Эстетический ресурс математического образования в школе

Валерий Николаевич Клепиков,
ведущий научный сотрудник Института социальной педагогики РАО, заместитель директора по инновационной работе, учитель математики и этики средней школы № 6 г. Обнинска, кандидат педагогических наук, почётный работник общего образования РФ, klepikovvn@mail.ru

• эстетический ресурс • выразительные формы • пластичность • модели понимания • понятия — ценности • доказать • объяснить • «погрузить» •

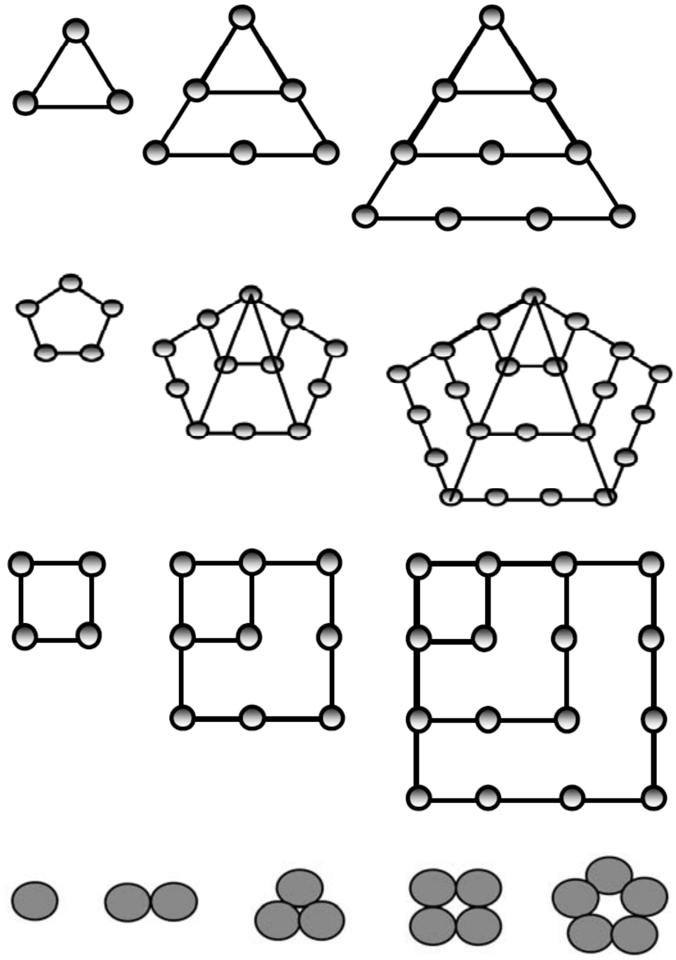
Как показывает анализ, в современной школьной математике постоянно увеличиваются объёмы информации, которые необходимо усвоить для успешной сдачи ЕГЭ и ГИА. И чем больше требуется запомнить информации, тем меньше остаётся времени для её основательного усвоения. В ходе приближения к итоговым экзаменам мы всё реже и реже вспоминаем, что процесс познания требует «погружения» сознания ребёнка в определённую культурную и развивающую среду, учёта личностных временных процессов понимания и особенностей субъектного восприятия.

Отсюда плачевный результат: как показывают вузовские проверки знаний первокурсников, всего через несколько недель после сдачи выпускного школьного экзамена значительная доля знаний утрачивается. Тем самым в данных условиях всё более и более становится затруднительным достигать личностных результатов образования, т.е. «живого знания», или личностного знания.

На наш взгляд, решению данной проблемы поможет *опора на эстетические ресурсы математических знаний.* В этой связи, под эстетикой мы будем понимать науку, имеющую своим предметом область *выразительных форм* любой сферы человеческой деятельности (А.Ф. Лосев). Выразительную форму можно интерпретировать такими понятиями — ценностями, как «гармоничная», «красивая», «упорядоченная», «совершенная», «закономерная», «оптимальная», «целесообразная», «оригинальная», «компактная», «изящная», «элегантная», «лаконичная», «экономичная», «системная» и т.д.

