Обращение математических задач[1]

Михаил Иванович Зайкин,
зав. кафедрой математики, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт им. А.П. Гайдара», доктор педагогических наук, профессор

Олеся Михайловна Абрамова,
методист УМО ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт им. А.П. Гайдара»

• новая образовательная парадигма • обращение задачи • укрупнение дидактических единиц •

В условиях перехода на новую образовательную парадигму существенно возрастает роль предметных задач, их значение в достижении дидактических, развивающих и воспитательных целей на различных этапах усвоения знаний, формирования умений и навыков.

В обучении математике задачи всегда занимали особое место. Пронизывая все основные компоненты методической системы, они придают этой системе многие интегративные качества, обеспечивающие целостность, преемственность и технологичность учебного процесса. Эффективность обучения математике, в конечном счёте, определяется тем, какие именно задачи и в какой последовательности предлагались учащимся, какими способами они решались, и как велика была доля активности, самостоятельности ученика в процессе их решения.

В методической литературе по математике неоднократно отмечалась развивающая ценность дополнительной работы над задачей на заключительном этапе её решения. Подчёркивается нецелесообразным завершение работы над математической задачей лишь получением ответа к ней. Признаётся важным извлечение дополнительной информации, заключающейся в связях между величинами уже решённой задачи.

Получение такой дополнительной информации может осуществляться различными путями. Так, известный американский педагог-математик Д. Пойа, неоднократно обращаясь в своих работах к проблеме видоизменения математических задач, выделяет следующие способы варьирования, которые полезно применять в работе над задачей: возвращение к определениям; переформулировка; разложение и составление новых комбинаций; введение вспомогательного элемента; обобщение; специализация; использование аналогий[2]. Ему следуют многие отечественные и зарубежные авторы Э.Г. Готман, Т.А. Иванова, Е.С. Канин, М.Ю. Куликов, И.Б. Ольбинский, Г.В. Токмазов, А.Я. Цукарь и др.

Ниже речь пойдёт об одном из приёмов видоизменения задач, позволяющем получать обращённые задачи.

Сущность приёма обращения задачи

Формирование представлений об обращении задачи происходило в контексте теоретического осмысления видового многообразия математических утверждений (теорем). Известно, что ещё А.Н. Острогорский в позапрошлом столетии определял обрат-

[1] Статья подготовлена по результатам научных исследований в рамках Федерального задания Минобрнауки России, проект И120216131020 «Структурно-семантический и функциональный анализ задачных конструкций, используемых в обучении математике».

[2] **Пойа Д.** Как решать задачу: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1961. С. 58.

ную теорему следующим образом: «…если, имея теорему, составим другую, в которой условия первой станут заключением, а заключение первой её условием, то такая теорема называется обратной»[3]. Такое же понимание обратной теоремы можно найти в книге И.С. Градштейна «Прямая и обратная теоремы», вышедшей в середине прошлого столетия: «теоремой, обратной данной, называется такая теорема, условием которой служит заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы»[4].

В руководствах по методике преподавания математики, следуя этим представлениям, прямую теорему записывают как:

$$(A) \longrightarrow (B),$$

а обратную теорему:

$$(B) \longrightarrow (A),$$

где через *A* обозначено единственное условие, а через *B* — единственное заключение теоремы[5].

Что же касается обратных задач, то значение их постановки и решения в обучении математике впервые остро обозначил в статьях и книгах академик П.М. Эрдниев. Учёный рассматривает их в своей теории укрупнения дидактических единиц как одно из особых средств «выращивания» знаний школьников. Он настоятельно подчёркивает, что «если решена задача, то важно исследовать обратную задачу»[6].

Условная схема обратной теоремы, приведённая выше, в данном случае не всегда приводит к корректно поставленной задаче, а потому постановку обратной задачи рекомендуется осуществлять на основе приёма обращения.

