Основы решения геометрических задач на построение

Александр Давидович Блинков,
учитель математики, старший методист средней школы № 218 г. Москвы, сотрудник Московского центра непрерывного математического образования, Заслуженный учитель России, лауреат премии Правительства России в области образования, лауреат премии фонда «Династия» Дмитрия Зимина «За выдающиеся заслуги в образовании», adblinkov@yandex.

• школьный курс геометрии • логическое строение геометрии • геометрическая задача на построение • метод геометрических мест • возможные и невозможные построения •

Основная проблема этой статьи непосредственно связана с вопросом построения школьного курса геометрии, поэтому для начала уместно сказать несколько слов об отличии изучения геометрии от изучения многих других школьных наук.

О логическом строении геометрии

Представьте себе, что вы учите дикаря играть в шахматы, о которых он не имеет ни малейшего представления. Как вы сможете это сделать?

Возможно, имеет смысл сделать так:

1. Показать ему шахматную доску и шахматные фигуры и выучить с ним названия фигур.
2. Научить его правилам, по которым ходит каждая фигура.
3. Научить его шахматной нотации и показать запись ходов.
4. Показать некоторые стандартные ситуации, возникающие на доске в ходе игры, прежде всего простейшие: шах и мат, а потом всё более сложные (двух- и трёх-ходовки и пр.).
5. Начать с ним играть, опираясь на стандартные ситуации, объясняя попутно более сложные правила: пат, взятие на проходе и прочее, постепенно разбирая возникающие сложные ситуации на доске, то есть, сводя их к более простым.

Аналогично, как бы «с нуля», как правило, изучается геометрия. Сначала вводятся ***основные объекты*** изучения (точка, прямая, плоскость, расстояние). Их отличие от всех других объектов геометрии состоит в том, что мы их принимаем на уровне наглядного представления и не даём им определения. Затем формулируются основные свойства этих объектов (правила «игры»), которые называются ***аксиомами***, после чего изучающие предмет учатся записывать эти свойства в краткой форме («нотация»), что позволяет в дальнейшем вести свои записи и понимать записи других. Затем начинают рассматриваться стандартные ситуации с помощью формулирования и доказывания новых утверждений (***теорем***), попутно вводятся новые объекты через уже известные, то есть даются ***определения***. И, наконец, начинают рассматриваться незнакомые ситуации, сводящиеся к аксиомам или к уже доказанным теоремам, то есть решаются геометрические задачи.

Для облегчения работы все рассматриваемые объекты (***геометрические фигуры***) изображаются на чертеже, но само изображение не служит основанием для каких-то окончательных выводов, оно только помогает нам. Аналогично: сильные шахматисты могут играть, не глядя на доску («вслепую»), и от этого структура самой шахматной игры не изменяется.

Что такое геометрическая задача на построение и что значит её решить?

Задача на построение — это задача, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь только двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений).

Решение таких задач состоит не в том, чтобы проделать «руками» соответствующие построения, а в том, чтобы найти ***алгоритм решения***, то есть описать решение задачи в виде последовательности уже известных стандартных построений.

Если опять провести аналогию с шахматами, то решение задач на построение напоминает сведение партии к описанному в теории эндшпилю, про который уже известно, выигранный он или ничейный или же применение стандартных комбинаций («вилка», «вскрытый шах», «спёртый мат», «мельница» и т. д.).

Какие построения циркулем и линейкой считаются стандартными?

Это вопрос предварительной договорённости. На мой взгляд, к стандартным построениям можно отнести следующие:

1) построение прямой, проходящей через две данные точки;
2) построение окружности с данным центром и данным радиусом;
3) построение отрезка, равного данному;
4) построение угла, равного данному;
5) построение середины отрезка (серединного перпендикуляра к отрезку);
6) построение биссектрисы угла;
7) построение перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку.

На основе стандартных построений легко осуществляется ***построение треугольников по трём основным элементам***: 1) двум сторонам и углу; 2) стороне и двум углам; 3) трём сторонам. К этим построениям сводятся и построения равнобедренных и прямоугольных треугольников по их основным элементам. Так как эти задачи (наряду со стандартными построениями) рассматриваются во всех основных школьных учебниках[1], то их решения мы разбирать не будем.

Позволю себе ещё одну аналогию: мы как бы приступили к «строительству дома», заготовив не только «кирпичи» — стандартные построения, но и создав из них «блоки» — задачи на построения треугольников по основным элементам.

Теперь, пользуясь этими «блоками», мы сможем решить большинство задач на построение треугольников, в которых могут быть заданы не только основные, но и ***вспомогательные элементы***. Отметим, что в любом случае для построения треугольника достаточно задать ***три*** его элемента, среди которых хотя бы один — ***линейный***.

