СМЗ делает необходимым следование принципу**:** *освоение ведущего строгого понятия — это и освоение надпредметного и методологического начал, несомых им, заложенных в нём самим историческим процессом формирования представляемой им теории. Это и освоение надпредметного и методологического начал, заложенных в логике исторического процесса его формирования, освоения и развития*[14].

Развитие надпредметных и метапредметных знаний учащихся как управляющей подсистемы их СМЗ осуществимо развитием учебной деятельности, ведущим к её преображению. Отсюда необходимость следования принципу, требующему *сообразования с идеей развития, сопровождаю-*

[11] **Князева Е.Н.** Синергетический вызов культуре. http://spkurdyumov.narod.ru/SINVIZKUL.htm

[12] **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. С. 93–99; **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[13] **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. С. 93–99.

[14] Там же.

щегося преображениями способов мыследеятельности, то есть коренными изменениями её содержания, формы, направлений её развития и самих её целей, освоением новых механизмов понимания[15].

В состоянии, близком к равновесному, система изменяется мало. Такими системами являются СМЗ, бедные или обросшие устойчивыми стереотипами в силу их развития единственно «по горизонтали», то есть на уровне развития учебной деятельности лишь на предметном, но не надпредметном уровне, и не «подпитывающиеся» ситуациями, несущими «флуктуации». Но в неравновесных и особенно в сильно неравновесных состояниях они становятся обострённо восприимчивыми к воздействиям. Необходимым условием перехода СМЗ к новому состоянию, условием её преображения в более развитую систему является приведение её *в состояние сильной неравновесности* посредством «*флуктуаций*» состояний её элементов и подсистем, рождаемых столкновениями с пограничными ситуациями. Это даёт оправдание следующего принципа**:** *столкновение с пограничными ситуациями является настолько же продуктивным, насколько и природосообразным средством осознания учащимся необходимости восхождения к строгим понятиям, а посредством этого его математического и общего интеллектуального развития.*

Так как состояние неравновесности системы приводит к усилению взаимодействий её элементов и подсистем и необходимо для её преображения в более развитую, а посредством этого в более устойчивую систему, то приведения СМЗ в состояние неравновесности являются необходимым условием воплощения в обучении принципа *от неразвитого целого — к развиваемому и преображаемому целому* как ведущего принципа, характеризующего онтогенетический подход. И это также говорит о необходимости следования последнему принципу, о его важной роли в обучении математике[16].

Рождение нового, более высокого уровня организации системы происходит лишь тогда, когда система достигает достаточного уровня сложности. Недостаточно сложные системы развиваться не могут. А при усиленных энергетических или информационных воздействиях они вырождаются. (Это зримо демонстрируют попытки обучения геометрии сразу на аксиоматической основе и попытки прямого приобщения учащихся к строгим понятиям предела и непрерывности). Отсюда необходимость следования следующим принципам:

• *Освоение фундаментальных (строгих) математических понятий требует методов, сообразующихся с их природой, с тем множеством важных ролей, которые они играют в математической деятельности. Самим историческим процессом формирования такого понятия формы его представления, его дух, характер его функционирования существенно привязаны не к тем или иным единичным вопросам, а к представляющей его (и представляемой им) развитой теории как целому. А значит, освоение такого понятия, осознание его существа, его ролей, характера его использования, значимых направлений его развития возможно только в контексте освоения этой теории, вместе с этой теорией, сплавленной с практикой использования её результатов****,*** *вместе с её развёртыванием, вместе с постижением логики её развёртывания*[17]).

---

[15] **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. С. 93–99.

[16] И не только в обучении математике. Чем сложнее предмет изучения, чем в большей степени он требует высоких уровней мыследеятельности, тем в большей степени открывается и возможность и необходимость освоения стратегии прорывов на такие уровни и тем в большей степени проявляются природосообразность и эффективность воплощения этого метода, предстающего как взаимодействие дополняющих друг друга сократического и дидактического диалогов, подобных сократическому (открытому, творческому) и дидактическому (позитивно-манипуляционному) диалогам. См.: **Рубцов В.В., Марголис А.А., Телегин М.В.** Психологическое исследование генеза и развития житейских понятий в условиях учебного диалога (первый и второй этапы) // Психологическая наука и образование. 2007. № 2. С. 61–72; **Когаловский С.Р.** Развивающее обучение математике как преображающее обучение. Иваново: Изд-во «Иваново», 2010.