В понимании П.М. Эрдниева приём обращения задачи состоит в следующем: после решения исходной задачи составляется и решается задача, обратная по отношению к исходной, для чего из условия исходной задачи извлекаются часть или даже все данные и включаются в её требование, а из него соответственно исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в её условие. После этих преобразований формулируется задача, в которой требуется найти результат, выбранный в качестве искомого, используя остальные данные, в том числе и ответ исходной задачи.

Модельное представление процесса обращения задачи

Очевидно, действуя указанным образом, из исходной задачи можно получить не одну, а несколько новых задач, взаимосвязанных друг с другом по условию и требованию. Для их систематического описания процесс обращения исходной задачи можно представить в виде следующей модели (см. рис. 1).

Обозначим за y_i совокупность элементов условия задачи (*У*), а за t_j — совокупность элементов её требования (*Т*). Будем последовательно извлекать из условия исходной задачи часть или даже все данные и включать их в её требование, а из него соответственно переводить несколько или все найденные искомые в её условие.

Если одно данное из условия (например, y_i) прямой задачи переводится в искомые и одно найденное значение (например, t_j) — в условие, то процесс обращения задачи

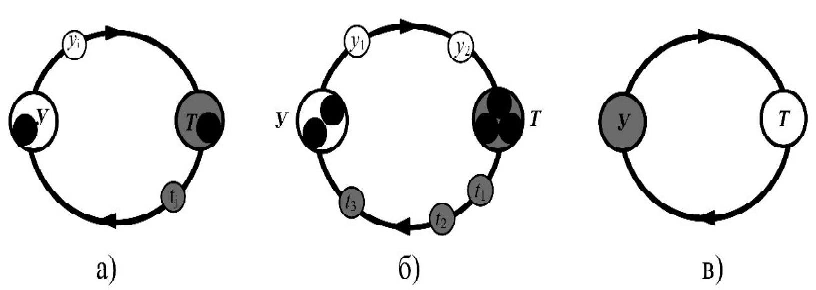

Рис. 1. Модельное представление процесса обращения задачи

[3] **Острогорский А.Н.** Материалы по методике геометрии. СПб., 1884.С. 44.

[4] **Градштейн И.С.** Прямая и обратная теоремы. Л., 1950. С 26.

[5] Хрестоматия по методике математики. Т. 1. Обучение через задачи: учеб. пособие для студентов вузов / Сост. М.И. Зайкин, С.В. Арюткина. Арзамас: АГПИ, 2005. 300 с.

[6] **Эрдниев П.М.** Методика упражнений по математике. М., 1970. С. 35.

схематично можно представить так, как показано на рис. 1а. Если же таковых элементов будет взято больше, к примеру, y_1, y_2, и t_1, t_2, t_3, то схематичное представление процесса обращения задачи будет несколько иным (рис. 1б). Действуя таким образом, можно перебрать все различные комбинации из элементов условия и требования прямой задачи, включая и тот самый случай, когда вся совокупность t_j перейдёт в условие (*У*), а вся совокупность y_i перейдёт в требование (*Т*) (рис. 1в).

Причём в первых двух случаях, если вновь полученные задачи будут иметь смысл, логично называть их обращёнными, и лишь в последнем — обратной исходной. Выходит, что обратная задача в значении, аналогичном обратной теореме, получается в предельном случае обращения исходной задачи.

Дидактическая и развивающая ценность обращения задачи

Приём обращения задачи содержит в себе значительный дидактический и развивающий потенциал. О том, что он далеко не полностью используется в школьной практике обучения математике, упоминали многие педагоги-математики: А.К. Артёмов, В.Г. Болтянский, Г.В. Дорофеев, В.А. Крутецкий, В.В. Репьёв, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман и др. Синтезируя различные мнения, выделим следующее:

• Во-первых, составление и решение обращённых задач способствуют лучшему пониманию структуры математической задачи, обеспечивают более глубокое осознание тех взаимосвязей и отношений, которые свойственны задачной ситуации, позволяют школьникам как бы заглянуть внутрь структуры задачи и увидеть взаимосвязи её данных, данных и искомых и тем самым понять её математическую сущность.

