Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2016 года по математике

Ященко Иван Валерьевич — кандидат физико-математических наук, ФГБНУ «ФИПИ», руководитель федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике

Семёнов Андрей Викторович — кандидат физико-математических наук, ФГБНУ «ФИПИ», заместитель руководителя федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике

Высоцкий Иван Ростиславович — ФГБНУ «ФИПИ», заместитель руководителя федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике, kim@fipi.ru

Ключевые слова: КИМ ЕГЭ по математике, основные результаты ЕГЭ по математике в 2016 г., анализ результатов по группам учебной подготовки, статистические характеристики заданий экзаменационной работы.

Распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р, принятым в соответствии с Указом Президента РФ от 07.05.2012 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», утверждена Концепция развития математического образования в Российской Федерации, определяющая базовые принципы, цели, задачи и основные направления. Согласно Концепции, математическое образование должно, с одной стороны, «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе», с другой — «обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.». Кроме того, «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования».

В число мер по реализации Концепции, принятых Приказом МОН РФ от 03.04.2014 г. № 265, входит «совершенствование системы государственной итоговой аттестации, завершающей освоение основных образовательных программ основного общего и среднего образования по математике, разработка соответствующих контрольных измерительных материалов, обеспечивающих введение различных направлений изучения математики», то есть материалов, предназначенных для различных целевых групп выпускников.

ЕГЭ по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике (2004 г.). Варианты КИМ составлялись на основе кодификаторов элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2016 году ЕГЭ по математике.

В 2016 году ЕГЭ по математике проводился второй раз на двух уровнях. Участник экзамена имел право самостоятельно выбрать любой из уровней, либо оба уровня в зависимости от своих образовательных запросов, а также перспектив продолжения образования. Для поступления в высшие учебные заведения на специальности, где математика является одним из вступительных требований, абитуриент должен был выполнить экзаменационные требования на профильном уровне. Для поступления на специальности, не связанные с математикой, а также для получения аттестата о среднем полном образовании, достаточно выполнения аттестационных требований на базовом уровне. Статистика выбора экзамена в основную волну показала более осмысленный выбор уровня экзамена выпускниками, эффективность модели двухуровневого экзамена. При общем сокращении числа выбравших профильный уровень, существенно выросло (в абсолютных цифрах!) количество получивших 80–100 баллов (2015 г. — менее 12 тыс., 2016 г. — более 17 тыс. выпускников) и 60–100 баллов (2015 г. — менее 118 тыс., 2016 г. — более 127 тыс. выпускников), что говорит о более качественной подготовке школой обучающихся на специальности, где экзамен по математике является профильным.

В 2016 году были установлены минимальные пороги: по математике профильного уровня — 27 тестовых баллов; по математике базового уровня — 7 первичных баллов, соответствующие 3 баллам по пятибалльной шкале.

В 2016 году 100 баллов получили 296 участников экзамена по математике профильного уровня (в 2015 году — 66 участников). Максимальный балл по математике базового уровня (5 баллов по пятибалльной шкале) получили 39,4 % участников экзамена. Высокие баллы по математике базового уровня (4, 5 тестовых баллов) получили 78,9 %.

Единый государственный уровень по математике профильного уровня

В КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня в 2016 г. соблюдена преемственность с КИМ ЕГЭ по математике 2015 г. С целью оптимизации структуры варианта в условиях перехода к двухуровневому экзамену уменьшено на два количество заданий с кратким ответом (с 21 до 19) — в первой части исключено одно задание базового уровня сложности практико-ориентированного содержания, во второй части — задание повышенного уровня сложности геометрического содержания. Все изменения соответствуют действующему ФГОС 2004 года по математике общего образования и отражены в спецификации и демонстрационном варианте ЕГЭ 2016 года.

Работа в 2016 г. состояла из двух частей и содержала 19 заданий, позволяющих участникам экзамена продемонстрировать уровень освоения требований стандарта и готовность к продолжению образования в высших учебных заведениях на специальностях с различными уровнями требований по математике.

Часть 1 содержит 8 заданий (задания 1–8) с кратким числовым ответом, проверяющих наличие практических математических знаний и умений базового уровня.

Часть 2 содержит 11 заданий по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Из них четыре задания (задания 9–12) с кратким ответом и семь заданий (задания 13–19) с развёрнутым ответом.

