

## «Вертикальная математика для всех»<sup>1</sup> как набросок продуктивного учебника

*Сергей Рувимович Коголовский,*

*профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук, askogal@yandex.ru*

• продуктивное обучение математике • метапредметная деятельность • теоретическое мышление • «высшие» и «низшие» формы мышления • необходимость «низших» форм мышления •

Не иссякает поток работ, в которых предлагаются разнообразные средства совершенствования обучения тем или иным разделам школьного курса математики. Одни из них направлены на успешное освоение способов исследования квадратичных функций, другие — на успешное освоение способов решения тригонометрических уравнений, и т. д. «Автономная» их направленность предопределяет их эмпирический характер. Многие из средств, предлагаемых в этих работах, испытаны основательной статистической проверкой. Но такая проверка, проводимая тоже «автономно», подтверждает эффективность предлагаемых средств только применительно к исследуемым ситуациям, рассматриваемым отдельно, вне целостного процесса обучения. И потому она не позволяет проверить, не достигается ли эффективность этих средств как направленных на «ближние» цели (на что направлено подавляющее большинство методических работ) ценою сужения возможностей движения к намного более значимым «дальним» целям. (К тому же статистические исследования едва ли могут помочь раскрыть природу трудностей, с которыми на протяжении длительного времени сталкиваются при обучении математике).

ностью методической отработки, доступностью, в том числе и для «слабых» школьников, но такое обучение направляет учащихся единственно на «ближние» цели, то есть на усвоение единственно предметного содержания. Оно не поднимает учащихся над этим содержанием, не превращает это содержание и сам процесс его освоения в средства восхождения на метапредметный уровень, не ведёт к превращению предметного содержания этих учебников в средства метапредметной деятельности. Оно уводит от восхождения на метапредметный уровень, а тем самым занижает и уровень освоения изучаемого предметного содержания, препятствует превращению его в живое знание. Такое обучение уводит учащихся от «дальних» целей: от развития их способностей к поисково-исследовательской деятельности, а тем самым от развития способностей к самообучению, к открытию новых знаний, от общего интеллектуального развития.

«Вертикальная математика», представляющая, на первый взгляд, как задачник по арифметике, снабжённый образцами решений задач и комментариями к ним, занимает достойное место среди сравнительно небольшого количества книг, направляющих школьников на «дальние» цели. Педагогический талант её авторов демонстрируют перечень предлагаемых ими задач, формы их постановок, характер обсуждения спосо-

Имеется немало учебников, привлекающих тщатель-

<sup>1</sup> Шаповалов А.В., Яценко И.В. Вертикальная математика для всех. Готовимся к сдаче С6 ЕГЭ с 6-го класса. — Изд-во МЦНМО, 2014.

бов их решения, блестяще воплощаемое эвристическое начало. Авторы предстают как достойные продолжатели творчества старых мастеров.

Но и в ряду таких книг «Вертикальная математика» выделяется комплексами задач как целостностями, в рамках которых и задачи, давно вошедшие в учебный обиход, обретают новое качество и эффективно служат освоению и развитию механизмов метапредметной деятельности. Это служит успешному освоению школьниками программного материала по математике, делает процесс его освоения процессом освоения стратегий поисково-исследовательской деятельности, а тем самым процессом их общего интеллектуального развития.

В аннотации к этой книге говорится, что она помогает *«научить школьников 6–8 классов и старше применять свои математические знания далеко за пределами обычной программы своих классов. Если традиционная «горизонтальная» математика пополняет знания вширь, то «вертикальная» ведёт ввысь и вглубь, прививая навыки анализа в нестандартных ситуациях. Собранные в книге задачи и приёмы позволяют <осуществлять> такое обучение ... на материале, близком к школьной программе и доступном широкому кругу учащихся»*. Так говорится в аннотации. Представленный в книге способ обучения направляет на достижение «далних» целей, прежде всего посредством освоения и развития механизмов метапредметной деятельности (включающей эвристику и праксиологические средства). Такое обучение осуществимо как процесс *сотворчества* учителя и учащегося, продуктом которого является обретение учащимся *способностей к творчеству*, не в последнюю очередь как способностей к эффективной поисково-исследовательской деятельности, как приобщённости к общим формам такой деятельности и её стратегиям.

