О средствах обучения младших школьников решению текстовых задач

Сергей Рувимович Когаловский,
профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук, askogal@yandex.ru

• поисково-исследовательская деятельность • учебные ситуации • использование уравнений • решение по действиям • текстовые задачи •

Приобщение школьников, в том числе и младших, к поисково-исследовательской деятельности, к её методам является ведущим планом их обучения математике. Для приобщения к новому методу недостаточно лишь упражнений в прямом его применении, необходима и поисковая деятельность, направленная на открытие возможностей его применения в тех или иных ситуациях, на открытие возможностей его применения к единичному и особенному и сопровождающаяся «открытиями» ситуативного характера.

В учебной деятельности взаимодействуют диады взаимно дополнительных начал. *Поисковая деятельность — следование методу* является одной из тех диад, которые играют в этой деятельности системообразующую роль. Если в обучении доминирует второй компонент этой диады, то не получает развитие поисковая деятельность, и в результате обучение утрачивает развивающий характер и вырождается в догматическое, лишённое внутренней полилогичности. Если доминирует первый, то это приводит преимущественно к развитию «по горизонтали». Только органичное взаимодействие компонентов этой диады способствует рождению новообразований в формах и способах мышления учащихся, в их поисково-исследовательской деятельности, формированию и развитию её стратегий.

В ряде учебных ситуаций наилучший в собственно математическом смысле способ решения задачи является наихудшим способом следования целям учебной деятельности или даже уходом от них. Ведь задачу лишь в последнюю очередь следует рассматривать как её буквально понимаемую постановку, то есть учитывая лишь то, что дано и что требуется найти. Её следует рассматривать с точки зрения преследуемых учебных целей. А значит — иметь в виду и тот контекст, в котором предполагается её обсуждение, и характер её обсуждения, и те связи предметного и деятельностного характера, и те «мета»-связи, которые предполагается формировать посредством обсуждения этой задачи.

Попытаемся с этих позиций подойти к рассмотрению вопроса об эффективности бытующего способа обучения младших школьников решению текстовых задач «по действиям», занимающему ведущее место в их обучении математике.

Обучение ребёнка выполнению арифметических действий и записи их результатов[1] требует специальных учебных средств. Намного более трудным является обучение решению текстовых задач «по действиям», предполагающему *проектирование* и выполнение определённой *последовательности действий*. Оно требует развития целого ряда интеллектуальных способностей, и не в последнюю очередь способностей к анализу и синтезу и их продуктивным взаимодействиям. Естественное и необходимое средство для этого (и одновременно средство диагностирова-

[1] …в виде арифметических формул, которые являются примерами «специфического знакового замещения, которое … фиксирует синтез разного типа содержаний» (**Непомнящая Н.И.** Педагогический анализ и конструирование способов решения учебных задач // Георгий Щедровицкий, Вадим Розин, Никита Алексеев, Нелли Непомнящая. Педагогика и логика. М.: Касталь, 1993).

ния степени развитости таких способностей) видят в прямом обращении к самим текстовым задачам, в обучении детей решать их «по действиям».

На путях формирования таких способностей нередко (и даже как правило) возникают препятствия, проистекающие из недостаточной развитости памяти и внимания ребёнка и делающие затруднительным охват *всех* условий задачи, без которого невозможно проектирование последовательности действий, ведущей к её решению. В качестве средства преодоления этих препятствий видят использование схематического представления условий. Но попытки построения учащимися такой схемы, схемы продуктивной, то есть такой модели условий задачи, которая высвечивала бы пути её решения, то есть была бы и моделью способа её решения, нередко сталкиваются с препятствиями, проистекающими также из слабой развитости взаимодействий механизмов анализа и синтеза. Не меньшие трудности вызывает и то, что *логика решения «по действиям», как правило, существенно расходится с внутренней логикой поиска решения*.

Способ решения задачи «по действиям», как правило, использует её условия лишь *в их непосредственной данности* и потому слабо развивает механизмы анализа.