Задания делятся на три тематических модуля: «Алгебра и начала анализа», «Геометрия» и «Практико-ориентированные задания».

Задания 1, 2, 4 первой части и задания 10 и 17 второй части представляли практико-ориентированный модуль, включая задание на элементы курса теории вероятностей.

Задания 3, 6, 8 первой части, задания 14, 16 второй части — геометрические.

Задания 5, 7 первой части и задания 9, 11, 12, 13, 15, 18 и 19 второй части — это задания разного уровня сложности по алгебре, включая задания на составление математических моделей в виде уравнений или неравенств, а также задания по элементам математического анализа, призванные проверить базовые понятия анализа и умение применять стандартные алгоритмы при решении задач.

В целях эффективного отбора выпускников для продолжения образования в высших учебных заведениях с различными требованиями к уровню математической подготовки задания части 2 работы предназначены для проверки знаний на том уровне требований, которые традиционно предъявляются вузами с профильным экзаменом по математике. Последние три задания части 2 предназначены для конкурсного отбора в наиболее престижные вузы с наиболее высоким конкурсом на специальности с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов. Задания этой части проверяют умения выполнять вычисления и преобразования, решать уравнения и неравенства, выполнять действия с функциями, выполнять действия с геометрическими фигурами, строить и исследовать математические модели, находить путь решения, комбинируя изученные методы и применяя их в изменённой или новой ситуации.

Высокие показатели успешности продемонстрированы при решении первых шести заданий базового уровня — выше 70 %, что свидетельствует о сформированности у экзаменуемых базовых математических компетенций за курс математики основной и средней общеобразовательной школы, необходимых для обучения в вузах на специальностях, не предъявляющих высокие требования к уровню математической подготовки абитуриентов. Это, в частности, подтверждает осознанный выбор уровня экзамена подавляющим большинством участников, эффективность предшествующей экзамену подготовки и итогового повторения. Данные задания проверяли умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни; выполнять действия с геометрическими фигурами; исследовать простейшие математические модели; решать уравнения. Задания этого блока включали в себя следующее предметное содержание: действия с целыми числами; табличное и графическое представление данных — чтение диаграмм и применение математических методов для решения содержательных задач из практики; вычисление площади треугольника, параллелограмма, трапеции; вычисление вероятности события, решение показательных, логарифмических, иррациональных, рациональных уравнений.

Успешность выполнения заданий базового уровня сложности составляет 37–95 %. В целом по сравнению с 2015 годом отмечается существенный прогресс при решении планиметрических задач, что связано с наметившимся общим ростом уровня преподавания геометрии в рамках реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации. Хорошие результаты выполнения заданий базового уровня обусловлены ещё и тем, что в 2016 году сдавали единый государственный экзамен выпускники, которые сдавали ОГЭ по модели с выделением модулей «Алгебра», «Геометрия» и «Реальная математика». По-прежнему, несмотря на рост успешности выполнения заданий базового уровня, значительные трудности вызывают базовые задания по математическому анализу (менее 50 %).

Успешность выполнения заданий повышенного уровня сложности составляет 35–59 %. Наилучшие показатели продемонстрированы при решении уравнений или вычислении значений выражений. Успешность выполнения заданий этого блока свидетельствует о том, что около трети выпускников хорошо овладели программой по математике основной и старшей школы и готовы к продолжению обучения в высших профессиональных учебных заведениях.

В 2016 году произошёл заметный рост выполнения заданий повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом (ненулевой балл получили свыше половины участников): алгебраического задания 13 — решение тригонометрического уравнения с отбором корней (2015 г. — 27,4 %, 2016 г. — 38,9 %) и практико-ориентированного задания 17 — решение текстовой задачи с экономическим содержанием (2015 г. — 2,3 %, 2016 г. — 13 %). Эти изменения свидетельствуют о качественном обучении математике в старшей школе и более чёткой подготовке школьников к обучению в вузе.

Задание 19 относится к заданиям высокого уровня сложности. Важно отметить высокую успешность в 2016 году выполнения этого задания, проверяющего умение строить и исследовать математические модели, выпускниками сельских школ (20 % выпускников). Очевидно, что в сельских школах особенно заметен прогресс в развитии общематематических навыков, логической культуры. Задание 19 позволяет выпускникам сельских школ продемонстрировать свои навыки и быть конкурентными при поступлении в вузы. Процент получения ненулевых баллов при выполнении данной задачи выше, чем у многих других заданий с кратким ответом.

