Понятие модели и математика

Сергей Рувимович Когаловский,
профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук

• обучение математике • моделирование • полифункциональность • субъектность • деконтекстуализация • синергетический подход •

Не будет большим преувеличением сказать, что каков бы ни был предмет обучения, эффективность обучения определяется используемыми в нём формами и уровнями моделирования, тем, в какой мере обучение пронизывается процессами моделирования, осознаваемыми как таковые, тем, в какой мере сами способы моделирования в осваиваемой области деятельности стали специальным предметом изучения. В особой степени сказанное относится к обучению математике, направленному не просто на обретение учащимися определённых знаний, умений и навыков, но на формирование общих способов интеллектуальной деятельности, являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности, а значит, и на развитие способностей к поисково-исследовательской деятельности, невозможное без развития креативности мышления.

Согласно В.А. Штоффу[1], модель — это «система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что её изучение даёт новую информацию об этом объекте»[2]. Моделированию, его формам, отношениям между исследуемыми объектами и их моделями в математической деятельности присущ особый, уникальный характер, и именно эта уникальность делает обучение математике значимым средством общего интеллектуального развития учащихся[3]. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие и конкретизирующие сказанное.

Казалось бы, говорить о возможностях использования геометрических моделей в решении алгебраических задач — значит впадать в банальность. Тем не менее, мы начнём с обращений именно к таким задачам, что позволит несколько лучше проявить значимые, но слабо акцентируемые стороны дела.

1) Это, прежде всего, характерные для математической деятельности взаимные моделирования, взаимные опосредствования разных подходов.

2) Укоренённый в общеобразовательной школе подход к исследованию функций и построению их графиков состоит в движении от исследования элементов, частей, отдельных аспектов целого к конструированию целого. Формирование и развитие умения строить схематические графики функций, используя элементарные средства, в основе которых лежат, прежде всего, интуитивные представления о непрерывности, несёт возможность использования более

---

[1] **Штофф В.А.** Моделирование и философия. М.; Л., 1966. С. 19.

[2] То, что было для данного исследователя моделью исследуемого объекта «вчера», может уже не быть его моделью «сегодня», исчерпав несомые им возможности получения новых знаний об этом объекте. Поэтому представляется естественным и значимым с точки зрения дидактики (и не только) следующее уточнение этого понятия: модель данного объекта в данном исследовании (на данной стадии исследования) для данного исследователя — это такой объект, который в этом исследовании (на данной стадии исследования) его замещает и тем способствует успешности исследования. Естественным средством сообразования не просто с субъектной, но с поли-субъектной стороной дела в обучении является активное использование широко понимаемой вариативности. Всюду далее будет предполагаться сообразование с полисубъектной стороной дела без явного указания на это.

[3] **Когаловский С. Р.** Моделирование в учебной математической деятельности // Школьные технологии. 2012. № 3. С. 936–103.

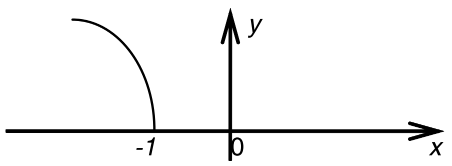
продуктивного (и более природосообразного) подхода, основанного на принципе *от неразвитого* ***целого*** *к развиваемому и преображаемому* ***целому***. Такой подход ведёт к развитию дальновидения и дальнодействия мышления.

Задача 1. Решить уравнение

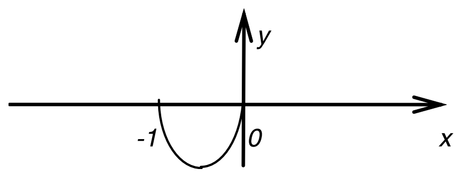
$$(x-2)(x-1)x(x+1)=-6.$$

Построим схематический график функции $f(x)=(x-2)(x-1)x(x+1)$. Он поможет усмотреть, где, в каких промежутках могут располагаться корни уравнения.

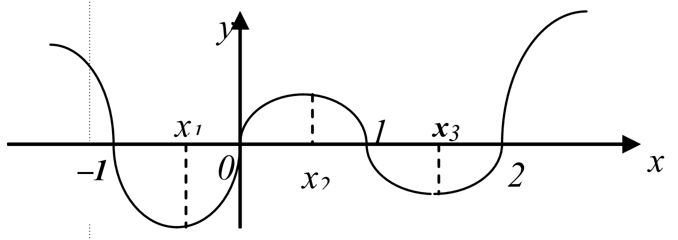
Нули функции f разбивают числовую ось на интервалы её знакопостоянства. В интервале $(-\infty; -1)$ функция принимает положительные значения и $f(-1)=0$. Отсюда следует, что часть графика, соответствующая этому интервалу, лежит над осью $0x$ и что -1 — его общая точка с осью $0x$:



В интервале $(-1; 0)$ функция принимает отрицательные значения, его концы — нули функции. Значит, часть графика, соответствующая этому интервалу, расположена под осью $0x$, а концы интервала являются общими точками графика с осью $0x$:



Используя аналогичные аргументы, строим части графика, соответствующие интервалам $(0; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$. В целом схематический график функции выглядит так:



(Не вполне адекватная форма «концов» построенного графика служит дополнительным побуждающим средством обращения к естественному вопросу: как «в действительности» выглядят продолжения графика, устремляются ли они вверх, и если да, то насколько круто?) Корнями уравнения могут быть лишь точки интервалов $(-1, 0)$ и $(1, 2)$, в которых функция f принимает отрицательные значения. Для всякой точки x из $(-1, 0)$ $|x-2|<3$, $|x-1|<2$, $|x|<1$ и $|x+1|<1$, а значит, $|f(x)|<6$. Значит, в интервале $(-1, 0)$ нет корней данного уравнения. Аналогично доказывается, что их нет и в интервале $(1, 2)$.

Использованием построенного графика легко решается и следующая задача.

Задача 2. Найти число точек экстремума функции $f(x)=(x-2)(x-1)x(x+1)$.

График f показывает, что в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 2)$ имеются точки экстремума. Таким образом, имеется не менее трёх точек экстремума. Производная функции f представима многочленом 3-ей степени. Значит, у функции не более трёх критических точек, а потому не более трёх точек экстремума. Таким образом, таких точек ровно три.

Задача 3[4]**.** Найти количество корней уравнение $log_{1/16}x=(1/16)^x$.

Легко усматривается, что $1/2$ — корень уравнения. Значит, $M(1/2, 1/4)$ — общая точка графиков функций $y=log_{1/16}x$ и $y=(1/16)^x$. А так как эти функции взаимно обратные, то их графики симметричны относительно прямой $y=x$. И потому точка $P(1/4,1/2)$ также является общей точкой этих графиков. А это равносильно тому, что число ¼ также является корнем.

Сопоставляя графики функций $y=log_{1/16}x$ и $y=(1/16)^x$, непросто усмотреть, что у них есть две общие точки, то есть что имеются два корня рассматриваемого уравнения. Но ещё труднее, если это вообще возможно, усмотреть, что имеется ещё одна общая точка. Тем не менее, усмотрению этого способствует обращение к графикам названных функций: эти графики пересекаются с прямой $y=x$, а из равносильности уравнений $log_{1/16}x=x$ и $(1/16)^x=x$ следует, что эти гра-

[4] Формулировка этой задачи автору сообщена А.В. Шаповаловым.

фики пересекают прямую $y = x$ в одной точке. Абсцисса этой точки и есть третий корень уравнения.

Приведённое решение представляет эффективное взаимодействие аналитического и графического подходов к её решению. Каждый из них выступает как продуктивная модель по отношению к другому. Это ведёт к рождению их синтеза, несущего развитие понимания исследуемой ситуации.

Абстрагирование, состоящее в мысленном выделении тех или иных свойств и связей объекта и отвлечении от других и тем самым открывающее возможность получения о нём новых знаний, является моделированием. А значит, и обобщение исходных представлений является их моделью, поскольку обобщение — это форма приращения знания путём мысленного перехода от частного к общему, которой обычно соответствует переход на более высокую ступень абстракции. Вот нехитрые, но от этого не менее выразительные примеры такого рода моделирования.

В учебниках по алгебре имеется немало задач, подобных следующим:

(*) Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\frac{1}{a^2-\sqrt{a}}$$

(**) Вычислить значение последнего выражения при a=1,001.

Качественно иной характер имеет следующая модификация этих задач:

(***) Вычислить с точностью до 0,001

$$\frac{\sqrt{1{,}001}+1}{1{,}001\sqrt{1{,}001}+1{,}001+\sqrt{1{,}001}}:\frac{1}{(1{,}001)^2-\sqrt{1{,}001}}$$

Использование калькулятора не делает задачу (***) тривиальной, так как априори неясно, с какой точностью необходимо осуществлять промежуточные вычисления для достижения требуемой точности итогового результата. К тому же знаменатель второй дроби близок к нулю. Напрашивается использование и обыгрывание выражения из задачи (*). Существо такого способа решения, «скрываемое» за использованием подстановки как за техническим приёмом, состоит в схватывании и обыгрывании *структуры данного* арифметического выражения, представляемой подходящим алгебраическим выражением. Последнее используется как продуктивная *модель* данного выражения, как продуктивная модель его структуры, то есть как модель эффективного способа решения задачи.

Но более продуктивна следующая задача. Её обсуждение способствует восхождению от «объектного» моделирования к самой идее моделирования как особому предмету рассмотрения, имеющему метапредметный уровень.