«Вертикальная математика» и сама является творческим продуктом, а значит, *«самодовлеющей предметностью»*, *«нераздельной индивидуальностью»*<sup>2</sup>. И потому попытки зримо представить её демонстрацией каких-либо её фрагментов были бы обречены на неудачу. Конечно, те или иные особенности подхода к обучению, пред-

ставленные в книге, те или иные её фрагменты интересны и важны и сами по себе, и достойны отдельного, специального исследования. Но как истинный творческий продукт она полнокровно постижима только через постижение её как целого, не сводимого к свойствам и функциям его частей, и притом как развивающегося целого. Для её постижения необходимо погружение в её текст, в его внутреннюю логику.

В книге представлен широкий круг задач — от простых, подобных следующей:

На карточках были написаны числа 1, 2, 3, ..., 111. Ваня взял себе все карточки с чётными числами, а Таня — с нечётными. У кого из них сумма чисел на карточках больше и на сколько?

до задач такого уровня:

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. После этого каждая карточка складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Эта небольшая по объёму книга охватывает широкий круг предметов рассмотрения, от простейших арифметических задач до задач С6 ЕГЭ. Об этом говорят уже названия её разделов: «Простая арифметика», «Уравнения и неравенства», «Делимость и остатки», «Дроби, доли, средние», «Логика и перебор», «Задачи на максимум и минимум». Она завершается рекомендациями, относящимися к контролю и отладке решений сложных задач, и списком номеров тех из задач, успешно решаемых в процессе её изучения, которые, как оказывается, являются пугающими многих старшеклассников задачами С6 ЕГЭ.

Процесс освоения этой книги учащимися состоит из стадий, каждая из

<sup>2</sup> Лосев А.Ф. Диалектика творческого акта (краткий очерк) // Контекст 81. — М., 1982. С. 49–78.

которых есть стадия освоения материала соответствующего раздела, состоящая из следующих двух подстадий:

1. Изучение приводимых способов решения задач (материал которых близок к школьному) и освоение в процессах их изучения необходимых теоретических средств. В последних, предстающих вначале как средства, относящиеся к определённому предметному содержанию, раскрывается их метапредметное существо, и они осваиваются как широко используемые механизмы поисково-исследовательской деятельности.

2. Основной способ работы — самостоятельное решение учащимися предлагаемых задач, сравнение ими своих решений с приведёнными в книге, осмысление приведённых решений и комментариев к ним.

Итог каждой стадии — рождение соответствующего ей творческого продукта, которым является новый уровень освоения стратегических (и тактических) средств поисково-исследовательской деятельности.

Авторы не используют и не предполагают использование *повторения* изучаемого материала и каких-либо средств его *закрепления* в традиционном понимании. Необходимость таких средств снимается углублением и развитием материала посредством обращения к соответствующим комплексам задач.

По сути, авторы сообразуются с тем, что А.Ф. Лосев назвал агенетичностью творческого продукта. *«Генетическое объяснение вещи, удобное и нужное в одних отношениях, является неудобным и вредным в других, а именно в отношении цельной вещи, индивидуальной, нераздельной и неповторимой, которая только и способна объяснить сама себя»*<sup>3</sup>. Точно также с помощью последовательности заданий, подобных задачам, использованным в процессе обучения, невозможно проверить, сформирован ли творческий продукт. Успешное выполнение школьником таких заданий может быть результатом его выучки,

но не результатом сформированности способностей нового уровня к поиско-

во-исследовательской деятельности на базе освоения новых её стратегий и тактик, на базе освоения новых её уровней. Показателем их сформированности является предъявление школьником решений задач, демонстрирующих реализацию таких способностей в новых для него ситуациях. Обращение к таким задачам является и средством развития способностей к поисково-исследовательской деятельности.