[17] Отметим к тому же, что бо́льшая доступность и бо́льшая эффективность обучения математике в старшей школе достигается не опрощением курса математики, не обеднением его содержания, а наращиванием многомерности и многоуровневости учебной деятельности, то есть следованием той сложности, каковую представляют природосообразные процессы восхождения к развитым формам математической деятельности, и тому многообразию ситуаций, в которых ведущие понятия проявляют себя как формы представления продуктивных и широко действующих методов. Трудности в обучении математике создаются не сложностью ее природы, природы математической деятельности, а уходом от нее, подавляющим активизацию и развитие механизмов понимания разных уровней и их взаимодействий, формирование необходимых функциональных органов. См.: **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования. LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012; **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. С. 93–99.

• *Природосообразное, продуктивное освоение ведущего строгого понятия – это освоение его как продуктивной модели протопонятия, являющегося его историческим или конструируемым истоком. При таком освоении с самого начала осознаётся протосмысл понятия и процесс его освоения ведом механизмами понимания, развивающимися вместе с этим процессом, от понимания как включения новых знаний в прошлый опыт субъекта до понимания на надпредметном и метапредметном уровнях и пересмотра прошлого опыта с новых позиций. И потому процесс освоения понятия должен начинаться с освоения и развития самого протопонятия и выстраиваемых на его базе прототеории и практики её применения*[18].

Важнейшим механизмом освоения фундаментальных математических понятий, а посредством этого и общего интеллектуального развития учащихся, является процесс деконтекстуализации, о которой сказано выше. Такой процесс приводит к формированию предельно широкого, «трансцендентального» контекста, погружение в который является одним из ведущих механизмов и характеристической чертой математической деятельности. Этот механизм не только создаёт условия, становящиеся априорными условиями последующего опыта, предпосылками последующего познания, организующими опыт поисково-исследовательской деятельности, но и рождает эффективные стратегические орудия математической деятельности. «Трансцендентальные» контексты сами становятся «поленезависимыми» орудиями математической деятельности. Продуктом деконтекстуализации является поликонтекстуализация, то есть возможность продуктивного обращения к широкому множеству наличествующих и возможных контекстов. Деконтекстуализация является типичной формой надобъектного моделирования, отвечающего глубинному существу математической деятельности.

Природосообразные процессы формирования фундаментальных математических понятий, призванных выполнять многофункциональные и многоуровневые роли, строятся как многостадийные процессы формирования продуктивных моделей протопонятий, являющихся их историческими или конструируемыми квази-историческими истоками[19]. И такие модели протопонятий выступают *не как средства* их исследования, *а как цели* процессов формирования орудий математической деятельности, несущих её преображения. Такие процессы приближают учащихся к осознанию уникальной многоуровневости и многомерности фундаментальных математических понятий и представляемых ими форм мыследеятельности, к осознанию того, что *эффективные математические методы являются продуктами многоступенных абстрагирований-моделирований.*

Осознание того, насколько широко множество ролей моделирования в математике, насколько широко множество форм моделирования, используемых даже на элементарных уровнях математической деятельности, осознание того, что развитие креативности мышления — это, в конечном счёте, развитие способностей к отысканию и использованию эффективных форм моделирования — всё это раскрепощает субъективность учащихся и тем способствует развитию их воображения и такому развитию их субъективности, которое является развитием их как субъектов развивающейся учебной деятельности. ❑

---

[18] **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. С. 93–99.

[19] **Когаловский С.Р.** Развивающее обучение математике как преображающее обучение. Иваново: Изд-во «Иваново», 2010; **Когаловский С.Р.** К методологии преображающего обучения (Обучение школьников математике). LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011; **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.