Задача 4. Вычислить с точностью до 0, 001 выражение из задачи (***) и следующее выражение:

$$\frac{\sqrt{0{,}002}+1}{0{,}002\sqrt{0{,}002}+0{,}002+\sqrt{0{,}002}}:\frac{1}{(0{,}002)^2-\sqrt{0{,}002}}$$

Оба выражения имеют одну и ту же структуру (они строятся с помощью одной и той же последовательности операций). И это бросающееся в глаза обстоятельство не может не породить вопрос: как использовать эту одинаковость для сокращения общего объёма вычислительной работы?

Абстрагирование от значений «атомов», из которых строятся эти выражения (для первого из них — это 1,001, а для второго — 0,002), или, говоря фигурально, превращение «атомов» в «анонимные» числа, превращает эти выражения в одно и то же алгебраическое выражение, а именно в выражение из задачи (*), являющееся их *общей моделью*.

Абстрагирование от строения «стандартного блока» $\sqrt{a}$, из которого оно строится, приводит к рациональному выражению

$$\frac{A+1}{A^3+A^2+A}:\frac{1}{A^4-A},$$

являющемуся его *моделью*. Полученное выражение преобразуется в A^2-1. Следовательно, выражение (*) тождественно равно a – 1. Значит, первое из заданных выражений равно 0,001, а второе — 0,998.

Задача 5. Вычислить [2]201320132013^2 – [2]201320132014 · [2]201320132012, где [2] обозначает 10^{10} раз повторённую цифру 2.

Работать непосредственно с этим арифметическим выражением, строящимся из столь огромных чисел, невозможно, невозможно и использование компьютера. Но возможность радикального свёртывания этого выражения несёт алгебраическая знаковая система: структура=модель данного выражения представляется выражением $a^2 - (a-1)(a+1)$, тождественно равным 1. Следовательно, данное выражение равно 1.

Задача 6. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\frac{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}+\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}-\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}-\frac{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}-\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}+\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}$$

Абстрагирование от значений «атомов» (1,4 и 0,96), из которых строится рассматриваемое выражение, приводит к алгебраическому выражению:

$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}-\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}, \quad (1)$$

являющемуся его моделью. Абстрагирование от строения его «стандартных блоков» $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$ превращает выражение (1) в выражение

$$\frac{\sqrt{C}+\sqrt{D}}{\sqrt{C}-\sqrt{D}}-\frac{\sqrt{C}-\sqrt{D}}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}, \quad (2)$$

являющееся его моделью. Абстрагирование от строения «стандартных блоков» $\sqrt{C}$ и $\sqrt{D}$ выражения (2) приводит к выражению

$$\frac{E+F}{E-F}-\frac{E-F}{E+F}, \quad (3)$$

преобразуемому в

$$\frac{4EF}{E^2-F^2}.$$

Отсюда находим, что исходное арифметическое выражение равно

$$\frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

Задача сводится к вычислению $\sqrt{6}$ с точностью до 0,001.

Процесс решения задачи сопровождался трёхкратным абстрагированием. Каждое из выражений (1), (2) и (3), вводившееся как средство анализа исходного выражения, как выражение его структуры, как его модель, само превращалось в предмет аналогичного рассмотрения. Это обстоятельство подготавливает учащихся к осознанию уникальной многоуровневости и многомерности ведущих математических понятий, уникальной многоуровневости и многомерности представляемой ими мыследеятельности, к осознанию того, что эффективные математические методы являются продуктами многоступенных моделирований.

Если рассматриваемое выражение очень сложное, то абстрагирование от значений сравнительно мелких «стандартных блоков» приведёт к выражению, которое будет не намного более обозримо, чем исходное. Но использование слишком крупных «стандартных блоков» обычно лишает возможности в должной мере выявлять и обыгрывать особенности структуры исследуемого выражения, подобно тому, как строение большого города, его план трудно усмотреть и с высоты голубиного полёта, и на космическом удалении от него[5].

Моделирование, используемое в решении задач, подобных последней, направляется на схватывание и выражение структуры заданного выражения как *программы* его построения. Но обращение к знаковой форме, представляющей эту структуру, несёт преображение подхода к решению задачи, не просто тем, что эта форма используется как модель этого выражения, но тем, что она становится *мета-программой* его построения, и не только в том смысле, что она изъявляет себя как общая программа решения множества задач, подобных данной, но в том, более существенном смысле, что она становится носителем множества *разных* программ вычисления этого и других, не только «изоморфных» ему выражений и тем открывает возможность их сопоставле-

[5] Заметим, однако, что использование в качестве стандартного блока выражения (1), например, первой его дроби и последующее ее упрощение позволяют заметно укоротить процесс решения задачи.