• Во-вторых, такая работа над уже решённой задачей приобщает учащихся к математическому творчеству, способствует развитию их креативности, поскольку процесс обращения адекватен процессу исследования определённой проблемы и обеспечивает формирование у школьников умений, необходимых для выполнения творческих исследовательских работ.

• В-третьих, что, на наш взгляд, является наиболее важным в условиях развивающей образовательной парадигмы современной школы, ценность приёма обращения заключается в превращении прямой связи мыслей в обратную, что способствует развитию такого фундаментального умственного качества, как гибкость мышления. При традиционной методике обучения математике, основанной на решение однотипных задач, какими бы сложными они ни были, мышление обогащается преимущественно цепью переходов между мыслями одного направления, что способствует формированию конвергентного мышления, но никак не дивергентного, так необходимого современному человеку. Заметим, что особую ценность для развития гибкости мышления школьников представляют не прямые и обращённые задачи, взятые как таковые сами по себе, в отдельности. Наиболее значимый развивающий эффект достигается здесь в процессе преобразования одной задачи в другую, в выполнении тех «невидимых» и трудноуловимых при логическом анализе элементов мысли, которые связывают процессы решения обеих задач.

• В-четвёртых, в процессе обращения задачи и последующего решения обращённых задач происходит формирование действий, необходимых для овладения общим умением решать задачи: извлекать информацию из условия и требования задачи, вычленять отдельные элементы и комбинировать их, переформулировать условие и требование, выводить следствия, работать с математическими моделями задачи, а также умения формулировать новую задачу.

• И наконец, в-пятых, подходы к поиску решения обращённых задач нередко отличаются от тех, что использовались при поиске решения исходной задачи, а знакомство с ними существенно обогащает математическую культуру и кругозор учащихся.

Технология составления обращённых задач

Пусть в качестве исходной задачи взята следующая.

Задача 1. *Найти первый и шестой члены геометрической прогрессии, если известно,*

что её знаменатель равен 2, а сумма семи первых членов равна 381.
(Ответ: $b_1 = 3$; $b_6 = 96$.)

Используя описанный приём, будем составлять новые задачи — обращённые. Для того чтобы упорядочить и облегчить процесс составления новых задач, полезно после решения исходной задачи записать поэлементный состав условия и требования этой задачи в виде числовой цепочки, присоединив к нему и найденное искомое (ответ) в следующем виде:

$$q = 2 \qquad S_7 = 381 \qquad \boxed{b_1 = 3} \qquad \boxed{b_6 = 96}$$

Следуя рекомендациям П.М. Эрдниева, будем заключать искомое в числовой цепочке в рамочку — это позволит школьникам более наглядно увидеть исходные и искомые элементы задачи, поскольку весь её поэлементный состав целостно предстаёт перед их глазами. А это, в свою очередь, увеличивает степень осознанности учащимися возможных вариантов образования новых обращённых задач на базе исходной. К тому же, по составленной числовой цепочке ученикам легче обнаружить и исправить допущенную ошибку, что будет способствовать развитию критичности их мышления, навыков самоконтроля.

Затем составляются всевозможные числовые цепочки обращённых задач, в которых искомым элементом последовательно выступает каждый элемент данной задачи или их комбинация.

В результате последовательной реализации обращения исходной задачи числовые цепочки структурных элементов всех обращённых задач будут следующими:

Схемы числовых цепочек структурных элементов

1.1.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
1.2.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
1.3.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
1.4.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
1.5.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$b_1=3$	$b_6=96$	;
1.6.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$b_6=96$	;
1.7.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
1.8.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
1.9.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$b_6=96$	.