Как известно, основу знаний в школе составляют открытия и обобщения, сделанные древнегреческими математиками. Для нас значимо, что в ходе изучения древнегреческой культуры А.Ф. Лосев сделал важный вывод о том, что в ней явно превалирует *эстетическая составляющая*, а существенной чертой древнегреческого сознания является такое свойство, как *пластичность*. Таким образом, эстетика и пластика пронизывают древнегреческую философию, искусство, науку, и в частности — математику.

Почувствовать пластику в математике можно, например, с помощью свойств пропорции: $a/b = m/n$, $b/a = n/m$, $a/m = b/n$, $m/a = n/b$, $a \cdot n = b \cdot m$. Замечательно, что уже древние греки знали несколько видов пропорции: обычную, геометрическую, гармоническую, арифметическую и «золотую». Несомненно, в этом также проявились ярко выраженные пластические интуиции древних греков. Кстати напомним, что пифагорейцы очень тонко чувствовали пластику числовых форм, поэтому числа они изображали в виде различных геометрических фигур: треугольников (3, 6, 10 и так далее), квадратов (4; 9; 16 и так далее), пятиугольников (5; 12; 22 и так далее) и т.п.



Такое фигурное представление чисел помогает найти различные *числовые закономерности*, которые можно отнести к существенным эстетически ресурсам, так как они в значительной степени способствуют возникновению эстетических переживаний. Например, написав последовательность квадратных чисел, легко увидеть доказательство следующего математического утверждения: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n — 1) = n^2$. Аналогичное рассмотрение n-го треугольного числа приводит к равенству:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Отсюда теперь становится ясно, почему пифагорейцы называли число *«первым образом творения мира»*. Именно число, по их мнению, приводило Космос, или Вселенную, в гармонию и порядок. Как писал древнегреческий историк Диоген Лаэртский, «Пифагор первый назвал Вселенную «космосом» по порядку, который ему присущ». Кстати, и Вселенную они понимали, как громадное живое скульптурное изваяние. Вот почему древние греки создали непревзойдённые образцы в искусстве — скульптуре и архитектуре. Гениальные произведения того времени отличает изумительная пластика.

Для вскрытия *выразительности математических чисел*, как и других математических понятий, мы вместе с детьми сочиняем притчевые миниатюры. Оговоримся, что притчевая миниатюра также являет собой эстетический феномен, в котором создаётся выразительная форма понимания (рефлексии) учащегося. В ходе создания притчевых миниатюр важно учитывать, что математические феномены впитывают в себя культурно-исторические смыслы, которые рождаются в ходе развития человечества. Поэтому числа (как ценность!) не есть нечто застывшее, они живут и наполняются новыми коннотациями. Вот несколько примеров.

«Ноль без палочки». Как-то шёл Ноль мимо своих собратьев — чисел — и удивлялся тому, как много среди них его собратьев, похожих на него, ведь у многих чисел была такая же форма. Но удивлялся не только Ноль, но и многие числа. И решили они выбрать его Королём. Став Королём, он нисколько не зазнавался и, выслушивая похвалы, говорил: «Вы мне очень и очень нужны, без вас я просто ноль без палочки!»

«Число семь». Многие люди отмечают необычайную распространённость числа семь. «Семь раз отмерь, один раз отрежь». «Семь бед — один ответ». «Семеро с ложкой — один с сожкой». «Семеро одного не ждут». «Было у тёщи семеро зятьев». Семь дней творения встречаем мы в Ветхом Завете, семь коров тучных и семь тощих, семь смертных грехов. Семь мудрецов было у древних греков и семь чудес света. Судьбами шумеров распоряжались семь богов и богинь, а когда шумер умирал, он входил через одно из семи врат в подземное царство, где его ожидал один из семи судей. Чем дальше в глубь веков, тем чаще люди опирались на число «семь».

«Число на кончиках пальцев». Не будем забывать, что числа ожидают нас на кончиках пальцев, они словно являются частью нашего тела. Отсюда возникла десятичная система счисления. Однако люди использовали не только эту систему. У жителей южных широт была распространена двадцатеричная система, может быть, потому, что ходили босиком. А у северных народов имела хождение пятеричная система счисления, наверное, потому, что холодно снимать варежки с обеих рук сразу. В разное время разные народы использовали и двенадцатеричную систему счисления, потому что считать можно не только пальцы, но и фаланги пальцев руки.