Преимущественная направленность обучения решению текстовых задач на решение «по действиям» (а ещё чаще — единственно такая направленность) сужает веер направлений, способов и форм поисковой деятельности. Ещё более их сужает бытующее в практике обучения жёсткое подстраивание формы поиска решения под форму решения «по действиям». Тем самым устраняется такое средство логико-алгоритмического развития ребёнка, как поиск представления найденного им (каким-либо способом) пути решения задачи в виде последовательности действий, а вместе с ним устраняется сама постановка вопроса о поиске способов преодоления трудностей на пути реализации этого средства. Придание этой форме самодовлеющего характера превращает её в мертвую форму, более того, — в мертвящую форму, в жертву которой приносится развитие поисковой деятельности, развитие интуиции школьника.

В «Арифметике» Л.Ф. Магницкого и других старинных российских учебниках арифметики содержится немало прекрасных задач, обращение к которым является эффективным средством развития поисково-исследовательской деятельности детей. Вот одна из таких задач[2]:

Летели скворцы, и встретились им деревья. Когда сели они по одному на дерево, то одному скворцу не хватило дерева, а когда на каждое дерево сели по два скворца, то одно дерево осталось не занятым. Сколько было скворцов и сколько деревьев?

Но легко ли ребёнку решить эту, казалось бы, весьма простую задачу «по действиям»? Легко ли ему (самому) создать эффективное схематическое представление её условий?

А вот ещё одна из таких задач:

Хозяин нанял работника с таким условием: за каждый рабочий день он будет платить ему по 20 копеек, а за каждый нерабочий день вычитать 30 копеек. По прошествии 60 дней работник ничего не заработал. Сколько было рабочих дней?

Обе задачи, как и почти все текстовые задачи, содержащиеся в учебниках для начальной школы, легко решаются использованием уравнений. Так не стоит ли в обучении младших школьников математике сделать упор на этот метод, а не на решение «по действиям»? При всей целесообразности приобщения младших школьников к алгебраическим средствам, к использованию уравнений последовать этому было бы настолько же неразумно, насколько неразумно считать, что доступность карманных калькуляторов делает ненужным использовать в обучении детей устный счёт (ведущий к развитию широкого комплекса психологических и собственно интеллектуальных механизмов).

О развивающем потенциале, заложенном в обучении детей решению текстовых задач «по действиям», сказано много. А из ска-

[2] **Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.** Старинные занимательные задачи. М.: Дрофа, 2006.

занного выше следует, что оно должно нести и развитие способности к отысканию представления найденного (каким-либо способом) пути решения задачи в виде последовательности действий, а значит, логико-»алгоритмическое» развитие, развитие способности к взаимным превращениям анализа и синтеза, являющейся одним из наиболее ценных продуктов такого обучения.

Но отсюда следует и то, что для обучения детей решению «по действиям» текстовых задач, и не вообще текстовых задач, а таких, обращение к которым несло бы развитие их поисково-исследовательской деятельности и логико-алгоритмическое развитие, недостаточно только тех средств, о которых говорится в многочисленных методических пособиях. Для этого требуется приобщение детей *к большему многообразию форм и методов поисковой деятельности, а* также большее многообразие задач, решение которых требует разнообразных форм и методов поисковой деятельности. Для этого требуются и соответствующие пропедевтические средства.

Значимым пропедевтическим средством могло бы быть обращение к таким задачам и таким способам их решения, что:

1) они использовали бы самые примитивные формы поисковой деятельности, её «первомеханизмы», способствовали бы активизации работы этих «первомеханизмов», их взаимодействий и развитию этих взаимодействий[3];

2) поиск их решения не нуждался бы в предварительном охвате всех условий задачи; эти условия осваивались бы пошагово, в процессе самого её решения;

3) поиск их решения не нуждался бы в проектировании процесса решения как целого. Каждый уже осуществлённый шаг решения рождал бы новую тактику внимания, направленную на какую-либо из следующих ближайших целей;

4) логика их решения была бы близка логике его поиска.

К тому же такие способы решения были бы доступны и слабым школьникам.

Рассмотрим несколько (большей частью хорошо известных) примеров таких задач. Их решения могут послужить примерами-моделями способов решения широкого класса текстовых задач.