Успешность выполнения заданий с развёрнутым ответом свидетельствует о том, что более четверти участников экзамена на хорошем уровне владеют программой по математике за курс основной и старшей школы и могут письменно оформить результаты своих рассуждений.

Практико-ориентированные задания базового уровня

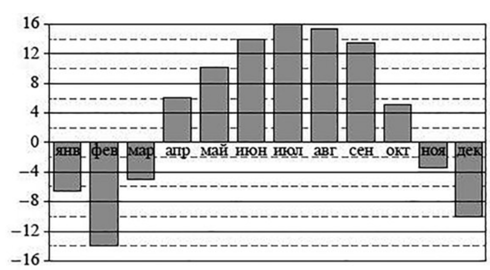
Для заданий базового уровня первой части (1, 2, 4), проверяющих умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, строить и исследовать простейшие математические модели, уровень усвоения достигнут (свыше 50 %). Практико-ориентированные задачи не являются для участников неожиданными, задания такого типа они решали при сдаче основного государственного экзамена в модуле «Реальная математика». Умение решать задания этого модуля являлось обязательным (не менее 2) для прохождения аттестационного рубежа в большинстве регионов Российской Федерации, поэтому такие задания учащиеся решали на уроках математики основной школы. Задания такого типа также включались в учебный материал при изучении математики в старшей школе. Ниже приведён пример задания 1, с которым справились более 88 % экзаменуемых.

Пример 1. Показания счётчика электроэнергии 1 октября составляли 66 412 кВт · ч, а 1 ноября– 66 512 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за октябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 4 руб. 68 коп.? Ответ дайте в рублях.

Выполнение — 89 %. Типичные ошибки связаны, в первую очередь, с неумением читать условие задачи, понимать логику задачи: около 2 % участников умножили показания счётчика в октябре на стоимость 1 кВт · ч электроэнергии, около 1 % умножили показания счётчика в ноябре на стоимость 1 кВт · ч. Допускались также арифметические ошибки, так около 0,5 % участников ошиблись при выполнении вычитания из 66 512 числа 66 412 (получили 10).

Задание 2 проверяло умение читать столбиковые диаграммы. С этим заданием справилось более 90 % участников. Ниже приведён пример такого задания.

Пример 2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1994 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Задание выполнили свыше 90 % участников экзамена. Около 5 % экзаменуемых не заметили в условии «в период с мая по декабрь» и в ответе указали наименьшую температуру за весь период или в ответе дали число 20, что свидетельствует скорее о случайных ошибках в чтении условия задачи, чтении диаграммы.

Задание 4 — задача курса «Теория вероятностей и статистика». Проверялось умение вычислять вероятность события в простейшей ситуации. Ниже приведён пример этого задания.

Пример 3. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 3 прыгуна из Голландии и 4 прыгуна из Колумбии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым будет выступать прыгун из Голландии.

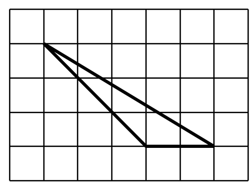
Выполнение — около 75 %. Задания по теории вероятностей по сравнению с 2012 и 2013 годами выполняются значительно лучше, что показывает успешность поэтапного введения важнейшего раздела в школьную программу. Предполагается дальнейшее поэтапное расширение класса задач. Большое количество участников экзамена неверно строят математическую модель — около 10 % участников: разделили 4 на 16 (число спортсменов без спортсменов из Голландии) — около 7 %, и около 3 % поделили число спортсменов из Голландии на 8 (порядок выступления).

Геометрические задания базового уровня

Для заданий базового уровня первой части (3, 6, 8), проверяющих умения выполнять действия с геометрическими фигурами по содержанию курсов «Планиметрия» и «Стереометрия», достигнут уровень усвоения выше 50 %.

В задании 3 проверялось умение вычислять площадь фигуры на клетчатой бумаге. С этой задачей справились около 90 % учеников (аналогичное задание в ОГЭ выполняется менее успешно). Пример такого задания приведён ниже.

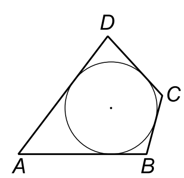
Пример 4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Выполнение — больше 80 %. Основные ошибки участниками были допущены при нахождении длин стороны и высоты треугольника, а также в применении формулы площади треугольника.