«Триада». Числу «три» всегда принадлежала формообразующая роль в науке, культуре и религии. Три ипостаси Бога (Отец, Сын, Дух Святой), ценностные триады «истина — добро — красота» и «вера — надежда — любовь», в русском языке три рода (мужской, женский, средний), три времени (прошлое, настоящее, будущее), в сказах три сына или дочери, три составляющие человека (дух, душа, тело), три агрегатных состояния (жидкое, твёрдое и газообразное), трёхмерное пространство, наименьшее количество сторон в многоугольнике — три и т.п. Некоторые мыслители отмечали такое фундаментальное свойство триады, как оптимальная полнота и самозавершённость. Конечно, в концептуально-организующей роли выступает не только тройка, но именно ей принадлежит внеконкурентная пальма первенства.

«Вначале было число». Наш мир есть разрастающийся мир величин — *бесконечно больших* и *бесконечно малых:* компьютерные килобайты, мегабайты и гигабайты, количество галактик, землян, долларов, машин, болезней, вирусов, микробов и т.д. Это также тысячи, миллионы, миллиарды земных событий, в которых роль отдельной личности ничтожно мала или, наоборот, вдруг, обретает колоссальное значение. Магия величин завладевает человеком, диктует ему определённую линию поведения и образ жизни. Человек как безликая, среднестатистическая величина становится абсолютно бессильным перед этими, уже ставшими планетарными, энергиями и силами. При этом не важно, кем человек является — школьником, рабочим или министром. И многие люди с их индивидуальными, самобытными мирами исчезают в этом океане бесконечно малых и бесконечно больших величин, не видя альтернативы. Однако виноваты не величины, а *отношение* к ним самого человека. Существуют числа, но есть и *Число*. С возрастанием роли техники человеку нужно всё больше и больше прилагать усилий, чтобы вырваться из притяжения магических величин в мир подлинной жизни и обрести именно свою судьбу. Если сформулировать кратко, то нужно вновь и вновь задумываться над тем, почему вначале было *число*.

Первое, что нужно сделать при изучении математики — выработать у учащихся *эстетическое отношение к знакам (цифрам, буквам, символам, фигурам и прочее),* т.е. понимание их как своеобразных творений культуры. Можно даже рассматривать написание знака как некоего таинственного акта, в котором схватывается то или иное мирочувствие, мироотношение, миропонимание. Идею отношения к знаку как глубочайшему сакральному символу можно почерпнуть в древних цивилизациях, например, в Древней Руси, Древнем Египте, Древней Греции, Древней Индии и т.д. Вспомним в этой связи эстетику написания иероглифа в Китае и Японии: здесь знак — это не просто крючок, но полноценное художественное целое, которое мастерски выписывается с особым изяществом и любовью.

Пускай дети самостоятельно найдут в литературе и Интернете сведения о цифрах и числах, попробуют собственной рукой изобразить цифры различных древних культур. Пусть одну и ту же цифру рассмотрят в различных национальных контекстах, дадут им эстетическую оценку (красивая, изящная, лаконичная, простая, доступная и так далее), почувствуют их «фактуру», напишут притчевую миниатюру или краткое эссе.

Подход к математике с точки зрения обнаружения выразительных форм особенно продуктивен с *методической точки зрения.* Опытные учителя понимают, что одно дело строго и логично *доказать,* например, теорему и другое дело — *объяснить.* Далеко не всегда строгое и последовательное доказательство обеспечивает успешное усвоение темы. Нужно ещё *нечто*, что учитывает психику ребёнка, его текущее состояние, особенности восприятия и т.д.

Собственно, вся тайна преподавания лежит в области обнаружения и конструирования выразительных форм, точнее, *в выразительных моделях понимания*, которые на каждом уроке выстраивает педагог (осознанно, спонтанно и в ходе импровизации). Поэтому эстетика — не просто красивое обрамление урока, а *его суть*, так как именно она придаёт ему определённое лицо, субъектную выразительность и пластичность.

Заострим внимание: важно не приукрашивать математические знания некими эстетическими словесными оборотами и картинками для их более приятного усвоения (хотя и это нужно в меру делать), а в самих знаниях искать *эстетический потенциал*, опору для эстетического восприятия и освоения мира. И тогда на уроках математики не будет ничего искусственно притянутого, нарочитого, избыточного.