Задача 1. ***На двух кустах сидело 25 воробьёв. После того, как со второго куста улетели 7, а затем с первого куста перелетели на второй 5 воробьёв, на первом кусте их осталось в два раза больше, чем на втором. Сколько воробьёв сидело вначале на каждом кусте?***

Возможны следующие варианты: 1) на первом кусте сидел один воробей (а значит, на втором — 24); 2) на первом кусте сидели два воробья (а значит, на втором — 23); 3) на первом кусте сидели три воробья (а значит, на втором — 22); …, 24) на первом кусте сидели двадцать четыре воробья (а значит, на втором — 1). Проверим, какие из этих 24 вариантов удовлетворяют условиям задачи.

Если со второго куста улетели 7 воробьёв, то это значит, что на втором кусте вначале было, по крайней мере, 7 воробьёв. А значит, варианты 19, 20 и все последующие не удовлетворяют условиям задачи. Так что надо проверить не 24, а 18 вариантов — от 1-го до 18-го.

Первые четыре варианта тоже не удовлетворяют условиям задачи: ведь если с первого куста на второй перелетело пять воробьёв, то на первом кусте вначале было 5 или больше воробьёв. Так что надо проверить 14 вариантов, а не 18.

После того, как с первого куста перелетели на второй 5 воробьёв, а со второго улетело 7, на первом кусте осталось больше воробьёв, чем на втором. А раз так, то на первом кусте вначале было больше, чем 5 воробьёв. Значит, вариант 5 не удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, надо проверить не 14 вариантов, а 13.

На первом кусте осталось не просто больше воробьёв, чем на втором, а в два раза больше. Значит, и на первом, и на втором кусте остался хоть один воробей. А поэтому вначале на втором кусте сиде-

[3] **Чуприкова Н.И.** Психология умственного развития: Принцип дифференциации. М.: Столетие, 1997.

ло 8 воробьёв или больше. Так что вариант 18 не удовлетворяет условиям задачи. Значит, надо проверить не 13 вариантов, а 12 — от 6-го до 17-го.

Так как на первом кусте осталось в 2 раза больше воробьёв, чем на втором, то их осталось на первом кусте чётное число, и это после того, как их количество уменьшилось на нечётное число 5. Значит, на первом кусте вначале было нечётное число воробьёв. А потому надо проверять не все варианты от 6-го до 17-го, а лишь следующие шесть: 7, 9, 11, 13, 15, 17.

К понятиям чётного и нечётного числа желательно приобщать уже старших дошкольников, истолковывая чётность числа каких-либо предметов как возможность разбиения их совокупности на две равночисленные части или как возможность разбиения совокупности на пары её элементов, то есть на двухэлементные подмножества. (Аналогичное относится и к числу 3.) Такой подход позволяет детям, в частности, легко усматривать, что если число a чётное, то число $a+b$ чётно тогда и только тогда, когда b чётно, и что чётность (нечётность) a влечёт нечётность (чётность) $a+1$. Такие первые шаги к постижению структуры натуральных чисел могут одновременно служить первыми шагами постижения продуктивности обращения к целостностям, к схватыванию и обыгрыванию структуры целого, первыми шагами на пути приобщения к принципу *от целого — к частям* и осознанию его продуктивности.

Возвратимся к сценарию обсуждения задачи:

Так как после того, как число воробьёв на первом кусте уменьшилось на 5, а на втором всего на 2, и на первом кусте всё равно осталось больше воробьёв, чем на втором, то и вначале на первом кусте было, по крайней мере, на 3 больше воробьёв, чем на втором. А значит, проверять надо лишь варианты 15 и 17.

Проверим вариант 15. Если вначале на первом кусте было 15, а на втором 10 воробьёв, то осталось на первом 15–5, то есть 10 воробьёв, а на втором 10+5–7, то есть 8. А значит, на первом кусте в этом случае стало не в два раза больше, чем на втором. Так что этот вариант не проходит. Проверка показывает, что вариант 17 даёт решение задачи.

Многошаговость рассмотренного решения развёртывается естественным образом, она «природосообразна». А потому и она сама н*е*сёт развивающее начало, формируя у детей психологическую готовность к более сложным формам учебной деятельности и способность к ним, благодаря развитию памяти и внимания, исподволь происходящему в подобных многошаговых процессах. Такая «природосообразная» многошаговость настраивает внимание ребёнка на целостность восприятия осуществляемого им процесса решения и тем самым способствует формированию привычки идти от целого, вести рассмотрение в контексте целого.