Далее, по полученным числовым цепочкам структурных элементов задачи можно формулировать условия и требования обращённых задач. Число без рамочки включаем в условие задачи, а число в рамочке в её требование, поскольку оно должно быть скрыто, т.е. сделано неизвестным, и для него подбираем соответствующий вопрос. Таким образом, числа, заключённые в рамочку, становятся своеобразными опорными пунктами для составления формулировок обращённых задач.

Так, выбрав в качестве неизвестного, например, знаменатель прогрессии, и включив при этом найденное искомое — первый член геометрической прогрессии в условие конструируемой задачи (см. схемы числовых цепочек структурных элементов 1.1), можно сформулировать следующую обращённую задачу:

Задача 1.1. *Первый член геометрической прогрессии равен 3, а сумма первых семи её членов равна 381. Найти знаменатель прогрессии и шестой член.*

В случае, когда в качестве искомого выбрана сумма семи первых членов геометрической прогрессии, а найденный шестой её член введён в условие задачи (см. схемы числовых цепочек структурных элементов 1.3), можно получить уже такую обращённую задачу:

Задача 1.3. *Шестой член геометрической прогрессии равен 96, а её знаменатель равен 2. Найти первый член этой прогрессии и сумму семи первых членов.*

Аналогичным образом могут быть составлены и все остальные обращённые задачи по соответствующим числовым цепочкам.

Обратим внимание на то, что в результате обращения исходной задачи получаются не только обращённые задачи, представленные числовыми цепочками 1.1—1.8, отдельные из которых являются неразрешимыми, например 1.7, 1.8, но и разрешимая обратная задача (1.9), которая формулируется так:

Задача 1.9. *Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 3 и 96. Найти её знаменатель и сумму семи первых членов.*

Заметим, что конструировать обращённые задачи нетрудно, труднее найти хорошее решение или спрогнозировать, решается ли построенная задача.

Разумеется, не всегда необходимо составлять все обращённые задачи, поскольку, во-первых, они могут оказаться тривиальными, во-вторых, просто неразрешимыми или противоречивыми, и в-третьих, иногда не исключается возможность выхода за пределы математических знаний учащихся. Нет необходимости и решать все полученные обращённые задачи, важно, чтобы школьники осознавали технологию их конструирования.

Мера обращённости и мера обратимости задачи

Модельное представление процесса обращения исходной задачи, приведённое выше, наглядно показывает, что в одних случаях вновь получаемая задача претерпевает небольшие структурные изменения, а в других, напротив, — значительные. Для отражения этих изменений введём специальную характеристику — меру обращённости задачи. Для её выражения обозначим число элементов условия исходной задачи через $N_д$, а число искомых в её требовании через $N_и$, число данных, перешедших после процесса обращения задачи в её требование, примем за $N'_д$, а число искомых, включённых в её условие, — за $N'_и$, тогда меру обращённости задачи (обозначим её буквой m) можно выразить математически следующим образом:

$$m = \frac{N'_д + N'_и}{N_д + N_и}.$$

Как видно из этой зависимости, мера обращённости будет максимальна у обратной задачи и она равна 1.

Собственно говоря, мера обращённости, введённая таким образом, позволяет ранжировать вновь полученные задачи по степени их обращения. Так, если прямая задача обращена полностью, то мера обращённости полученной задачи будет, как уже отмечалось выше, равна 1, если же имело место частичное обращение исходной задачи, то мера обращённости будет меньше единицы. Диапазон варьирования меры обращённости определяется промежутком:

$$0 < m \leq 1.$$

Понятно, что введённая таким образом мера обращённости является внешней характеристикой, показывающей величину «оборота» структурных элементов исходной задачи, и мало что даёт в оценке тех перемен в задачной ситуации, которые связаны с внутренними процессами, происходящими при её решении. Для отражения развивающей ценности обращения задач нужна характеристика, показывающая изменения в мыслительных процессах. Так, для оценки обращения как средства, развивающего гибкость мышления, таким показателем может выступать число переходов мысли с прямого на обратный ход в решении исходной и обращённой задачи. Такие переходы могут быть связаны, например, с использованием в решениях взаимно обратных действий. Так, если при решении прямой задачи по значениям двух слагаемых определялось значение их суммы, а при решении обращённой задачи по значению суммы и одного из слагаемых находилось значение другого слагаемого, то можно констатировать переход мысли с прямого хода на обратный.