Неуклонное, не замутняемое частностями, следование авторов книги задаче воплощения названной выше роли предлагаемых ими комплексов задач (прежде всего как направляющих на развитие первоначальных математической деятельности, в числе которых математическое моделирование, знаковое моделирование, комбинаторные механизмы), относящихся к «разноприродным» ситуациям, ведёт к освоению и развитию механизмов метапредметной деятельности.

Читатели книги подводятся к значимым обобщениям, но как бы уводятся от их понятийного выражения и работают с их «наивной» *деятельностной* формой и визуальными образами. Они как бы уводятся от теоретического плана, от приобщения к теоретическому уровню мышления. Но здесь более чем уместно заметить, что теоретическое мышление — это сложный, многомерный комплекс, включающий в качестве своих неотъемлемых компонентов разные формы мышления, как «высшие», так и «низшие», разные логики, разные формы рациональности. Оно начинается уже на уровне образного мышления, способного оказывать преобразующее влияние на взаимодействующие с ним формы мышления.

Сосредоточение на метапредметной стороне дела, рассматриваемой в «наивной» *деятельностной* форме, уход от поспешного приобщения учащихся к понятиям, даже таким, которые представляли бы и фиксировали напрашивающиеся продуктивные обобщения, позволяет уже на самой элементарной математической базе высвечивать продуктивные формы работы механизмов математической деятельности. И открывает возможность их более полного освоения и развития, более эффективного освоения метапредметной деятельности и тем самым восхождения

<sup>3</sup> Лосев А.Ф. Диалектика творческого акта (краткий очерк) // Контекст 81. — М., 1982. С. 49–78.

на теоретический уровень мышления и более полнокровного его освоения. Ведь на стадии рождения интуитивной идеи, явившейся истоком осваиваемого метода и представляющего его строгого математического понятия, и первичного использования этой идеи особенно зримо предстаёт её метапредметное существо.

Ещё более зримо это метапредметное существо представимо в самом процессе восхождения от интуитивной идеи к понятию. В сформированном понятии, в его превращённости в «обиходное» орудие поисково-исследовательской деятельности это существо «опредмечивается» и потому пребывает обычно в скрытой форме. Оно скрывается, «уходит в тень» вместе с процессом формирования понятия как идеальной формы идеи, как её продуктивной модели, обретающей онтологический статус и становящейся её внутренней формой, эйдосом в платонистском смысле.

Поспешность же в обращении к строгому понятию уводит от вопроса «как?», то есть от обращённости к формам представления и реализации этой идеи, к их развитию. В результате понятийная форма воплощения идеи становится «орецептуренной» формой и превращается в застывший стереотип<sup>4</sup>. Такая поспешность подавляет развитие метапредметного плана. Более того, она ведёт к его омертвлению.

Предлагаемый в книге подход отличается от бытующего, представленного в большинстве учебников перехода от житейского понятия к научному как такого *преодоления* натуральной формы мышления, которая представляет собой «не эволюционный процесс, а сдвиг и скачок, в котором натуральная и культурная (реальная и идеальная) формы вступают в конфликты и коллизии»<sup>5</sup>. В результате такого перехода научное понятие предстаёт как *противостоящее* житейскому, культурная (идеальная) форма — как *противостоящая* натуральной (реальной). Это переход, осуществляемый прямым *введением* научного понятия, его *привнесением*. Краткие предварительные пояснения, помогающие первичному пониманию вводимого понятия вне связи с его истоками, не меняют дела и не способствуют освоению «*нового и высшего плана мысли*» как нового и высшего.