Например, число, симметрия, пропорция, функция, мера, геометрические фигуры — это математические конструкты, которые лежат в основе восприятия человеком объектов мира, осознаёт ли это субъект или нет. Это своего рода *«архетипы»* адекватного восприятия мира. Другими словами, мы сначала геометрически упорядочиваем явления и феномены мира, и только потом подходим к их всесторонней эстетической оценке. Кстати, именно это нам напомнили, тонко чувствуя текущую эстетическую конъюнктуру, в начале XX века художники-кубисты.

Основатель эстетики А. Баумгартен определял математику как *искусство красиво мыслить*. Действительно, красоту законов разума можно уловить на всех школьных уроках и занятиях, но на уроках математики можно и нужно сознательно делать на них акцент. Данное искусство проявляется в сообразительности, смекалке, умении изящно, пластично, образно и экономно мыслить. В принципе эта красота доступна всем, кто чувствует уважение к работе ума, стремится самостоятельно мыслить и испытывает от этого удовольствие. Эстетически развитый ум плодотворен: он легче отбрасывает укоренившиеся шаблоны, ищет новые пути и находит креативные связи. Важно только, чтобы учитель заострял на творческих удачах внимание и раскрывал их для всех присутствующих на уроке или занятии, т.е. сознательно создавал «ситуации успеха», целенаправленно «заражал красотой».

Для демонстрации *красоты математических решений и рассуждений* приведём следующие примеры.

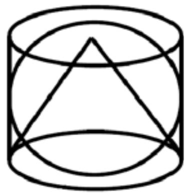
Первый пример. Однажды юный человек провёл отрезок и попросил мудреца, чтобы тот сократил его, не урезывая и не касаясь. Мудрец параллельно провёл более длинный отрезок, и тем самым первоначальный отрезок был умалён.

Второй пример. Однажды учитель предложил ученикам третьего класса, где учился будущий великий математик Карл Гаусс, сложить числа от 1 до 10 включительно. Ответ последовал незамедлительно. Карл назвал число 55. Он нашёл наиболее простой и изящный способ решения этого примера. Карл сложил не одну, а две суммы: $(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) + (6 + 5) + (7 + 4) + (8 + 3) + (9 + 2) + (10 + 1)$, заметив, что каждая пара чисел даёт одно и то же число 11. Затем всё оказалось очень просто: $(11 \cdot 10): 2 = 55$. Так, уже в детстве проявилось неординарное мышление великого немецкого математика.

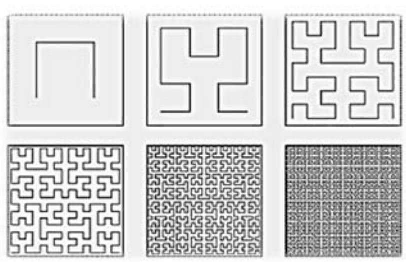
Третий пример. Есть в математике очевидные и в то же время невероятные вещи. Согласно древней легенде, индийский царь Шерам был восхищён новой игрой — шахматами и предложил её изобретателю — мудрецу Сете — любую награду. Сете попросил плату пшеницей, исходя из следующего расчёта: за первую клетку доски заплатить 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и так далее — за каждую следующую клетку дать в два раза больше зёрен, чем за предыдущую. Конечно же, царь, не догадываясь о подвохе, согласился. Как вы думаете, сколько зёрен попросил Сете за изобретение шахмат? Итак: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024; 2048; 4096; 8192; 16384… Так появляется сумма: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$. А теперь укажем результат: 18 446 744 073 709 551 615. Огромность этого числа хорошо иллюстрируется следующим примером: если всю эту пшеницу удалось бы поместить в амбар шириной 10 м и высотой 8 м, то его длина оказалась бы равной расстоянию от Земли до Солнца (150 000 000 км)! Понятно, что царь этим обстоятельством был не просто удивлён — шокирован.

Попутно заметим, что для понимания различных чисел очень важно с помощью компьютерных технологий приводить *наглядные и бытовые пояснения*. Тем более что эти пояснения помогают учащемуся сориентироваться в мире «бесконечно больших и бесконечно малых величин».