Вопросы для читателя. 1) Почему именно ***три*** элемента? 2) ***Любые ли*** три заданных элемента позволяют осуществить построение треугольника?

На первый из этих вопросов читатель легко ответит сам, а второго вопроса коснусь в третьей части этой статьи.

Для того, чтобы научиться решать задачи на построение (впрочем, как и другие геометрические задачи), очень важно осознать, что решать их надо ***с конца***, то есть не пытаться наугад строить всё, что умеешь, а представить себе, что искомый объект уже построен, и, исходя из этого, восстановить цепочку возможных построений.

Пример 1. ***Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведённой к ней высоте***.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC по заданным стороне b и высоте h уже построен (см. рис. 1).

Тогда на нашем чертеже образовался прямоугольный треугольник ABD, у которого заданы катет и гипотенуза. Поэтому задача сводится к построению ***вспомогательного***

[1] **Атанасян Л.С. и др.** Геометрия: Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1995; Погорелов А.В. Геометрия 7–11: Учебник для 7–11 классов. М.: Просвещение, 1995.

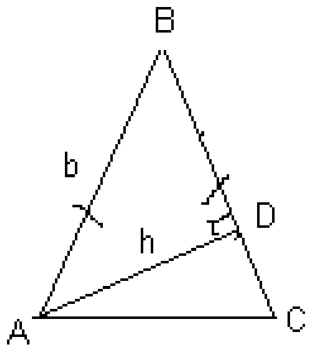

Рис. 1

прямоугольного треугольника *ABD* по катету и гипотенузе и к построению на его основе искомого треугольника (продолжим катет *BD* так, чтобы длина отрезка *BC* была равна *b* ...).

Обратите внимание, что при изложении решения мы говорим только ***об алгоритме построения***, складывая его из основного «блока» и дополнительных «кирпичей»!

Рассмотрим более сложную задачу из этой же серии.

<u>Пример 2</u>. ***Постройте треугольник по двум его углам и периметру***.

<u>Решение</u>. Пусть искомый треугольник *ABC* с данным периметром *P* и углами α и β при вершинах *A* и *B* соответственно — построен. «Развернём» его, то есть на прямой *AB* отложим отрезок *AD*, равный *AC*, и отрезок *BE*, равный *BC*. Полученные точки *D* и *E* соединим с точкой *C* (см. рис. 2).

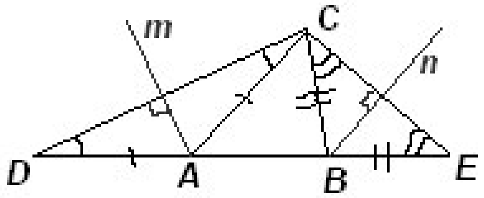

Рис. 2

Заметим, что треугольник *ACD* — равнобедренный, угол *CAB* — внешний для этого треугольника, поэтому $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично, $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

Таким образом, задача сводится к построению ***вспомогательного треугольника*** *CDE* по стороне и двум прилежащим к ней углам ($DE = P$, $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CED = \frac{\beta}{2}$). Для того, чтобы теперь получить вершины *A* и *B* искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры *m* и *n* к отрезкам *CD* и *CE* соответственно.

Отличие этой задачи от предыдущей — ***вспомогательного треугольника*** не было, но мы его создали дополнительным построением.

Подчеркну ещё раз, что решение задач на построение напоминает строительство домов или игру с детским конструктором: начав с «кирпичиков» (деталей), мы собираем из них «блоки» и уже можем пользоваться ими, не обращая внимания на кирпичи, из которых эти блоки составлены; затем из «блоков» можно собирать более крупные «блоки», и ими мы также сможем пользоваться и т. д.

Крупным «блоком», используемым наиболее часто, является ***построение вспомогательного треугольника***, когда решение задачи сводится к уже известному построению какого-либо треугольника.

Обе рассмотренные нами задачи были решены этим методом. Ещё одним часто используемым крупным «блоком» является построение известных геометрических мест точек (сокращённо — ГМТ). ***Метод геометрических мест*** основан на том, что часть объектов, получаемых при стандартных построениях, являются одновременно ГМТ, обладающих определёнными свойствами. Например, окружность является геометрическим местом точек, удалённых от заданной точки на фиксированное расстояние; серединный перпендикуляр к отрезку — ГМТ, равноудалённых от концов отрезка; биссектриса угла — ГМТ, лежащих внутри угла и равноудалённых от его сторон.