Процессы приобщения к строгим понятиям, снимающие конфликты между научным понятием и представлениями, протопонятиями, являющимися его истоком, между натуральной и культурной формами, должны быть процессами развития наличествующих форм мышления учащихся, ведущего к рождению культурных форм, представляемых формируемыми (строгими) понятиями, носителями идеального. «*Тогда будут становиться существенно иными отношения между реальной и идеальной формами и сам характер идеального, поскольку сформированное понятие не будет представлять как противостоящее протопонятию, послужившему его истоком, а будет формироваться и работать как его идеальная форма. Идеальное в таких процессах будет представлять не как предсуществующее, а как формируемый процессом развития реального один из вариантов идеального. Процессы освоения строгих общих понятий становятся при этом процессами движения от неразвитого идеального к развиваемому и преобразуемому идеальному*»<sup>6</sup>. Важно и то, что такие процессы будут служить образцами построения продуктивных моделей исходных представлений. Подход авторов книги, как представляется, согласуется с этим.

«Наивные» формы мышления необходимы на всех уровнях обучения математике. Они являются важным компонентом теоретического мышления. К тому же, согласно Х. Вернеру, «*возврат (регрессия) к примитивным формам познания в определённых условиях является необходимым механизмом дальнейшего развития*»<sup>7</sup>. Всей своей

<sup>4</sup> Здесь уместно заметить также, что знаковое моделирование, являющееся существенным компонентом математической деятельности на всех ее уровнях, несет в себе метапредметное начало и нередко открывает возможность усмотрения глубинных свойств исследуемого объекта посредством усмотрения и использования «визуально» проявленных структурных особенностей его знаковой модели, а тем самым возможность сведения «высших» форм математической деятельности к «низшим».

<sup>5</sup> Эльконин Б.Д. Введение в психологию развития. — М., 1994. — С. 11. Такое понимание совпадает с пониманием таких процессов Л.С. Выготским.

<sup>6</sup> Коголовский С. Р. К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. 2011. № 6. — С. 93–99.

<sup>7</sup> Цит. по книге Н.И. Чуприковой «Психология умственного развития: Принцип дифференциации». — М.: Столетие, 1997. — С. 86.

данностью «Вертикальная математика», использующая только язык школьной арифметики, манифестирует продуктивность сосредоточения на «низших» формах математической деятельности и их развития, его необходимость для полноценного освоения её «высших» форм, тот дух и ту форму, в каких такое сосредоточение должно осуществляться.

Авторы не провозглашают громких деклараций. Они не противопоставляют предлагаемый ими подход к обучению математике бытующим подходам, но он предстаёт как существенно отличающийся от них и даже как противостоящий им. Существо его отличия состоит в пронизывании обучения метапредметной деятельностью, в освоении математических знаний как метапредметных средств поисково-исследовательской деятельности. Пронизывание обучения метапредметной деятельностью ведёт к развитию механизмов понимания, необходимому для снятия трудностей, с которыми сталкивается обучение математике. Осваиваемые метапредметные знания и умения становятся праксиологическими знаниями. Важно и то, что они превращаются в *метакогнитивные* механизмы, то есть в механизмы управления ходом текущей интеллектуальной деятельности<sup>8</sup>. Это ведёт к далеко идущему её развитию.

*«Книга предназначена для самостоятельной работы школьников... Учителя могут на её основе вести кружки в 6–9 классах и готовить к ЕГЭ учеников 10–11 классов. Задачи из книги могут быть использованы как дополнительные (а иногда и подготовительные) при изучении соответствующих тем школьной программы»* — говорится в аннотации. В действительности эта книга несёт в себе большее: она может служить эффективным средством коррекционно-развивающего обучения.

А главное — в ней видится набросок продуктивного учебника по математике, способствующего развивающему самообучению школьников и направляющего на восхождение к теоретическим знаниям и их

освоение посредством обучения через задачи, через обращения к развивающимся системам задач и анализ подходов к их решениям и самих решений. Одновременно в ней видится талантливое пособие по педагогике математики. И потому она будет весьма полезна не только школьникам и слабо успевающим и продвинутым, но и учителям математики, и учителям начальной школы. □

<sup>8</sup> Коголовский С.Р. Место и роль метапредметной деятельности в обучении математике // Школьные технологии. 2014. № 3. С. 93–99.

освоение посредством обучения через задачи, через обращения к развивающимся систе-