Продемонстрируем *красоту отношений геометрических объектов*. *Первый пример.* Если исследовать соотношение объёмов цилиндра и шара, вписанного в цилиндр, и конуса, вписанного в цилиндр, то выявляется следующая закономерность: $V_ц : V_ш : V_к = 3 : 2 : 1$. В ходе данного доказательства ребята, как правило, испытывают удивление и эстетическое наслаждение от столь неочевидного и столь гармоничного соотношения.

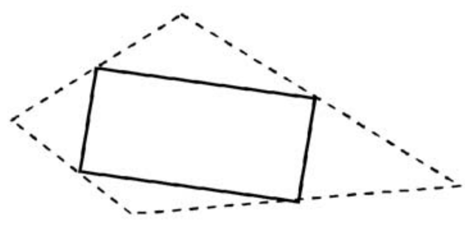


Второй пример. Как известно, фрактал (лат. *fractus* — дробленый) — это геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, т.е. составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. Многие объекты в природе обладают фрактальными свойствами, например, побережья, облака, кроны деревьев, кровеносная система и система альвеол человека и т.д. На рисунке демонстрируется логика моделирования фрактала, который называется «Кривая Пеано».



Третий пример. На уроках математики учащиеся изучают тему «Симметрия». Но насколько эта тема оживится, если вместе с понятием «симметрия» вводить и понятие «асимметрия». По мнению А.В. Волошина только единство симметрии и асимметрии создаёт подлинную гармонию красоты. Возьмём простой пример: деление отрезка (целого) на две части. Если отрезок разделить пополам, зеркально-симметрично, то такое деление выглядит уравновешенным, но мёртвым. Если же точку деления взять слишком близко к одному из концов отрезка, то новая конфигурация будет чересчур неуравновешенной и беспокойной. Только некая «золотая середина», которая в данном случае отнюдь не является геометрической серединой, обеспечит нам желаемое единство симметрии и асимметрии. Такое «радующее глаз» деление отрезка, по преданию, было известно ещё древним грекам и называлось «золотой пропорцией».

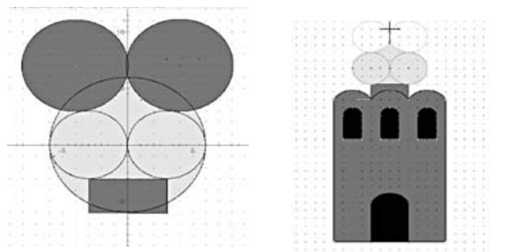
Четвёртый пример. Выберем четыре произвольные точки плоскости и соединим их пунктирными отрезками, получится четырёхугольник. Соединим середины его сторон. Замечаете ли вы нечто особенное? Действительно, возникает параллелограмм (в частности — прямоугольник). Повторим построение для других исходных точек, а вновь увидим то же самое. Перед нами — не совсем обычная ситуация. Какую бы форму ни имел исходный четырёхугольник, для него всегда будет выполняться утверждение: четырёхугольник, вершины которого совпадают с серединами сторон произвольного четырёхугольника, является параллелограммом. Мы обнаруживаем порядок среди хаоса.



Пожалуй, одним самых интересных моментов в этическом учении Аристотеля является *применение эстетических критериев для оценки нравственных качеств человека*, т.е. разработка им идеи добродетели как «золотой середины» между пороками. Как известно, золотая пропорция устанавливает равновесие между целым и частью: целое так относится к своей большей части, как большая к меньшей. Исходя из этого, Аристотель даёт подробную классификацию добродетелей: «Благоразумие… середина между распущенностью и бесчувственностью к удовольствиям», «Щедрость… среднее между расточительностью и скупостью», «Благородство… это середина между кичливостью и приниженностью», «Широта… это середина между мотовством и мелочностью» и др. Обратим внимание, что добродетель у Аристотеля никогда не лежит ровно посередине от обоих полюсов. Щедрость всё же ближе к расточительству, чем к скупости. Благородство дальше от кичливости, чем от приниженности. Скромность ближе к стеснительности, чем к бесстыдству. Словом, здесь идёт речь именно о «золотой середине» в смысле «золотого сечения», которое всегда несколько смещено к одному из концов соответствующего отрезка. Таким образом, Аристотель показал, что эстетические критерии работают не только в математике и искусстве, но и в этике.