Суть метода ГМТ состоит в следующем: ***если некоторая точка X удовлетворяет двум условиям, то строятся ГМТ, удовлетворяющие каждому из этих условий, тогда точка X является их пересечением***.

Этот метод используется как при решении простых задач, например, при построении треугольника по трём сторонам, так и при решении более сложных.

Пример 3. ***Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проведённой к ней высоте***.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC с гипотенузой AB, равной c, и высотой CD, равной h, построен (см. рис. 3).

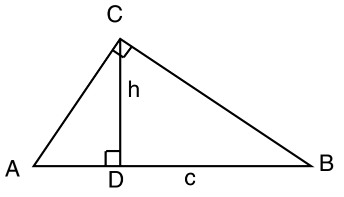

Рис. 3

Вспомогательного треугольника нет, так как ни один из полученных на чертеже треугольников построить по имеющимся данным нельзя. Создать его путём дополнительных построений также непросто. Но про вершину C известно, что: 1) $\angle ACB = 90°$; 2) расстояние от C до прямой AB равно h.

Поэтому решение задачи сводится к построению отрезка AB, имеющего заданную длину c, затем к построению ГМТ, из которых этот отрезок «виден» под прямым углом и ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной прямой AB. Вершина C является пересечением построенных ГМТ.

В приведённых выше примерах намеренно обсуждался только вопрос о том, к каким уже известным построениям сводится решение задачи. Если подходить формально, то в условиях всех предложенных задач слово «Постройте ... » надо было заменить на словосочетание «Объясните, как построить ... ». Я считаю, что на первых порах изучения задач на построение именно так и стоит делать. Когда такой подход будет освоен, можно постепенно переходить к более полному изложению решения таких задач.

Напомню, что полное изложение решения любой задачи на построение включает в себя следующие ***этапы***:

1) ***Анализ*** (то есть решение задачи «с конца» путём построения некоего алгоритма).

2) Осуществление самого ***построения*** и ***его описание***.

3) ***Доказательство*** того, что построенная фигура удовлетворяет условию.

4) ***Исследование***, то есть выяснение количества решений задачи и того, от чего оно зависит.

Отмечу, что если ***анализ*** проведён грамотно, то второй и третий этапы являются в значительной степени формальными, поскольку ***описание построения*** осуществляется теми же «блоками», но в обратном порядке, а ***доказательство***, как правило, непосредственно следует из первых двух пунктов. ***Исследование*** стоит особняком, но на начальных этапах изучения геометрии его проведение во многих случаях затруднено, так как требует знания ряда метрических соотношений.

Подробное обсуждение проблем полного изложения решений задач на построение выходит за рамки этой статьи, поэтому в заключение этого раздела я проиллюстрирую оба рассмотренных метода («вспомогательного треугольника» и ГМТ) на примере более сложных задач, ограничиваясь только ***анализом***.

Пример 4. ***Через данную точку M, лежащую внутри данного угла O, проведите прямую так, чтобы она отсекала от этого угла треугольник с заданным периметром.***

Решение. Пусть AB — искомая прямая, то есть треугольник AOB имеет заданный периметр P. Проведём окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка AB (см. рис. 4).

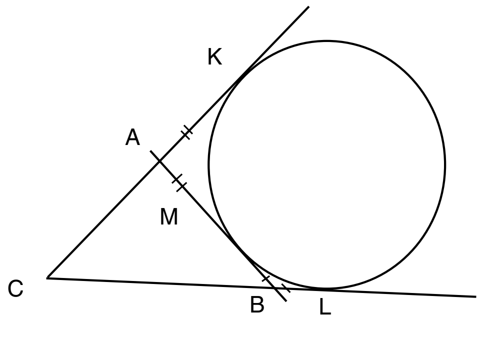

Рис. 4

Пусть K и L — точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следует, что $OK = OL = 0{,}5P$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению ***вспомогательного равнобедренного треугольника*** *KOL* (сторону *KL* которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках *K* и *L*. После этого используется ещё один «блок»: через точку *M* проводится касательная *AB* к этой окружности.

Отметим, что при решении этой задачи было использовано два крупных «блока» — две задачи на построение, которые рекомендуется решить самостоятельно (см. задачи 4б и 5а в конце статьи).

Пример 5. ***Постройте окружность, касающуюся данной прямой m и касающуюся данной окружности в данной точке A, внешним образом***.

Решение. Пусть даны прямая *m* и окружность с центром *O*, на которой отмечена точка *A*. Пусть искомая окружность построена, *P* — её центр (см. рис. 5).