Рассмотренное решение, как и приводимые ниже решения других задач, не служит прямым средством преодоления сложности научения младших школьников построению такой модели условий задачи, которая высвечивала бы пути её решения, то есть была бы моделью способа её решения. Но оно может служить моделью широко применимого способа решения текстовых задач.

А ведь задачу можно решить намного проще. После того, как со второго куста улетели 7 воробьёв, всего на обоих кустах стало на 7 воробьёв меньше. А значит, их осталось всего 25–7, то есть 18. При этом на первом кусте стало в два раза больше воробьёв, чем на втором. То есть две из трёх частей от оставшихся 18 воробьёв остались на первом кусте, а одна — на втором. Значит, на втором кусте осталось 18:3, то есть 6 воробьёв, а остальные 18–6, то есть 12 — на первом. Но первоначально на первом кусте было на 5 воробьёв больше, чем осталось, то есть 12+5, или 17. А значит, на втором вначале их было 25–17, то есть 8.

Не разумней ли было бы сразу решить эту задачу вторым способом? Но многие ли дети с самого начала увидели бы этот способ решения? Для того, чтобы усмотреть его, необходимо прежде освоить условия задачи. И первый путь способствует активному их освоению. В результате его реализации начинают лучше усматриваться более рациональные подходы к решению задачи.

Первый подход не требует изначального усвоения всего комплекса условий задачи. Механизм поиска решения «заводится» обращением к самому очевидному из этих условий, а далее начинается пошаговое использование условий, и каждый шаг приводит к сужению поля поисковой деятельности.

Возможность сосредоточения на отдельном условии, на анализе ситуации, связанной с ним, способствует активизации механизмов анализа, усмотрению *подспудных* условий и их непосредственному использованию для сужения поля поисковой деятельности. Значима и становящаяся очевидной для ребёнка возможность разных, и не только равно эффективных, вариантов осуществления каждого шага, ведущего к сужению совокупности вариантов, подлежащих рассмотрению. Всё это увлекает детей, рождает их поисковую активность и несёт развитие их поисково-исследовательской деятельности.

Таким образом, рассмотренное решение, как и приводимые ниже решения других задач, может служить не просто моделью широко применимого способа решения текстовых задач, но моделью превращения текстовых задач в эффективное средство развития поисково-исследовательской деятельности школьников, а тем самым — в средство их общего интеллектуального развития. (Точнее было бы говорить о системе, или комплексе, таких задач вместе с их решениями как о единой модели такого рода. Учебная деятельность осуществляется путём обращения не столько к отдельным задачам, сколько к комплексам задач. И развивающему обучению математике должна отвечать не столько типология отдельных задач, сколько типология полифункциональных комплексов задач и взаимодействий таких комплексов. Проблема разработки такой типологии является важной проблемой педагогики математики.)

Задача 2. *На складе имеется 50 килограммовых и двухкилограммовых пакетов муки, общий вес которых 80 кг. Сколько среди них килограммовых пакетов?*

Всего имеется 50 возможных вариантов количества килограммовых пакетов. Как сократить количество проверок? Как, не используя прямые проверки, отсеять по возможности большее количество заведомо неподходящих вариантов?

А не стоит ли вначале проверить, не составляют ли килограммовые пакеты половину всех пакетов? Если окажется, что это не так и что при таком их количестве общий вес пакетов будет, например, бóльшим 80 кг, то отсюда будет следовать, что килограммовых пакетов меньше 25. И это сократит более чем в два раза количество возможных вариантов.

Если бы килограммовых пакетов было 25, то общий вес пакетов был бы равен ($25+25 \cdot 2$) кг. Он был бы меньше 80 кг. Значит, килограммовых пакетов меньше 25. Таким образом, из 50 вариантов остаются 24 — от 1 до 24.