Задание 6 на применение свойств описанного четырёхугольника выполнялось менее успешно — около 79 %. Около 5 % участников не дали никакого ответа. Ниже приведён пример такого задания.

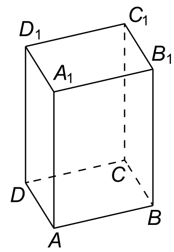
Пример 5. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=22$, $CD=17$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Выполнение — выше 70 %, что свидетельствует, с одной стороны, о росте уровня геометрической подготовки учащихся (по сравнению с 2010 годом, когда задания по геометрии впервые были включены в ЕГЭ как обязательные и имели крайне низкий процент выполнения), с другой стороны, о том, что заметные пробелы в геометрической подготовке сохраняются у значительной части учащихся. При выполнении этого задания было также допущено много вычислительных ошибок. При обучении математике следует обращать особое внимание на развитие геометрической интуиции, умения работать с чертежом, узнавать базовые геометрические конструкции.

Задание 8 на распознавание геометрических фигур (тел) и нахождение объёма части призмы (пирамиды) для участников оказалось достаточно сложным — процент выполнения около 50 %. Ниже приведён пример такого задания.

Пример 6. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1.



Выполнение — около 40 %. Около 5 % не дали никакого ответа. Больше 10 % учеников в ответе указали объём призмы, почти 20 % посчитали, что объём пирамиды составляет половину от объёма призмы. Возможно, понадеялись, что проведена диагональная плоскость. Задание важное, показательное, так как оно проверяет сформированность пространственных представлений. Более половины выпускников продемонстрировали его отсутствие. Разумеется, при отсутствии базовых пространственных представлений сложно ожидать высокого процента выполнения стереометрического задания с полным решением. Следует также отметить, что процент выполнения данного задания существенно ниже, чем, например, формально гораздо более сложного задания с полным решением уравнения и осуществления отбора корней. Это означает, что низкий процент выполнения заданий по стереометрии вызван именно существенными проблемами в преподавании стереометрии, зачастую формальному характеру уроков, уклоном в вычислительные задачи, а в некоторых школах, и существенному перекосу акцентов в сторону алгебры и начал анализа. Следует подчеркнуть важность наличия геометрических знаний для дальнейшего успешного обучения в инженерных вузах. В преподавании геометрии очень важным является не только умение решать вычислительные задачи с геометрическим содержанием (по формулам), но и формирование геометрических представлений о фигурах (телах).

Алгебраические задания базового уровня

Для задания 5 базового уровня первой части, проверяющего умения решать уравнения, выполнение составляет около 90 %, а для задания 7 первой части, проверяющего умения выполнять действия с функциями по курсу математики старшей школы, — около 50 %.

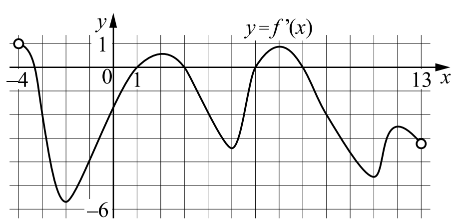
В задании 5 проверялось умение решать простейшее иррациональное, показательное уравнение. Пример такого задания приведён ниже.

Пример 7. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$

Выполнение — около 80 %. Основные ошибки, допущенные участниками, — при выполнении действий с отрицательным показателем степени (около 4 %) и при решении линейного уравнения (около 2 %).

Задание 7 проверяло применение производной к исследованию функции. Пример такого задания приведён ниже.

Пример 8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



Выполнение — около 45 %. Как уже отмечалось, задания на понимание смысла производной выполняют менее половины участников экзамена. Эта величина почти не меняется в течение последних пяти лет. При изучении начал математического анализа следует смещать акцент с формальных вычислений на понимание базовых понятий.

Практико-ориентированные задания повышенного уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания 10 второй части (с кратким ответом) и 17 (с развёрнутым ответом). Задания проверяли умение использовать приобретённые знания и умение в практической деятельности и повседневной жизни.

Задание 10 проверяло умение работать с формулой, находить значения тригонометрических выражений. Пример такого задания приведён ниже.