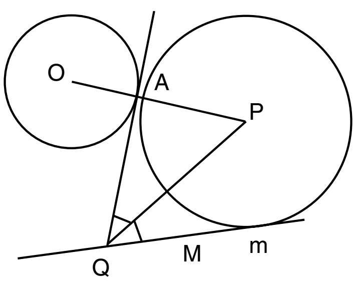

Рис. 5

Так как искомая окружность проходит через фиксированную точку *A*, то её построение сводится к построению её центра *P*.

Так как окружности касаются в точке *A* внешним образом, то эта точка лежит на отрезке *OP*, соединяющем их центры. Если через точку *A* провести также общую касательную *AQ* к этим окружностям (*Q* — точка её пересечения с данной прямой *m*), то луч *QP* будет являться биссектрисой угла *AQM*.

Таким образом, решение задачи сводится к построению луча *OA*, касательной *QA* к данной окружности и биссектрисы *QP* угла *AQM*. *P* — точка пересечения лучей *OA* и *QP*.

Фактически, эта задача решена ***методом ГМТ***.

В этой статье я намеренно не касаюсь задач, связанных с построением четырёхугольников, дабы не создавать лишних трудностей читателям. Отмечу только, что большинство из этих задач решаются аналогичными методами. По схожей причине за рамками этой статьи остаётся ещё один (и очень мощный) метод решения задач на построение — ***метод геометрических преобразований***.

О возможных и невозможных построениях

Из того, что мы уже обсуждали, следует, на первый взгляд, что всегда можно осуществить построение треугольника по трём элементам, хотя бы один из которых — линейный. Но это не так, и надо быть очень аккуратным, если сам формулируешь подобную задачу.

Например, в учебном пособии[2] для самостоятельного решения дана такая задача: ***постройте равнобедренный треугольник по биссектрисе угла при основании и высоте, проведённой из той же вершины***.

На первый взгляд, кажется, что никаких проблем нет, так как на чертеже (см. рис. 6) сразу вычленяется ***вспомогательный прямоугольный треугольник*** *AHL*, который можно построить по катету и гипотенузе. Проблема здесь в другом: для того, чтобы получить из него искомый треугольник *ABC*, потребуется построить угол *LAC*, равный $\frac{180^\circ - \alpha}{3}$, где $\angle ALH = \alpha$, а это в общем случае сделать невозможно.

Это связано с одной из знаменитых задач древности — ***задачей о трисекции угла***. Оказывается, что произ-

[2] **Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.** Геометрия для 8–9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1991. С. 12.

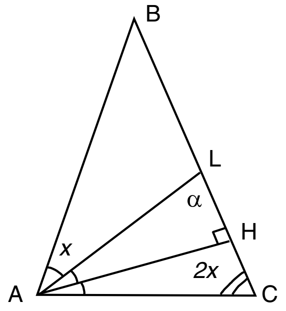

Рис. 6

вольный угол с помощью циркуля и линейки разделить на три равные части невозможно. Некоторые углы, например, прямой угол можно разделить на три равные части (действительно, построить угол, равный 30°, совсем несложно). Однако в общем случае решить эту задачу, которая возникла ещё в Древней Греции, не удавалось. Доказать невозможность трисекции угла удалось много позже, после того как была построена общая теория алгебраических уравнений. Оказывается, что при наличии единичного отрезка можно построить действительные корни любого квадратного уравнения с целыми коэффициентами (даже иррациональные), а вот корни аналогичного кубического уравнения, не имеющего рациональных корней, построить с помощью циркуля и линейки невозможно.

Кубическое уравнение с целыми коэффициентами возникает в этом случае из тригонометрической формулы тройного аргумента $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

По аналогичным причинам невозможно с помощью циркуля и линейки построить ребро куба, имеющего объём в два раза больше, чем объём данного (***задача об «удвоении» куба***). Действительно, если ребро данного куба взять равным 1, то ребро искомого куба является корнем уравнения $x^3 = 2$, не имеющего рациональных корней. Заметим при этом, что задача об «удвоении» квадрата решается очень легко.

Невозможность решения третьей древнейшей задачи — ***задаче о «квадратуре круга»***, то есть о построении квадрата, равновеликого данному кругу, была доказана ещё позже, когда появилась теория алгебраических чисел. Невозможность такого построения связана с тем, что сторона a такого квадрата является корнем уравнения $a^2 = \varpi$ (если круг имеет радиус 1), а ϖ — число ***трансцендентное***, то есть не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Попытки решить три знаменитые задачи древности оказали большое влияние на развитие математики. Например, было найдено множество способов деления произвольного угла на три равные части при условии расширения возможностей использования инструментов. Остановимся на способе, предложенном Архимедом. Он использовал циркуль и специальную линейку, на которой были отмечены две точки на некотором расстоянии r.