А ведь подобным образом количество вариантов можно сократить ещё в два раза. Испытаем какой-нибудь средний из оставшихся вариантов, то есть 12 или 14. Если бы килограммовых пакетов было 14, то общий вес пакетов был бы равен ($14+36 \cdot 2$) кг. Он был бы больше 80 кг. Значит, килограммовых пакетов больше 14. Так что из 24 вариантов остаются 10 — от 15 до 24.

Если бы количество килограммовых пакетов было нечётным, то и общий вес пакетов выражался бы нечётным числом килограммов. Следовательно, искомое количество чётное. С учётом этого остаются 5 вариантов: 16, 18, 20, 22, 24.

Так как количество килограммовых пакетов чётное и количество всех пакетов тоже чётное, то и количество двухкилограммовых пакетов чётное. А значит, их общий вес делится на 4. А так как общий вес всех пакетов, равный 80, делится на 4, то общий вес килограммовых пакетов тоже делится на 4. А значит, количество таких пакетов делится на 4. С учётом этого остаются три возможных варианта искомого количества: 16, 20 и 24.

Средний вариант удовлетворяет условиям задачи. Действительно, если килограммовых пакетов 20, то количество двухкило-

граммовых равно 50–20, то есть 30, а значит, общий вес всех пакетов равен 20+30·2=20+60=80.

Остаётся проверить два других варианта. Их можно не проверять: если бы уменьшилось или увеличилось количество килограммовых пакетов, то на столько же увеличилось бы или уменьшилось количество двухкилограммовых, а значит, на столько же увеличился бы или уменьшился общий вес пакетов, и тогда он стал бы больше или меньше 80 кг.

После того, как ответ найден, естественно и целесообразно поставить вопрос о том, как представить решение задачи в виде последовательности действий, по возможности более короткой. Отправным пунктом может послужить следующее наблюдение: количество двухкилограммовых пакетов оказалось равным разности между количеством килограммов в общем весе пакетов и количеством пакетов:

Если бы все 50 пакетов были килограммовыми, то их общий вес был бы не 80 кг, а 50 кг. Значит, «лишние» 30 килограммов относятся к двухкилограммовым пакетам. Отсюда ясно, что таких пакетов 30.

При всей «приземистости» первых вариантов решений задач 1 и 2 они обладают следующими важными качествами. Если решение задачи «по действиям» использует её условия лобовым образом, то первые варианты решений задач 1 и 2 формируют настрой на поиск и использование подспудных условий, позволяющих существенно сузить круг испытываемых вариантов. Таким образом, эти решения основываются на обращении не только к предметной стороне дела, но и к анализу способов действия, к поиску средств их рационализации путём перевода явных и скрытых условий задачи в соответствующие тактики поведения. Они прямым образом связаны с метапредметной стороной дела и потому являются эффективным средством развития способностей к метапредметной деятельности, а тем самым — эффективным средством обогащения метакогнитивного опыта.

Решение следующей задачи осуществляется *моделированием* рассматриваемой в ней ситуации ситуацией, представленной в задаче 2 как уже решённой. Моделирование основывается на усмотрении сюжетного «изоморфизма» этих ситуаций. Последний несёт усмотрение «изоморфизма» решений этих задач как последовательностей действий. Предлагаемое же решение задачи 3 обыгрывает такое моделирование более сильным образом: уже известный ответ к задаче 2 позволяет *усмотреть* ответ к этой задаче.

Задача 3. ***В саду живут фазаны и кролики. Число всех этих животных — 50, а число их ног — 160. Сколько в саду фазанов и сколько кроликов?***

Эта задача не просто аналогична предыдущей, а может быть преобразована в предыдущую. Каждого фазана заменим килограммовым пакетом, а каждого кролика — двухкилограммовым. Пакетов станет 50, то есть столько же, сколько в саду фазанов и кроликов, а число килограммов в их общем весе станет равным 80, то есть в два раза меньшим, чем число ног у фазанов и кроликов. Но это, как показывает решение задачи 2, означает, что число килограммовых пакетов равно 20, а число двухкилограммовых — 30. Но фазанов столько же, сколько килограммовых пакетов, а кроликов столько же, сколько двухкилограммовых. Значит, фазанов 20, а кроликов 30.