ния под углом зрения их эффективности. Нередко находимые мета-программы сами далее выступают не как средства, напрямую ведущие к решению задачи, а как объекты рассмотрения, и только новые знаковые формы, находимые как их (эффективные) модели, то есть как *мета-мета-программы* построения исходных объектов, открывают хорошо реализуемые возможности усмотрения эффективных программ построения и исследования этих объектов.

Уже это говорит о том, что надпредметный и метапредметный планы должны пронизывать обучение математике (да только ли математике!), что они — необходимые средства освоения предметного содержания. Это говорит и о том, что обращение к надпредметным и метапредметным планам входит в работу механизмов понимания уже на элементарных уровнях мыследеятельности. А также о том, что реализация принадлежащей Ю.В. Громыко идеи метапредмета должна начинаться уже в процессе изучения (разнообразного) предметного содержания, и что только на базе этого открывается возможность превращения этой идеи в предмет эффективного изучения. Это говорит о том месте и той роли, которые должно играть моделирование в обучении. Это взывает к тому, что обращение к надпредметным и метапредметным планам, их широкое использование и развитие должно быть одним из ведущих дидактических принципов.

За решениями задачи 6 и следующей задачи стоит единая (мета-)модель способа их решения, характеризуемая тем, что сами используемые средства становятся предметом рассмотрений и преобразований.

Задача 7. Решить уравнение $x^5 - 80x^2 + 240x - 192 = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^5 - 80x^2 + 240x - 192$. Попытаемся исследовать её с помощью производной. $f'(x)= 5x^4 - 160x + 240$. Естественно исследовать производную с помощью её производной, то есть с помощью второй производной функции f. $f''(x) = 20x^3 - 160$. Отсюда $f'''(x) = 60x^2$. Так как $f'''(x) > 0$ всюду, кроме точки 0, то $f''(x)$ — возрастающая функция. Точка 2 является её нулём. Следовательно, она является точкой минимума функции $f'(x)$. Более того, $f'(2)$ — наименьшее значение этой функции. И так как $f'(2) = 0$, то $f'(x) > 0$ всюду, кроме точки 0, а значит, f — возрастающая функция, и потому она имеет не более одного нуля. Иначе говоря, данное уравнение имеет не более одного корня. Так как $f(0) < 0$, то корень этого уравнения положителен. $f(1) < 0$. Значит, корень больше 1. $f(2) = 0$. Таким образом, 2 — единственный корень данного уравнения.

Пиаже различает три уровня абстракции (=моделирования)[6]:

- *эмпирическую* абстракцию, «ту, которая распространяется на … объекты, внешние по отношению к субъекту»;

- *логико-математическую, или отражающую* абстракцию, ведущую начало от действий и операций субъекта и такую, что в её основе лежат «процесс проекции на более высокий уровень того, что было извлечено из низшего уровня…, и процесс … перестройки на новом уровне», в котором «вначале используются операции, достигнутые на предыдущем уровне, лишь в качестве инструментальных, но с целью скоординировать их в некую новую общность»;

- *рефлексирующую* абстракцию, направленную на «тематизацию <то есть на превращение в ведущий предмет рассмотрения> того, что оставалось операциональным или инструментальным в отражающей абстракции».

Математическое моделирование — это обычно обращение к отражающей абстракции. В процессах формирования фундаментальных математических понятий и концепций доминирует рефлексирующая абстракция, ведущая к освоению их как носителей широкого комплекса познавательно-преобразующих функций, как средств и как продуктов осознания «существа» представляемых ими форм и способов мыследеятельности. В таких процессах встречаются «самые верхние переживания дольнего мира и самые нижние мира горнего»[7] и рождается их продуктивное единство.

Уже отражающая абстракция направлена не столько на

[6] **Пиаже Ж.** Психогенез знаний и его эпистемологическое значение // Семиотика. М.: Радуга, 1983. С. 90–101.

[7] **Св. Павел Флоренский.** Избранные труды по искусству. М.: Изобразительное искусство, 1996. С. 83.

свойства «вещей», сколько на развитие умственных операций и действий, и потому её питательной почвой является наращивание множественности контекстов, сопровождающееся таким наращиванием полипредметного опыта, которое ведёт к развивающемуся единству расширяющегося разнообразия его продуктов. Превращение математической модели в самостоятельный предмет изучения, превращение самого процесса моделирования в предмет изучения — это не просто восхождение на теоретический уровень, это восхождение на качественно более высокий уровень мышления — методологический, это восхождение к постижению сокровенного существа математической деятельности.