Поместим вершину угла AOB, который мы хотим разделить на три равные части, в центр окружности радиуса r (см. рис. 7).

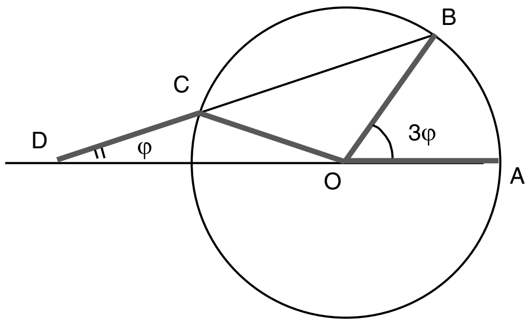

Рис. 7

Продолжим диаметр за точку O и, пользуясь нашей «специальной» линейкой, построим секущую BD так, чтобы внешняя часть CD этой секущей равнялась бы радиусу. Угол BOA — внешний для треугольника BDO, а треугольник BOC — равнобедренный. Следовательно, $\angle BOA = \angle BDO + \angle DBO = \angle BDO + \angle BCO = \varphi + 2\varphi = 3\varphi$, то есть угол CDO — искомый. Этот метод Архимеда получил название ***метода «вставки»***.

Рассмотрение конструкции, связанной с трисекцией угла, привело к открытию удивительной и очень красивой теоремы, которая носит название теоремы Морлея (Великобритания, 1904 г.). ***Точки попарного пересечения смежных триссектрис углов треугольника являются вершинами равностороннего треугольника*** (см. рис. 8).

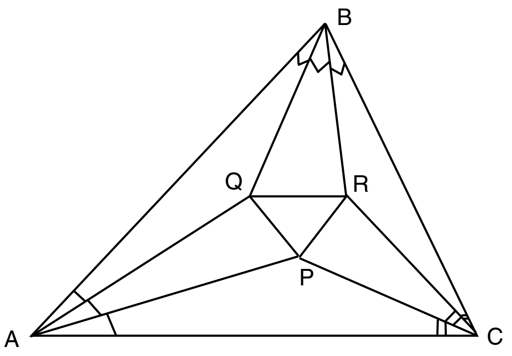

Рис. 8

Возвращаясь к возможностям построений циркулем и линейкой, отмечу удивительное открытие, сделанное в конце XVIII века итальянцем Маскерони: ***все построения, которые можно сделать с помощью циркуля и линейки, можно сделать с помощью только одного циркуля!***

Естественно, приходится сделать одно допущение, а именно: если построены две точки, то считается построенной и прямая, их содержащая, так как саму прямую провести циркулем невозможно.

Интересно, что с помощью одной линейки заменить все построения, выполняемые циркулем и линейкой, невозможно, но если дополнительно задать круг с отмеченным центром, то этого хватает. Доказательство этих фактов выходит далеко за пределы школьной программы, в частности связано с таким преобразованием плоскости, как ***инверсия***, и разделом высшей геометрии, называемом ***проективной геометрией***.

В заключение этого раздела — одна красивая и несложная задача на построение одной линейкой, которую предлагаю решить самостоятельно.

Дана полуокружность и стягивающий её диаметр AB (см. рис. 9).

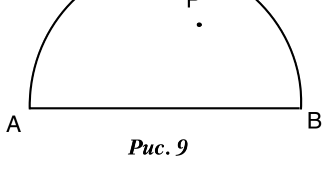

Рис. 9

А) С помощью одной линейки постройте перпендикуляр к прямой AB из точки P, лежащей внутри полукруга.

Б) Исследуйте возможность аналогичного построения при других случаях расположения точки P.

Другие задачи для самостоятельного решения

1. Постройте треугольник:
а) по стороне и высотам, проведённым к двум другим сторонам;
б) по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла;
в) по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон;
г) по двум сторонам и разности прилежащих к ним углов;
д) по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне;
е) по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

3. Постройте прямоугольный треугольник по острому и углу и разности гипотенузы и катета, противолежащего этому углу.

4. Постройте окружность:
а) проходящую через данную точку *A* и касающуюся данной прямой в заданной точке *B*;
б) вписанную в данный угол и касающуюся одной из его сторон в заданной точке;
в) на которой стороны данного треугольника высекают три хорды, равные заданному отрезку.

5. Постройте касательную к данной окружности:
а) проходящую через заданную точку (*рассмотрите все возможные случаи*);
б) параллельную заданной прямой.

6*. Постройте окружности с центрами в трёх данных точках, попарно касающиеся внешним образом.

7*. Даны точки *A*, *B* и *C*. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках. ❑