При всей поучительности, при всей развивающей ценности такого решения целесообразно вслед за ним рассмотреть и прямое решение задачи, аналогичное второму решению задачи 2:

Если бы все 50 животных в саду были фазанами, то число ног у них было бы не 160, а 100. Значит, «лишние» 60 ног принадлежат кроликам. А так как у кролика на две ноги больше, чем у фазана, то 60:2, то есть 30 и есть число кроликов.

Задача 4 (а). ***Имеются 18 двухрублёвых и пятирублёвых монет на сумму 81 рубль. Сколько среди них двухрублёвых и сколько пятирублёвых монет?***

Если мы узнаем количество двухрублёвых монет, то узнаем и количество пятирублёвых. А количество двухрублёвых монет может быть от 1 до 17 (предполагается, что *среди монет есть и двухрублёвые, и пятирублёвые). Таким образом, надо проверить 17 вариантов.*

Не лучше ли искать количество пятирублёвых монет? Ведь их может быть от 1 до 16. Так что в этом случае надо будет проверить 16 вариантов, а не 17.

Зримое наличие разных и при этом не равноценных с точки зрения эффективности шагов, направленных на отбор возможных вариантов, активизирует аналитическую деятельность учащихся и тем способствует её развитию, а также обогащению их метакогнитивного опыта.

А если мы ещё узнаем, каких монет больше, то сможем в два раза уменьшить количество возможных вариантов. Но, может быть, двухрублёвых и пятирублёвых монет поровну? Проверим: 9 двухрублёвых и 9 пятирублёвых монет в сумме дают всего 63 рубля. Так что количество двухрублёвых монет не равно количеству пятирублёвых. А так как 9 двухрублёвых и 9 пятирублёвых монет в сумме дают меньше, чем 81 рубль, то пятирублёвых монет больше. Значит, из 16 вариантов надо проверять лишь 7 — от 10 до 16. Двухрублёвые монеты в сумме дают чётное число рублей, а вся сумма нечётная. Значит, пятирублёвые монеты в сумме дают нечётное число рублей. Поэтому пятирублёвых монет нечётное число. Следовательно, из оставшихся 7 вариантов надо проверять лишь три: 11, 13, 15.

Проверим первый из этих вариантов.

Лучше начать с проверки среднего варианта. Ведь если при нём монеты в сумме дают меньше 81 рубля, то не годится не только сам этот вариант, но и предшествующий. Если же при этом варианте монеты в сумме дают меньше 81 рубля, то не годится не только этот вариант, но и последующий. Так как при большем количестве пятирублёвых монет общая сумма будет большей, то условиям задачи может удовлетворять только один вариант. Или ни одного. Например, следующая задача не имеет решения.

Задача 4 (б). ***Имеются 18 двухрублёвых и пятирублёвых монет на сумму 20 рублей. Сколько среди них двухрублёвых и сколько пятирублёвых монет?***

Итак, начнём с проверки среднего варианта. Если пятирублёвых монет было 13, то двухрублёвых — 5. В сумме они дают $5·13+2·5=75$ рублей. Эта сумма меньше 81. Значит, пятирублёвых монет больше 13. Если пятирублёвых монет было 15, то двухрублёвых — 3. В сумме они дают 81 рубль.

С задачами 4 естественно ассоциировать следующие простые задачи:

Задача 5. ***Каково наименьшее и каково наибольшее число двухрублёвых и пятирублёвых монет на сумму а) 81 рубль, б) 80 рублей?***

Задача 6. ***Сумма нескольких двоек и пятёрок равна 81. Сколько слагаемых, равных 2, и сколько равных 5?***

Задача 7. ***Сумма нескольких троек и пятёрок равна 81. Сколько слагаемых, равных 3, и сколько равных 5?***

Пятёрок может быть не больше 16. Таким образом, надо рассмотреть 16 вариантов возможного количества пятёрок: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Тройки в сумме дают число, делящееся на 3, и вся сумма делится на 3. Значит, пятёрки в сумме дают число, делящееся на 3. Поэтому число пятёрок делится на 3. Следовательно, из этих 16 вариантов надо проверять лишь 5: 3, 6, 9, 12, 15. Каждый из них даёт решение задачи.