Задача 8. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\left(\sqrt{0{,}11}-\frac{\sqrt[4]{0{,}001331}+1}{\sqrt[4]{0{,}11}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{0{,}001331}+\sqrt{0{,}11}}{\sqrt{0{,}11}-1}.$$

Это выражение строится из «стандартных блоков» $\sqrt[4]{0{,}11}$ и $\sqrt[4]{0{,}001331}$. Его структура представляется выражением

$$\left(A^2-\frac{B+1}{A+1}\right)^{-1}-\frac{B+A^2}{A^2-1},$$

которое не приводимо к существенно более простому виду, позволяющему сколь-нибудь заметно упростить вычисление. Заметим, однако, что $0{,}001331 = (0{,}11)^3$ и что, следовательно, это алгебраическое выражение слишком общим образом описывает структуру данного арифметического выражения. Оно в малой степени отражает особенность структуры данного выражения и потому не является его продуктивной моделью. Более полнокровно структура данного выражения представляется выражением

$$\left(A^2-\frac{A^3+1}{A+1}\right)^{-1}-\frac{A^3+A^2}{A^2-1},$$

преобразуемым в $-(A+1)$. Следовательно, данное выражение равно $-\left(\sqrt[4]{0{,}11}+1\right)$. Задача сводится к вычислению $\sqrt[4]{0{,}11}$ с точностью до 0,001.

Рассмотрение задач, подобных последней, помогает учащимся осознать, что процесс освоения общего метода как процесс накопления опыта его использования в разнообразных ситуациях, как процесс столкновений с разнообразными формами особенного и единичного — это процесс обучения моделированию, сопровождаемый формированием способности продуктивно сопрягать общее и особенное.

Никакая система обучения математике не создаёт возможности лобового движения от общего к частному, возможности прямого усмотрения частного, скрывающегося за единичным и особенным. Его усмотрение и обыгрывание как частного осуществимы построением его модели, «выпячивающей» прежде всего присущие ему черты общего. Достижение и расширение возможности движения от общего к частному осуществляются посредством накопления опыта многосторонних взаимодействий общего с особенным и единичным.

Задача 9. Положительное или отрицательное число

$c = 2 \cdot 25251252522^3 - 3 \cdot 25251252522^2 \cdot 49491494913 + 3 \cdot 25251252522 \cdot 49491494913^2 - 49491494913^3$?

Простым или составным числом является его абсолютная величина.

Запись числа c строится из блоков a = 25251252522 и b = 49491494913. Его структура представляется алгебраическим выражением $2a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, преобразуемым в $a^3 + (a - b)^3$. Последнее преобразуется в произведение $(2a - b)(a^2 - ab + b^2)$, первый множитель которого положителен. А так как второй множитель есть неполный квадрат разности чисел, отличных от 0, то и он положителен. Значит, $c > 0$.

Обращение к выражению $(2a - b)(a^2 - ab + b^2)$ позволило найти ответ на первый из вопросов, минуя громоздкие вычисления. Но является ли оно и эффективной моделью способа решения второго вопроса? Лобовой подход к решению этого вопроса был бы сопряжён с большим объёмом вычислений. *Структура этого выражения* подсказывает эффективный подход: значение первого множителя есть натуральное число, отличное от 1; легко усмотреть, что это верно и для второго множителя. Таким образом, с — составное число.

Весьма важный вид моделирования, несущий немалые возможности для развития креативности мышления учащихся, состоит в том, что постановка задачи, рассматриваемая в одном контексте, моделируется её постановкой, рассматриваемой в существенно ином контексте. Заявлять, что такой вид моделирования робко используется в обучении математике, было бы неправдой: обучение математике пронизывается широким использованием геометрического моделирования алгебраических задач и алгебраическим моделированием задач геометрических. И всё же для такого заявления есть основания: довольно узок круг таких контекстов и слишком однообразны способы таких моделирований-переводов. Они способствуют хорошей выучке, но мало способствуют развитию креативности. Вместе с тем, даже рассмотрения в рамках, например, только алгебры открывают широкие возможности такого использования обсуждаемого вида моделирования. Рассмотрим примеры, близкие примерам такого рода.

Задача 10. Решить уравнение

$$2x^3 + (2 + \sqrt{5})x^2 + 3\sqrt{5}\,x + 5 = 0.$$

Уравнение более общего вида

$$2x^3 + (2 + z)x^2 + 3zx + z^2 = 0.$$

является эффективной моделью подхода к решению данного уравнения. Его левая часть представима как квадратный трёхчлен относительно z. Посредством её разложения на множители это уравнение преобразуется в $(z + 2x)(z + x^2 + x) = 0$. Подставляя в полученное уравнение значение z, равное $\sqrt{5}$, получаем уравнение

$$(\sqrt{5} + 2x)(\sqrt{5} + x^2 + x) = 0,$$

равносильное данному. Его единственным корнем является число $-\sqrt{5}/2$.