Пример 9. Груз массой 0,38 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \sin\frac{2\text{À}t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний в секундах, $T = 8$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Выполнение задания — около 40 %. Наибольшая трудность в заданиях такого типа — чтение, понимание условия, применение математических знаний. Около 15 % участников экзамена просто не взялись за эту технически простую задачу. Ситуация характерна для всех экзаменов, начиная с 2010 года. Успешность выполнения таких практико-ориентированных задач имеет слабую положительную динамику, но большое количество не приступивших к его выполнению свидетельствует о наличии определённых проблем в подборе задач при обучении математике в старшей школе.

Задание 17 — задание с развёрнутым ответом, это задание проверяло применение знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, умение строить и исследовать математические модели. Это задание — текстовая задача с экономическим содержанием. Пример такого задания приведён ниже.

Пример 10. 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Ненулевые баллы по этому заданию получило значительное количество участников экзамена — около 13 %. Это очень хороший показатель, что особенно важно с учётом того, что значительная часть специальностей, на которые требуется экзамен по математике, носит практико-ориентированную, в том числе экономическую, направленность.

Геометрические задания повышенного уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания 14 второй части (стереометрия) и 16 (планиметрия) с развёрнутым ответом. Задания проверяли умение выполнять действия с геометрическими фигурами. Оба задания содержали два пункта. В первом пункте — задание доказать, а во втором пункте — вычислить.

Пример 11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью ∟.

Максимальный балл за верное выполнение этого задания — 2 балла, который получили около 5 % участников экзамена, правильно выполнили задание одного из пунктов более 5 %. Наибольшие затруднения участники испытывали при оформлении доказательства. Самая распространённая ошибка заключалась в неверном применении признака перпендикулярности прямой и плоскости. При выполнении второго пункта было допущено большое количество вычислительных ошибок. Низкая успешность выполнения этого задания свидетельствует о несформированности пространственных представлений у выпускников.

Пример 12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Максимальный балл за верное выполнение этого задания — 3 балла, который получили около 1 % участников экзамена, правильно выполнили только пункт *б* задания менее 1 % и получили 2 балла, 1 балл получили более 2 % участников, верно выполнив, или пункт *а*, или пункт *б* с вычислительной ошибкой. Наибольшие затруднения ученики испытывали при оформлении доказательства.

Алгебраические задания повышенного уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания 9, 11, 12 второй части с кратким ответом и задания 13, 15 с развёрнутым ответом.

Задание 9 проверяло умение выполнять преобразования с логарифмами.

Пример 13. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 4}{\log_2 14} + \log_{14} 3{,}5$.

Выполнение — около 60 %. Для заданий, проверяющих умение преобразовывать логарифмические выражения, используя свойства, уровень усвоения достигнут (свыше 50 %).

Задание 11 проверяло умение решать текстовые задачи.

Пример 14. Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты, и добавив 10 л чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 л воды добавили 10 л 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько литров 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Выполнение — около 40 %. Данная задача представляет интерес в свете анализа результатов, поскольку является стандартной задачей на составление уравнений курса алгебры

8-го класса. На протяжении ряда лет доля участников ЕГЭ, верно решающих такие задачи, практически неизменна и чуть выше доли тех, кто решает эти задачи в 8 или 9 классе.

Задание 12 проверяло умение применять производную для исследования функции. Пример такой задачи приведён ниже.

Пример 15. Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+441}$.

Выполнение около 45 %. Успешность выполнения заданий на применение производной к исследованию функции на протяжении многих лет имеет слабую положительную динамику. Наиболее распространённые ошибки — в нахождении производной. Около 20 % участников в ответе записали точку минимума — невнимательное чтение условия задачи привело к потере балла.

Задания повышенного уровня сложности 13 и 15 с развёрнутым ответом, проверяющие умение решать уравнения и неравенства, наиболее успешно решаемы среди заданий с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности. Максимальный балл (2 балла) за задание 13 получают около 40 % участников, а за задание 15 — около 11 %. Примеры заданий приведены ниже.

Пример 16. а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\text{À}}{2};\,0\right]$.

Пример 17. Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$.

Алгебраические задания высокого уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания 18 и 19 второй части с развёрнутым ответом. Максимальный балл (4 балла) получают около 1 % участников. Эти задания предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов. Задания высокого уровня сложности — это задания не на применение одного метода решения, а на комбинацию различных методов. Для успешного выполнения задания 18 необходим, кроме прочных математических знаний, также высокий уровень математической культуры, которая формируется в течение двух лет обучения по программе профильного уровня. Пример задания 18 приведён ниже.