Конечно, с помощью современных компьютерных технологий можно создать привлекательные модели любых геометрических фигур и их комбинаций. Для педагога существенно культивировать у учащихся не только интеллектуальные, нравственные, но и эстетические чувства. Для этого учителю необходимо более дифференцированно комментировать те чувства, которые переживают учащиеся. Очевидно, что богатство переживаний ребёнка является мощным подспорьем качественного усвоения образовательного материала.

Учителю в ходе объяснения нового материала очень важно уходить от абстрактных и отвлечённых рисунков и опираться на *жизненные и эстетически привлекательные модели* объектов мира, создавать реальные ситуации для маленьких исследований. Например, при изучении тем «Окружность» и «Уравнение окружности» можно воспользоваться следующими моделями, учитывая, что в основе православных храмов лежит именно данная фигура. Так, мы органично насыщаем абстрактные математические формы национальными коннотациями и мотивами, т.е. придаём математике то или иное национальное звучание.



Некоторые учёные (Ф. Хатчесон и другие) полагают, что эстетические переживания связаны с постижением *неочевидной истины*, которая даётся в ходе трудных и упорных исследований. Только открытие истин, спрятанных от нас наукой или природой, открытие, требующее поиска и серьёзных усилий, доставляет человеку в конце пути эстетическое наслаждение. Приведём примеры.

Первый пример. Как вы думаете, к чему будет стремиться сумма чисел 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + …? А сумма чисел 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 +…? Оказывается, первый ряд чисел будет приближаться к единице, а второй — к бесконечно большому числу. Казалось бы, складываются приблизительно равные числа, но какая ощутимая разница в результате!

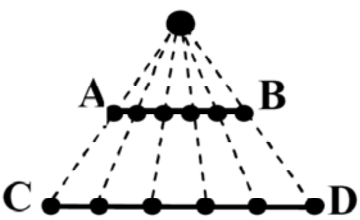
Второй пример. Как вы думаете, может ли часть быть равна целому? Например, множество натуральных чисел равно множеству квадратов натуральных чисел? Здравый смысл говорит, что, конечно, не может. Однако это не так. Представим для понимания данную ситуацию в виде таблицы.

1	2	3	4	5	6	…
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	…
1	4	9	16	25	36	…

Совершенно очевидно, что вторая строчка содержит столько же чисел, сколько и первая, — она состоит из тех же чисел натурального ряда, над которыми написан знак возведения в квадрат. Возведём числа в квадрат и запишем результат в третьей строчке. Количество чисел в этой строчке такое же, как в первой и второй. Однако третья строчка лишь часть натурального ряда чисел — в ней отсутствуют 2, 3, 4, 5, 6 и множество других натуральных чисел.

Но каждому числу третьей строчки соответствует одно и только одно число первой строчки. Следовательно, целое (весь натуральный ряд в первой строчке) равно своей части (третья строчка).

Третий пример. Как мы знаем, в геометрии предполагается, что отрезок состоит из точек. Как вы думаете: где находится больше точек — на отрезке AB или отрезке CD, который больше AB? С помощью рисунка можно доказать, что множество точек малого отрезка AB эквивалентно множеству точек большего отрезка CD. Поэтому, с точки зрения бесконечного множества точек, эти два отрезка «равны».



Многие знают следующую притчу. Однажды греческий царь обратился к Евклиду за помощью в освоении математики. После недолгого кропотливого изучения терпение царя закончилось, и он воскликнул: «Неужели в геометрии нет для меня более лёгкого царского пути?» Евклид ответил: «В геометрии царских путей не бывает». Но действительно ли это так? Ведь существует наикратчайшее расстояние между двумя точками — это длина отрезка, между точкой и прямой — это длина перпендикуляра. Может всё-таки самые короткие или царские пути существуют?

Не секрет, что любой настойчивый математик знает более продуктивные способы решения задач и примеров. Так, можно испытать затруднение при решении следующей задачи на заполнение бассейна: через одну трубу бассейн может быть наполнен за 6 часов, а через другую — за 12 часов; за какое время наполнится весь бассейн, если будут открыты одновременно обе трубы? Оказывается, задача легко решается, если вывести формулу: $1/z = 1/x + 1/y$, где величина z является ответом к этой задаче ($1/6 + 1/12 = 1/4$), т.е. $z = 4$ часам. Кстати, используется эта формула и в физике:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

где R — это сопротивление цепи, составленной из двух сопротивлений величины *R1* и *R2*, включённых параллельно.