Задача 11. Доказать, что произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

• *Нетрудно доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2!, что произведение трёх делится на 3!, что произведение четырёх — на 4!. Пользуясь этим, легко доказать, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 5!. Не намного труднее доказать, что произведение шести последовательных натуральных чисел делится на 6!. После этого нетрудно доказать, что произведение семи последовательных натуральных чисел делится на 7!. Допустим, что для какого-то большого числа q нам удалось доказать, что для всякого $r \le q$ произведение любых r последовательных натуральных чисел делится на $r!$. Не видно, как, пользуясь этим, доказать, что произведение любых $q + 1$ последовательных натуральных чисел делится на $(q + 1)!$. Надо искать другие пути доказательства.*

• *Итак, надо доказать, что для всякого натурального n $n(n + 1)(n + 2) \cdots (n + k - 1)$ делится на $k!$, то есть что число $n(n + 1)(n + 2) \cdots (n + k - 1)/k!$ целое.*

• *Но это число есть C_{n+k-1}^{k}, то есть число k-элементных подмножеств у $(n + k - 1)$-элементного множества, а значит, целое число!*

Рассмотренное решение помогает раскрыть значимые стороны дела, связанные с возможностями, несомыми знаковым моделированием в математической деятельности. Знаковое моделирование несёт деконтекстуализацию[8], или, лучше сказать, надконтекстуализацию — восхождение на надпредметный уровень рассмотрения, осуществляемое как процесс обобщения знаний и умений, как процесс превращения их в абстрактные действия, независимые от конкретных условий действия. Деконтекстуализация рождает поликонтекстуализацию: она открывает возможность ассоциирования и взаимного моделирования самых разных объектов (и ситуаций), и близких, и далёких по своей «природе». Важно и то, что зна-

[8] **Вербицкий А.А., Калашников В.Г.** Контекст как психологическая категория // Вопросы психологии. 2011. № 6. С. 3–15.

ковое моделирование использует такие знаковые формы, которые являются элементами (алгебраической) знаковой *системы*, семантическое содержание которой становится достаточно богатым уже на ранних этапах изучения алгебры. Не менее важно и то, что эта знаковая система снабжена процедурами преобразований относящихся к ней знаковых форм, операциями над такими формами. Она несёт не только возможность «проявления», раскрытия наличествующих, но скрытых отношений между объектами, моделируемыми знаковыми формами этой системы, но и рождение новых отношений[9]. Она рождает новые тактики внимания, новую «семантику», новые процедуры. Она преобразует само поле поисково-исследовательской деятельности. Это зримо проявляется и в рассмотренном решении, начало которого — в алгебраическом знаковом моделировании постановки задачи, и в решении задач 9 и 10, и в решении следующей задачи.

Задача 12. Вычислить сумму:

$$S = (4 - \sqrt[3]{2})(4 - \sqrt[3]{9})(4 - \sqrt[3]{12}) + \sqrt[3]{2}\,(4 - \sqrt[3]{9})(4 - \sqrt[3]{12}) + (4 - \sqrt[3]{2})\,\sqrt[3]{9}\,(4 - \sqrt[3]{12}) + (4 - \sqrt[3]{2})(4 - \sqrt[3]{9})\,\sqrt[3]{12} + (4 - \sqrt[3]{2})\,\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2}\,(4 - \sqrt[3]{9})\,\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{9}\,(4 - \sqrt[3]{12}).$$

Обозначим $\frac{\sqrt[3]{9}}{4}$ число $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ через p_1, число $\frac{\sqrt[3]{9}}{4}$ через p_2, число $\frac{\sqrt[3]{12}}{4}$ через p_3.

$$\frac{S}{4^3} = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)\,p_3 + p_1\,p_2(1 - p_3) + p_1\,(1 - p_2)\,p_3 + (1 - p_1)\,p_2\,p_3.$$

Правая часть этого равенства выражает вероятность события *B*, состоящего в том, что происходит не более двух из независимых событий A_1, A_2, A_3, вероятности которых — p_1, p_2 и p_3. Это усмотрение несёт продуктивную модель подхода к решению задачи. Его использование — это перевод задачи в иной контекст, позволяющий использовать связи, отношения, процедуры, не предполагавшиеся постановкой задачи.

Так как $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p_1\,p_2\,p_3$,

то $S = 4^3(1 - p_1\,p_1\,p_1) = 64 - \sqrt[3]{216} = 58$.

Поиск и использование работоспособных моделей исследуемых ситуаций активизируют глубинные механизмы, участвующие в математической деятельности, и способствуют развитию гибкости их координаций и тем развитию креативности.

Обучение математике — это деятельность, складывающаяся из многих компонентов и преследующая много целей. Одной из ведущих его целей является формирование и развитие способности к поисково-исследовательской деятельности. И понятие модели по Штоффу относится к такой деятельности (и даже единственно к такой деятельности). Однако при всей широте этого понятия термин «модель» естественно и целесообразно использовать в более широком смысле и применительно к вопросам, относящимся к исследовательской деятельности, и даже в контексте исследования проблем обучения, направленного «только» на «получение» тех или иных знаний. Ведь «получение» знаний — это не просто получение информации, это *освоение* знаний как средств и орудий деятельности, а значит, и формирование функциональных органов, необходимых и для самой этой деятельности, и для учебной деятельности, направленной на её освоение.