Пример 18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

Для успешного выполнения задания 19 необходимо уметь осуществлять поиск решения, выбирая различные подходы из числа известных, модифицируя изученные методы.

Пример 19. В последовательности a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, состоящей из целых чисел, $a_1=1$, $a_n=235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

На протяжении ряда лет кластерный анализ результатов экзамена позволяет выделить относительно однородные группы выпускников, обладающих примерно одинаковым уровнем подготовки и близкими образовательными запросами. В связи с поставленными задачами индивидуализации математического образования и переходу к мониторингу и определению направлений математической подготовки, анализ выполнения различных групп заданий разными группами учеников представляет растущий интерес.

Качественный состав групп мало изменился по сравнению с предыдущими годами, однако наметилось небольшое улучшение в структуре групп. Краткая характеристика результатов выполнения экзаменационной работы профильного уровня группами выпускников с различным уровнем подготовки дана в табл. 1.

В группу I попадают экзаменуемые, фактически не овладевшие математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающие значительное число ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи. В этом году около 15 % участников попали в эту группу, что ниже аналогичного показателя прошлого года. Снижение численности группы, в первую очередь, связано с тем, что значительная часть слабоуспевающих учащихся выбрала только базовый уровень ЕГЭ.

Группы II и III наиболее массовые, в них входят участники экзамена, успешно освоившие курс математики полной (средней) школы на базовом уровне, но зачастую не имеющие мотивации для более углублённого изучения математики. В частности, выпускники, планирующие продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук, обычно распределяют свои усилия соответствующим образом. Учителям следует обратить большее внимание на эту группу в целях выделения учащихся, не имеющих чётких мотиваций или испытывающих определённые затруднения, которые хотели бы освоить математику на более высоком уровне. Поэтому представляет некоторый интерес выделение в указанной группе подгруппы III «ближайшего резерва».

Численность групп II и III незначительно выросла за счёт сокращения группы I. Значительное число участников экза-

Таблица 1

Краткая характеристика результатов выполнения экзаменационной работы профильного уровня группами выпускников

Описание отдельных групп участников экзамена	Описание уровня подготовки отдельных групп участников экзамена
Группа I (минимальный). Тестовый балл — 0–23	Выпускники, не обладающие математическими умениями на базовом, общественно значимом уровне
Группа II (базовый). Тестовый балл — 27–50	Выпускники, освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям
Группа III (базовый). Тестовый балл — 55–68	Выпускники, успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие шансы на переход в следующую группу по уровню подготовки. Фактически могут быть зачислены на технические специальности большинства вузов
Группа IV (повышенный). Тестовый балл — 70–86	Выпускники, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенного и высокого уровней математической компетентности
Группа V (высокий). Тестовый балл — 88–100	Выпускники, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к уровню математической компетентности

мена из групп II и III сдавали ЕГЭ на базовом и профильном уровнях. Практика 2015 и 2016 годов показала оправданность такого выбора. В частности, психологический комфорт на профильном экзамене повышает результативность решения задач.

Группа IV — это в основном хорошо подготовленные абитуриенты технических вузов. Отметим, что их число меньше количества бюджетных мест по техническим специальностям. Фактически, в последние годы на технические специальности, а также на специальность «учитель математики» зачисляются выпускники из группы «базовый -III».

Группа V — это контингент абитуриентов физико-математических специальностей ведущих университетов, фундаментальных специальностей технических и экономических вузов. Состав этой группы во многом формируется выпускниками специализированных математических школ и классов, осуществляющих традиционно высокий уровень преподавания. Количество часов математики обычно не менее 8. Количественный состав группы в целом соответствует запросам вузов в настоящий момент. Однако распределение участников этой группы по регионам неравномерно, что связано не только с наличием или отсутствием специализированных школ в регионе, но и с особенностями работы органов управления образованием, которые часто не уделяют внимания одарённым учащимся. Требуется развитие системы работы с одарёнными детьми в области математики, особенно в сельской местности, расширение сети математических школ и классов, целевая поддержка педагогов, работающих с одарёнными детьми, развитие дистанционных форм работы и нормативной базы для её практической реализации.