Задача 8. ***12 человек несли 12 батонов хлеба: каждый мужчина нёс по 2 батона, каждая женщина — по половине, а каждый ребёнок — по четверти батона. Сколько было мужчин, сколько женщин и сколько детей?***

Всего было $12·4$, то есть 4 четвертей хлеба. *Каждый мужчина нёс по 8, каждая женщина — по 2 и каждый ребёнок — по 1 четверти. Так как $48 = 8·6$, то мужчин было меньше 6, то есть 1, 2, 3, 4 или 5. Если бы их было 3, то это означало бы, что 9 женщин и детей несли $48–8= 24$ четверти. Но для того, чтобы нести 24 четверти, понадобилось бы 12 женщин, а детей и женщин — ещё больше. В этом случае число людей, нёсших 48 четвертей, было бы больше 12. Та-*

ким образом, мужчин было больше 3. А значит, их было 4 или 5.

Если бы мужчин было 4, а тогда они несли бы 8·4, то есть 32 четверти, то 8 женщин и детей несли бы 48–32 = 16 четвертей. Если бы эти 16 четвертей несли только женщины, то их было бы 8. А если бы их несли женщины и дети, то их было бы больше 8. Но тогда 48 четвертей несли бы не 12 человек, а больше. Значит, не могло быть 4 мужчин. Следовательно, мужчин было 5 (точнее говоря, могло быть лишь 5, ведь мы пока не знаем, имеет ли задача хоть одно решение)*, и потому женщин и детей, нёсших 48–5 четвертей, было 7.*

Детей было не больше 6 (ведь была же хоть одна женщина). Решение свелось к выяснению того, какие из этих 6 вариантов могут иметь место.

Заметим, что всего было чётное число четвертей и что и мужчины, и женщины несли по чётному числу четвертей. Значит, и дети несли чётное число четвертей. А так как каждый ребёнок нёс по одной четверти, то детей было чётное число. Поэтому детей было 2, 4 или 6. Если бы детей было 4, то женщин — 3, и тогда женщины и дети несли бы 4, а не 8 четвертей. А если детей было бы меньше 4, то женщин было бы больше 3, и тогда вместе они несли бы ещё больше четвертей. Таким образом, детей было больше 4. А значит, их было 6. Следовательно, женщин было 7–6 = 1.

Задача 9. *У мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, а у его сёстры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько всего братьев и сестёр?*

Так как у мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, то всего братьев, считая и этого мальчика, на 1 больше, чем сестёр. А так как у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев, то на единицу меньшее количество сестёр в два раза меньше чем братьев. Отсюда следует также, что братьев чётное число, а значит, число сестёр нечётное.

Если бы сестёр было много (а братьев-то всего на 1 больше), то уменьшение количества сестёр на 1 не привело бы к тому, что их стало бы в два раза меньше, чем братьев. В самом деле, если бы сестёр было, например, 9, а значит, братьев 10, то 9–1 не будет в 2 раза меньше, чем 10. А если бы сестёр было, скажем, 19, а значит, братьев 20, то 19–1 ещё больше отличалось бы от половины числа братьев, то есть от 10. И чем больше число сестёр, тем больше на единицу меньшее число отличается от половины числа братьев. Если бы сестёр было 7, а значит, братьев 8, то 7–1 не будет в 2 раза меньше, чем 8. Даже если бы сестёр было 5, а значит, братьев 6, то 5–1 не будет в 2 раза меньше, чем 6.

Таким образом, количество сестёр весьма невелико и является нечётным. Естественно подвергнуть проверке числа 1 и 3. Первый из этих вариантов не удовлетворяет условиям задачи, а второй удовлетворяет. Таким образом, сестёр было 3, а братьев — 4.

Как видим, задачи, решаемые использованием совершенствующегося отбора вариантов, могут служить не только полезным пропедевтическим средством для обучения детей решению текстовых задач «по действиям». Они сами несут развитие ориентировки, развитие механизмов анализа, способствуют развитию поисково-исследовательской деятельности детей и логическому их развитию.

А вот примеры такого рода задач, ориентированных на учащихся средних и старших классов:

1. Процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключён в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково минимально возможное число учеников в таком классе?