А для этого необходимы образцы=модели учебных действий, образцы=модели восхождений мыследеятельности на надпредметный и метапредметный уровни и взаимодействий этих уровней с предметными. Для этого необходимы модели учебной деятельности как целого[10], модели осваи-

[9] Это, прежде всего, синтактико-семантические отношения, то есть отношения между структурами знаковых форм и свойствами исследуемых систем, представляемых такими формами.

[10] О том же говорит обращение В В. Давыдова в [5, с. 226] к понятию дидактической модели, да и весь контекст этой его работы (и не только этой), хоть явно он как будто следует пониманию модели по Штоффу. Так, он пишет: «Модели — это форма абстракции …, в которой существенные отношения предметов выражены в наглядно-воспринимаемых и представляемых связях и отношениях знаковых элементов» [там же, с. 128].

ваемых форм деятельности, сообразуемые с широким многообразием возможных условий её осуществления. Это делает не просто целесообразным, но необходимым обращение к существенно более широкому пониманию модели и моделирования, направляющему по пути формирования и развития методологии и методик обучения, отвечающего и потребностям современного социума, и гуманитарным ценностям. Представляется, что такому пониманию больше отвечает следующее квази-определение: модель данного объекта *в данной деятельности* — это такой объект, который в этой деятельности его замещает (представляет) и тем способствует её успешности[11].

Всепроникающая работа моделирования в математической деятельности, необозримое многообразие его форм, модельная природа фундаментальных математических понятий — всё это зримо показывает, насколько далёк от истины расхожий тезис «математика — это логика» и насколько ближе к ней тезис «математика — это моделирование» (но, конечно же, ещё ближе к истине тезис «математика — это моделирование и логика»). Однако без уточнений того, какие формы моделирования при этом имеются в виду, последний тезис превращается в банальную истину как относящийся ко всякой деятельности.

Математическая деятельность состоит в формировании идеальных объектов как продуктов многоступенных абстрагирований-трансцендирований-моделирований и использовании их в качестве моделей не только исследуемых систем и не только способов их исследования, но и в качестве самих способов моделирования, то есть в качестве стратегических средств самой математической деятельности, а посредством этого становящихся эффективными средствами формирования и развития общих способов поисково-исследовательской деятельности. А это говорит о том, что (развитые) идеальные объекты, формируемые посредством такого моделирования, направлены на освоение и развитие надпредметного и метапредметного планов, что эти планы пронизывают все уровни математической деятельности.

В конечном счёте, моделирование — это перевод рассмотрения из «внутреннего» плана во «внешний», в иные контексты, в иные плоскости, на иные уровни. И чем дальше отстоят «внутренний» и «внешний» планы, чем больше контекстов-переводов, тем бóльшую продуктивность несёт так строящаяся модель и тем бóльшим развивающим средством является процесс формирования такой модели. Образцами таких процессов являются процессы формирования (строгих) фундаментальных понятий как моделей протопонятий, как моделей первомеханизмов математической деятельности. Такие процессы, такие переводы глубинного «внутреннего» плана во «внешний» сопровождаются погружениями в ещё бóльшие глубины «внутреннего» плана. Направляемые на совершенствование способов мышления, они приносят большее — их преображения.

Исторические процессы становления и освоения строгих общих математических понятий подтверждают, что «никакое мыслящее устройство не может быть одноструктурным и одноязычным: оно... должно включать в себя разноязычные и взаимонепереводимые семиотические образования. Обязательным условием любой интеллектуальной структуры является её внутренняя семиотическая неоднородность»[12]. Более того, такие процессы сопровождаются наращиванием многоязычности и семиотической неоднородности. Такими должны быть процессы учебной деятельности, направленные на восхождение к фундаментальным математическим понятиям, то есть на их формирование и освоение[13].

[11] Конечно, и обсуждаемые варианты понятия модели и и другие его варианты не могут не предполагать конкретизации, достигаемой, как и конкретизация всякого понятия методологического уровня, в конечном счете, не дефиницией в строгом смысле (которая убивала бы его методологическое существо), а погружениями его в соответствующие ему контексты.

[12] **Лотман Ю. М.** Чему учатся люди. Статьи и заметки. М. : Центр книги ВГБИЛ им. М.И. Рудомино, 2010. С. 38–39.

[13] Они должны складываться из взаимодействий полярных направленностей — использования самых разных форм и способов мышления, в том числе широко привлекаемого эмпирического мышления, и «чистой» субъективности, формируемой посредством феноменологической редукции в смысле, близком гуссерлевскому. Фомируемые такими процессами строгие понятия, также как и сами эти процессы, являются, таким образом, продуктами синтеза разнонаправленных процессов, разных языков и их взаимодействий. Вне такого синтеза не осуществима и феноменологическая редукция. Продуктом синтеза является и ее продукт — «чистая» субъективность.