Значительная часть учащихся из групп IV и V выбрала только профильный экзамен.

Выпускники с повышенным и высоким уровнями подготовки освоили базовые требования, проверяемые заданиями первой части, и их ошибки в выполнении заданий не превосходят естественного случайного фона. Данный вывод подтверждается высокими результатами выпускников этих групп и небольшими колебаниями результатов по отдельным заданиям.

Результаты выпускников с базовым уровнем подготовки неоднородны. Отношение результатов по разным заданиям значительно колеблется, причём разрыв увеличивается по мере возрастания сложности заданий.

Как и в прошлые годы имеется значительная разница в результатах подгрупп II и III по заданиям 5–12. Все эти задания, кроме одного-двух, соответствуют материалу 10–11 классов. Подгруппа II усваивает материал курса математики старшей школы значительно хуже, чем подгруппа III. Задание 11 требует составления математической модели по данным текстовой задачи и здесь сильно сказывается разница в общей математической культуре между подгруппами.

В экзамене присутствует алгоритмическое задание 10; оно проверяет компетенцию в области выполнения предложенных, но не заученных алгоритмов. И здесь подгруппа II показывает значительно более низкий результат, чем подгруппа III.

Среди участников ЕГЭ по математике с низким уровнем подготовки характерно разделение между относительно высокими показателями в заданиях 1 и 2 и невысокими или низкими показателями выполнения прочих заданий. По сути, экзаменуемые этой группы более или менее справились только с практико-ориентированными заданиями, т.е. фактически учащиеся этой группы имеют существенные пробелы даже в знании материала основной школы.

Подавляющее большинство участников (более 90 %) экзамена из групп IV и V получили ненулевой балл за выполнение задания 13, в то время как для групп II и III с базовой подготовкой этот показатель — около 20 %. Это подтверждает то, что задание 13, аналогичное типичным заданиям на первых позициях вступительных экзаменов технических вузов, характеризует готовность участников ЕГЭ по математике к продолжению образования в технических и экономических вузах.

Характер выполнения задания 14 (стереометрия) хорошо дифференцирует выпускников групп IV и V: ненулевой балл получили менее 30 % и более 90 % участников соответственно.

Задание 15 (неравенство) по сравнению с геометрическим заданием 14 для участников IV группы оказалось намного легче. Следовательно, даже для выпускников с весьма высоким уровнем подготовки алгебраическая составляющая школьного курса математики доминирует над геометрической. Аналогичная ситуация наблюдалась и в прошлые годы.

В группе V с наиболее высокой подготовкой это явление менее выражено.

В группе экзаменуемых с базовой подготовкой выполнение заданий 14 и 15 составило менее 4 %.

Доминирование подготовки по алгебре над геометрией проявляется у подавляющего большинства участников ЕГЭ.

Наиболее значимая дифференциация участников с высоким уровнем математической подготовки наблюдается при выполнении заданий 16–19.

Единый государственный уровень по математике базового уровня

Содержание работы ЕГЭ 2016 года по математике базового уровня полностью совпадает с содержанием работы 2015 года. Работа построена на традициях российского математического образования, развивает подходы, заложенные в едином государственном экзамене по математике 2010–2015 гг., реализует Концепцию развития математического образования в Российской Федерации. Наличие экзамена по математике на базовом уровне позволяет существенно снизить имитацию образовательной деятельности в области математики, существенно повысить эффективность труда учителя, мотивацию к обучению у учащихся, общественное восприятие математики как социально важного учебного предмета. Согласованность и преемственность уровней экзамена (как показывает статистика) участнику, который готовился к сдаче экзамена базового уровня на полный балл, даёт возможность сдать экзамен профильного уровня на 60 баллов, что позволяет успешно поступить в массовые вузы. При этом в КИМ присутствует большое количество заданий, проверяющих освоение умений применять математические знания в практических ситуациях, и все задания базового уровня сложности.

КИМ ЕГЭ базового уровня по математике содержит 20 заданий базового уровня сложности с кратким ответом, проверяющих освоение базовых умений и навыков применения математических знаний на практике. Содержание и структура работы дают возможность полно проверить комплекс умений и навыков по предмету: использование приобретённых знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни; выполнение вычислений и преобразований; решение уравнений и неравенств; выполнение действий с функциями; выполнение действий с геометрическими фигурами; построение и исследование математической модели.