В школьном курсе математики изучается немало взаимно обратных действий арифметического, алгебраического, логического характера: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, логарифмирование и потенцирование, нахождение корней уравнения и составление уравнения по значениям его корней, раскрытие скобок и заключение в скобки, дифференцирование и интегрирование и т.д. Взаимосвязь обратных действий выражается в том, что они показывают две различные стороны одного и того же процесса. Они существуют в синтезе, взаимно дополняя друг в друга.

Такую характеристику обращения задачи логично назвать мерой обратимости. Для её численного выражения обозначим за $N'_{п/о}$ — реальное число переключений с прямого хода мысли на обратный в решениях исходной и обращённой задачи, а за $N_{п/о}$ — возможное число переключений хода мысли с прямого на обратный. Тогда математически меру обратимости задачи (обозначим её буквой *М*) можно записать так:

$$M = \frac{N'_{n/o}}{N_{n/o}}.$$

Диапазон варьирования меры обратимости определяется промежутком

$$0 < M \leq 1.$$

Ещё раз подчеркнём, что мера обращённости задачи — это количественная характеристика процесса обращения, связанная с изменениями внешней структуры исходной задачи, а мера обратимости — качественная характеристика, выявляемая посредством сопоставления внутренних структур прямой и обращённой задач. Мера обратимости характеризует возможности вновь полученной задачи в развитии гибкости мышления школьников, а мера обращённости имеет более широкое значение, отражает степень обращения задачи, что позволяет указывать, какая в итоге получилась задача — обращённая или обратная. Их числовые значения могут не соответствовать друг другу.

Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Задача 2. *Из двух городов, расстояние между которыми 1620 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного поезда равна 40 км/ч, а скорость второго поезда на 10 км/ч больше скорости первого. Найдите скорость второго поезда и их время встречи.*

Решение:
1) 40 + 10 = 50 (км/ч);
2) 50 + 40 = 90 (км/ч);
3) 1620 : 90 = 18 (ч).

Составим числовые цепочки структурных элементов решённой задачи и некоторых обращённых задач.

По этим числовым цепочкам структурных элементов обращённых задач определим меру обращения для каждого из 5 случаев. Получим:

$$m_{2.1} = m_{2.2} = m_{2.3} = m_{2.4} = m_{2.5} = \frac{2}{5}.$$

А теперь сформулируем условия обращённых задач по соответствующим числовым цепочкам.

Задача 2.1. *Из двух городов вышли одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 18 ч. Скорость одного из них 40 км/ч, а другого — на 10 км/ч больше скорости первого. Найдите скорость второго поезда и расстояние между городами.*

Решение:
1) 40 + 10 = 50 (км/ч);
2) 50 + 40 = 90 (км/ч);
3) 90 – 18 = 1620 (км).

Для того чтобы установить меру обратимости этой задачи, определим число переходов с прямого на обратное действие в решениях прямой и обращённой задач. Графы их решений представлены на рисунке 2 (а, б).

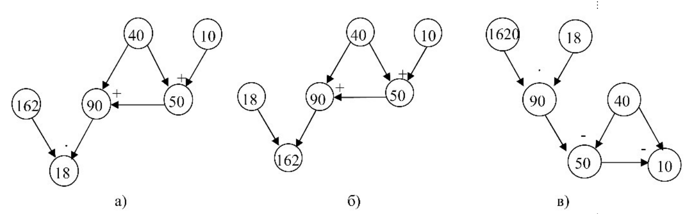

Рис. 2. Графы решений задач 2 , 2.1. и 2.3

Сопоставляя их, можно установить, что, поскольку в решении обращённой задачи лишь одно действие (деление) изменилось на обратное (умножение), значит число пе-