2. Несколько студентов решили купить магнитофон ценой от 1700 рублей до 1950 рублей. В последний момент двое из них отказались участвовать в покупке. Поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 10 рублей больше. Сколько стоит магнитофон? Сколько было студентов?

3. Найти целые корни уравнения $(6 - x)(x - 2)(x + 3)(x + 9) = 24x^2$.

Обращение к таким задачам способствовало бы развитию поисково-исследовательской деятельности и этой категории школьников. Рассмотрим третью задачу.

Это уравнение представляет алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Следовательно его целыми корнями могут быть лишь делители свободного члена, модуль которого равен 6 · 2 · 3 · 9. (В самом деле, то, что целое число x_0 — корень уравнения $ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d = 0$ с целыми коэффициентами, означает, что истинно равенство $d= -(ax_0^n + bx_0^{n-1} + \dots + cx_0)$, то есть что истинно равенство $d= -x_0(ax_0^{n-1} + bx_0^{n-2} + \dots + c)$, а значит, что x_0 — делитель d.) Таким образом, целыми корнями данного уравнения могут быть лишь числа –1, +1, –2, +2, –3, +3, –4, +4, –6, +6, –9, +9, –12, +12, и т. д.

Правая часть обращается в ноль при единственном значении x, равном 0. Но при этом значении x левая часть в ноль не обращается. Отсюда ясно, что нули левой части, то есть числа –9, –3, 2 и 6, не являются корнями уравнения.

Для того, чтобы среди оставшихся чисел найти все целые корни данного уравнения, надо совершить довольно много проверок.

Правая часть уравнения при любых значениях x принимает положительные значения. Следовательно, корнями нашего уравнения могут быть лишь те значения x, при которых левая часть принимает положительные значения. Многие из делителей свободного члена можно было бы отсеять без прямых проверок, если бы удалось найти интервалы, в которых левая часть уравнения принимает положительные значения.

Зная нули левой части уравнения и пользуясь методом интервалов, нетрудно найти интервалы, в которых левая часть принимает положительные значения. Это интервалы (–9, –3) и (2, 6). В них входят лишь следующие делители свободного члена: –4, –6, 3 и 4. Корнями уравнения могут быть лишь какие-то из этих четырёх чисел.

При x = –4 значение левой части делится на 5, а значение второй не делится. Значит, число –4 не является корнем уравнения. Проверка показывает, что числа –6 и 3 являются корнями. При x = 4 третий множитель левой части принимает значение 7. Значит, при x = 4 левая часть делится на 7, а правая не делится (она равна 244^2). Следовательно, число 4 не является корнем уравнения. Таким образом, целыми корнями уравнения являются числа –6 и 3.

Эта задача может быть не менее эффектно решена посредством преобразования уравнения. Но было бы неразумно ставить вопрос о том, какое из этих решений лучше. Каждое из них несёт свой развивающий эффект.

Специального рассмотрения заслуживает подход к решению текстовых задач, воплощённый в учебниках по системе Эльконина-Давыдова и использующий «универсальную» форму схематизации условий задач. Её применение во многих случаях снимает трудности, связанные с проектированием подхода к решению, и делает логику поиска решения задачи логикой самого её решения. Значимым методическим достижением авторов этих учебников является и их способ приобщения младших школьников к идеям прямой и обратной пропорциональностей, делающий намного более доступным широкий класс задач, вызывающих трудности у многих детей, и создающий возможность стандартизации их решений.

Но реализация всех этих средств таит в себе опасность гипертрофии рационализации, приводящей к её гегемонии и тем самым несущей препятствие развитию поисково-исследовательской деятельности учащихся, а значит, развитию у них креативного начала. Ведь в поисковой деятельности и в процессах понимания участвуют далеко не только «левополушарные» механизмы. Средством, предохраняющим от этой опасности, является использование в учебной деятельности соответствующим образом организованных комплексов задач. В конечном счёте, таким средством является следование тому, что полнокровное развитие какого-либо из компонентов диады *следование методу — поисковая деятельность* не может происходить без полнокровного развития другого, что полнокровное функционирование диады происходит тогда, когда её компоненты активно взаимодействуют, выступая при этом как равно важные, как равно ценные, как *самоценные*. ❑