Такие понятия в математической деятельности являются моделями «парадигматического» уровня. Они выступают как развивающиеся модели её первомеханизмов и как носители множества познавательно-преобразующих функций, ведущими из которых являются следующие:

- быть носителями методов решения широкого круга задач;
- быть средствами их обоснования;
- быть средствами системной организации знаний;
- быть носителями надпредметных знаний;
- быть носителями продуктивных взаимодействий предметных и надпредметных знаний, а значит, быть и стратегическими и тактическими орудиями математической деятельности, несущими в себе потенцию «само»-развития;
- быть средствами развития дальновидения и дальнодействия мышления учащихся;
- быть средствами развития способностей учащихся к получению новых знаний;
- быть средствами их общего интеллектуального развития, открывающего возможность освоения общих форм и способов деятельности[14].

Этот комплекс функций направляет обучение на освоение математической деятельности как сложного, многоаспектного *целого*, на формирование общих способов интеллектуальной деятельности, являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности[15]. Фундаментальные математические понятия выступают в учебной деятельности одновременно как продукты уже имеющегося опыта и как модели-проекты новых форм деятельности.

Особо отметим, что, например, строгие понятия предела, непрерывности, касательной являются моделями соответствующих протопонятий в естественном смысле, но не в смысле Штоффа: использование таких моделей направлено не на получение новой информации о протопонятиях как о моделируемых объектах, а на преображение поисково-исследовательской деятельности. Поэтому моделирование, отвечающее понятию модели по В.А. Штоффу (в прикладных исследованиях используется, как правило, такое моделирование), естественно называть *объектным моделированием*, в отличие от широко используемого в математике и в обучении математике отвечающего её сокровенной природе *над-объектного* моделирования.

Всё это говорит о том, что и предложенное обобщение понятия модели по Штоффу является недостаточно широким. Моделирование — это способ, используемый не только для получения новой информации о том или ином объекте, не только для получения и освоения знаний и успешного осуществления освоенной или осваиваемой деятельности, но и для её преображения и для формирования новых форм деятельности.

Осуществление процессов восхождения от интуитивных представлений, от протопонятий к строгим математическим понятиям, процессов их формирования, процессов восхождения к аксиоматическим системам является особо значимым средством обучения. Он ведёт учащихся к осознанию места и роли моделирования в математической деятельности, к обогащению их метакогнитивного опыта. Это способ, отвечающий самой природе математической деятельности, он направляет на освоение не только продуктов учебной деятельности, но и логики процессов её развёртывания. И потому фундаментальные математические понятия

[14] **Когаловский С.Р.** Развивающее обучение математике как преображающее обучение. Иваново, Изд-во Иваново, 2010; **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. С. 93–99; **Когаловский С.Р**. К методологии преображающего обучения (Обучение школьников математике). LAP LAMBE RT Academic Publishing – 2011; **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования. LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.

[15] И потому процессы формирования фундаментальных понятий должны сообразовываться с тем, что «Минимально работающий текстовый генератор <смыслов> — это не изолированный текст, а текст в контексте, текст во взаимодействии с другими текстами и с семиотической средой» (Ю.М. Лотман). Трудно переоценить важность этого тезиса для дидактики и далеко не в последнюю очередь для педагогики математики.

вместе с процессами их формирования становятся продуктивными моделями общих форм и способов эффективной мыследеятельности[16], их идеальными формами. Первичному рассмотрению процессов формирования фундаментальных математических понятий и их анализу посвящена вторая часть настоящей статьи.

Несколько перефразируя М. Вартофского[17], можно сказать, что модели в учебной математической деятельности — это всё то, что создаётся путём самопреобразований учащихся в её процессе, это предполагаемая форма деятельности, репрезентация будущей практики.

Образ геологической разведки, осуществляемой из космоса, теряет свою высокую метафоричность при обращении к давно вошедшим в общекультурный обиход понятиям и методам математического анализа, которые основаны на моделировании «наивных» представлений о процессности, использующем идею актуальной бесконечности. ❑

[16] Полезно заметить, что продуктивное обучение математике осуществляется и через движение от общего и абстрактного к частному, и через моделирования общего другими общими, и через его моделирования частными, и через взаимные моделирования частных. Это проявляется и в процессах восхождения к фундаментальным понятиям, и в процессах их освоения. Все это присуще всякой научной и всякой продуктивной учебной деятельности. Уход от этого, попытки «выпрямить» процесс обучения «линеаризировать» его не могут не приводить к его омертвлению, к убиению развивающего начала.

[17] **Вартофский М.** Модели. Репрезентация и научное понимание. М.: Прогресс, 1988.