2.	1620 *км*	40 *км/ч*	10 *км/ч*	$\boxed{50\ км/ч}$	$\boxed{18\ ч}$;
2.1.	$\boxed{1620\ км}$	40 *км/ч*	10 *км/ч*	$\boxed{50\ км/ч}$	18 *ч* ;
2.2.	1620 *км*	$\boxed{40\ км/ч}$	10 *км/ч*	$\boxed{50\ км/ч}$	18 *ч* ;
2.3.	1620 *км*	40 *км/ч*	$\boxed{10\ км/ч}$	$\boxed{50\ км/ч}$	18 *ч* ;
2.4.	$\boxed{1620\ км}$	40 *км/ч*	10 *км/ч*	50 *км/ч*	$\boxed{18\ ч}$;
2.5.	1620 *км*	$\boxed{40\ км/ч}$	10 *км/ч*	50 *км/ч*	$\boxed{18\ ч}$;

реходов мысли с прямого хода на обратный $N'_{п/о} = 1$, а возможное количество переключений хода мысли с прямого на обратный $N_{п/о} = 3$. Следовательно мера обратимости задачи

$$(M_{2.1} = \frac{1}{3}).$$

Как видим, мера обращённости

$$(m_{2.1} = \frac{2}{5})$$

и мера обратимости

$$(M_{2.1} = \frac{1}{3})$$

имеют разные, хотя и близкие в данном случае, числовые значения.

Рассмотрим более выразительный пример. Обращённая задача по числовой цепочке 2.3 будет следующей.

Задача 2.3. *Из двух городов, расстояние между которыми 1620 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда, которые встретились через 18 ч. Скорость первого поезда 40 км/ч. Найдите скорость второго поезда и укажите, на сколько скорость одного поезда меньше скорости другого.*

Решение:
1) 1620 : 18 = 90 (км/ч);
2) 90 – 40 = 50 (км/ч);
3) 50 – 40 = 10 (км/ч).

Графы решений задач 2 и 2.3 (см. рис. 2 (а, в)).

Сопоставляя графы решения обращённой задачи 2.3. и исходной задачи 2, определяем меру обратимости этой задачи

$$M_{2.3} = \frac{2}{3}.$$

Как видим, обращённые задачи 2.1 и 2.3, имеют равные меры обращённости

$$m_{2.1} = m_{2.3} = \frac{2}{5},$$

а меры их обратимости различные, так

$$M_{2.1} = \frac{1}{3},$$

а $M_{2.3} = \frac{2}{3}$.

Нетрудно понять, что обращённая задача 2.3 имеет бóльшее значение в развитии гибкости мышления школьников, нежели обращённая задача 2.1.

1. Задачи для обращения

Арифметические

1. В первый день скосили 30 га посевов, во второй день — в 2 раза больше, чем в первый. В третий день скосили на 15 га меньше, чем во второй день. Сколько гектаров скосили в третий день?[7]

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

1.1.	$\boxed{\text{30 га}}$	в 2 раза	на 15 га	45 га
1.2.	30 га	$\boxed{\text{в 2 раза}}$	на 15 га	45 га
1.3.	30 га	в 2 раза	$\boxed{\text{на 15 га}}$	45 га
1.4.	$\boxed{\text{30 га}}$	$\boxed{\text{в 2 раза}}$	на 15 га	45 га
1.5.	30 га	$\boxed{\text{в 2 раза}}$	$\boxed{\text{на 15 га}}$	45 га
1.6.	$\boxed{\text{30 га}}$	в 2 раза	$\boxed{\text{на 15 га}}$	45 га
1.7.	$\boxed{\text{30 га}}$	$\boxed{\text{в 2 раза}}$	$\boxed{\text{на 15 га}}$	45 га

2. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов и встретились через 3 часа. Найдите расстояние между пунктами, если известно, что скорость первого туриста 5 км/ч, а второго — 6 км/ч.