Таким образом, царских путей в математике не бывает для ленивых и нерадивых людей, но для увлечённых математикой таких путей предостаточно. Открытые пути — это методическое оснащение математика, его личностная компетентность. Так что Евклид чуть-чуть слукавил, но в главном он был прав: для царя на первоначальный момент его математического развития царские пути вряд ли бы обнаружились.

По сути, на уроках математики актуализируются *три ступени эстетического погружения в математику.* На первой ступени мы сталкиваемся с красотой дедуктивного, «архитектонического» построения данного предмета, которая оттачивалась тысячелетиями: основные понятия — аксиомы — теоремы (свойства и признаки) — задачи и примеры — система математических знаний. На второй ступени мы встречаемся с красотой математических задач и примеров, которые отбирались педагогами веками; не случайно, что некоторые из них решаются на интуитивном уровне — увлекательно, наглядно, экономично, путём некоторых преобразований. На третьей ступени мы наблюдаем красоту математической деятельности педагога и учеников: захватывающее и интригующее развитие урока, красивое доказательство теоремы или эффектное решение задачи, демонстрация изящного преобразования какого-либо «громоздкого» выражения или геометрического чертежа, своевременное применение формул (например, пластических свойств пропорции), использование эстетических достоинств интерактивной доски и т.д.

К эстетической деятельности на уроках математики мы относим и работу по построению геометрических фигур с помощью циркуля и линейки. Эта деятельность требует особых навыков и сноровки. По сути, это своеобразное аристократическое искусство, так как человек в ходе черчения оперирует на бумаге идеальными объектами и их отношениями, т.е. моделирует геометрически точный мир, учитывающий утончённейшие нюансы. Древнегреческие мудрецы хорошо понимали, что совершенно недостаточно идеальные фигуры воображать, важно также их воплощать на плоскости (двумерной) и в пространстве (трёхмерном), а для этого требуются особые эстетически обусловленные умения.

Продемонстрируем, что математические понятия имеют громадное эстетическое значение не только на уроках, но и в жизни, в понимание которой они привносят порядок, образную наглядность, математическую строгость: «мыслить по касательной», «симметричные или пропорциональные отношения», «поступить диаметрально противоположным образом», «масштабное видение или масштабная личность», «учесть все плюсы и минусы», «обходить острые углы», «поменять вектор развития», «привести взгляды к общему знаменателю», «смысловой континуум», «задать систему мировоззренческих координат», «выявить параметры развития», «обнаружить образовательные функции», «достигнуть высокой степени взаимопонимания», «многогранная личность», «играть в современном мире осевую роль», «социальная пирамида», «выступать в роли точки отсчёта», «возрастать в геометрической прогрессии», «выделить сегмент или сектор», «объёмы финансирования», «увеличить многократно», «сопоставить ортогонально», «социальная комбинаторика», «обнаружить среднюю линию», «сменить порядок действий», «любовный треугольник», «медианный подход», «линейное мышление», «бесконечное терпение», «мы почитаем всех нулями, а единицами себя» (А.С. Пушкин).

Итак, *эстетические ресурсы математических знаний* актуализируются в ходе:

- исследования культурно-исторических текстов (например, задачи на дроби из Древней Руси, Древней Греции, Древнего Китая и так далее; нахождение в них общих признаков и отличительных особенностей);

- образовательной деятельности по построению геометрических фигур, графиков, таблиц, диаграмм и так далее; очень важно, когда ребята своими руками создают и преобразуют эти объекты, оперируют ими;

- мыслительной деятельности, которая может отличаться стереотипностью или выразительностью; при этом важно сделать акцент на живом мышлении, особенности которого при переносе на бумагу утрачиваются;

- применения информационно-коммуникационных технологий, которые помогают демонстрировать знания в динамике, переходах, развитии, преобразованиях, визуальном и музыкальном сопровождении;

- выстраивания образовательной фактуры урока, где математические знания помогают выстроить его особую выразительную форму и содержательное наполнение. ❑