3. Прогулочный катер «Ковчег» спустился по течению реки на 54 км, а обратно прошёл 48 км за то же время, за которое он мог бы в стоячей воде пройти 105 км. Какую скорость имеет катер в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч?

Алгебраические

1. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$.

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

[7] **Эрдниев П.М.** Методика упражнений по математике. М., 1970.

1.1.	$\boxed{a_5 = 27}$	$a_{27} = 60$	$\boxed{a_1 = 21}$	$d = 1{,}5$
1.2.	$\boxed{a_5 = 27}$	$a_{27} = 60$	$a_1 = 21$	$\boxed{d = 1{,}5}$
1.3.	$a_5 = 27$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$\boxed{a_1 = 21}$	$d = 1{,}5$
1.4.	$a_5 = 27$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$\boxed{d = 1{,}5}$
1.5.	$\boxed{a_5 = 27}$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$\boxed{a_1 - 21}$	$d = 1{,}5$
1.6.	$\boxed{a_5 = 27}$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$\boxed{d = 1{,}5}$
1.7.	$\boxed{a_5 = 27}$	$a_{27} = 60$	$a_1 = 21$	$d = 1{,}5$
1.8.	$a_5 = 27$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$d = 1{,}5$
1.9.	$\boxed{a_5 = 27}$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$d = 1{,}5$

2. Найти первый и пятый члены арифметической прогрессии, если известно, что её разность равна 3, а сумма шести первых членов — 285.

3. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель её равен 3, а сумма шести первых членов — 1820[8].

Геометрические

1. Периметр четырёхугольника *ABCD* равен 132. Одна из его диагоналей делит четырёхугольник на два треугольника *ABC* и *ACD* с периметрами 81 и 95. Чему равна диагональ *AC?*

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

1.1.	$\boxed{132}$	81	95	22 ;
1.2.	132	$\boxed{81}$	95	22 ;
1.3.	132	81	$\boxed{95}$	22 ;
1.4.	$\boxed{132}$	$\boxed{81}$	95	22 ;
1.5.	$\boxed{132}$	81	$\boxed{95}$	22 ;
1.6.	132	$\boxed{81}$	$\boxed{95}$	22 ;
1.7.	$\boxed{132}$	$\boxed{81}$	$\boxed{95}$	22 .

2. Периметр равнобедренной трапеции равен 28 см, большее основание — 10 см, диагональ делит острый угол трапеции пополам. Найдите длину меньшего основания.

3. В прямоугольном треугольнике *ABC* известны его катет a и гипотенуза c. Найдите его второй катет b и острые углы α и β.

Тригонометрические

1. Найдите, чему равна разность острых углов α и β, если

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}\ \mathrm{tg}\beta = \frac{1}{7}.$$

Числовые цепочки структурных элементов всех обращённых задач такие:

1.1.	$\boxed{tg\alpha = \frac{4}{3}}$	$tg\beta = \frac{1}{7}$	$\alpha - \beta = 45^0$;
1.2.	$tg\alpha = \frac{4}{3}$	$\boxed{tg\beta = \frac{1}{7}}$	$\alpha - \beta = 45^0$;
1.3.	$\boxed{tg\alpha = \frac{4}{3}}$	$\boxed{tg\beta = \frac{1}{7}}$	$\alpha - \beta = 45^0$.

2. Найти значение выражения: sinα,
если

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}},\ \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi. \qquad \sqrt{17}$$

3. Найти sinα, cosα, tgα, если tgα/2 = 7/8 и 0° ≤ α ≤90°.

Подводя итог изложенному выше, подчеркнём, что обращение задач является важным и перспективным направлением методической работы, позволяющим существенно усиливать развивающую значимость технологии обучения школьников математике. ❑

[8] **Фридман Л.М.** Теоретические основы методики обучения математике: учебно-методическая литература. Изд. 3-е. М.: URSS, 2009. 244 с.