В работу включены задания по всем основным разделам предметных требований ФК ГОС: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика. Часть заданий имеют выраженную практическую направленность; часть заданий предназначена для проверки логических навыков.

Высокие показатели успешности — выше 80 % — продемонстрированы при решении заданий:

1 (вычислительный пример с дробями) — пример 20;

2 (вычислительный пример со степенями) — пример 21;

3 (простейшая задача на проценты) — пример 22;

4 (вычисление по формуле) — пример 23;

6 (простейшая задача на действия с целыми числами) — пример 24;

8 (геометрическая задача прикладного характера на плоские фигуры) — пример 25;

9 (знание площадей, длин, масс реальных объектов) — пример 26;

11 (чтение диаграмм, графиков) — пример 27;

14 (чтение графика) — пример 28, что свидетельствует о сформированности у экзаменуемых базовых математических компетенций, необходимых для повседневной жизни.

Пример 20. Найдите значение выражения $(1{,}7+2{,}8)\cdot 24$.

Около 12 % участников не дали верного ответа. Ошиблись только в позиции запятой около 5 %.

Пример 21. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(9^{-3}\right)^2}{9^{-8}}$.

Около 11 % участников не дали верного ответа. Ошиблись в применении свойств степеней около 3 %.

Пример 22. Ежемесячная плата за телефон составляет 250 рублей в месяц. В следующем году она увеличится на 4 %. Сколько рублей будет составлять ежемесячная плата за телефон в следующем году?

Около 10 % участников не дали верного ответа. Самые распространённые ошибки — вычислительные.

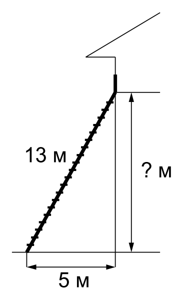
Пример 23. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S=\dfrac{d^2\sin\alpha}{2}$, где d — длина диагонали, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $d=5$ и $\sin\alpha=\dfrac{2}{5}$.

Около 8 % выпускников не дали верного ответа. Самые распространённые ошибки — вычислительные.

Пример 24. В мужском общежитии института в каждой комнате можно поселить не более четырёх человек. Какое наименьшее количество комнат нужно для поселения 81 иногороднего студента?

Около 8 % участников не дали верного ответа. Самые распространённые ошибки — вычислительные. Около 2 % округлили частное с недостатком.

Пример 25. Пожарную лестницу длиной 13 м приставили к окну дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 5 м. На какой высоте находится верхний конец лестницы? Ответ дайте в метрах.



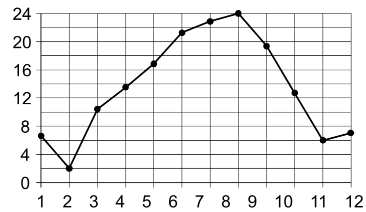
Около 10 % участников не дали верного ответа. Почти 4 % нашли катет как разность гипотенузы и катета. Около 1 % нашли катет как сумму гипотенузы и катета.

Пример 26. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	*ЗНАЧЕНИЯ*
А) масса взрослого кита	*1) 400 мг*
Б) масса таблетки лекарства	*2) 2 кг*
В) масса двухлитрового пакета сока	*3) 120 г*
Г) масса яблока	*4) 130 т*

Практически все справились с этим заданием, однако группа риска — как раз те, кто не смог преодолеть аттестационного рубежа — не справилась (около 5 % участников экзамена не выполнили это задание), что свидетельствует о том, что для этой группы учащихся изучение величин должно проходить с привлечением большого практического материала.

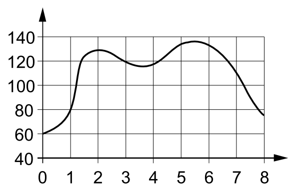
Пример 27. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.



Определите по рисунку, в каком месяце среднемесячная температура в Сочи была наименьшей за данный период. В ответе укажите номер этого месяца.

Успешность выполнения этой задачи — более 95 %.

Пример 28. На графике изображена зависимость частоты пульса гимнаста от времени в течение и после его выступления в вольных упражнениях. На горизонтальной оси отмечено время (в минутах), прошедшее с начала выступления гимнаста, на вертикальной оси — частота пульса (в ударах в минуту).



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику пульса гимнаста на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	*ХАРАКТЕРИСТИКИ*
А) 0–1 мин	*1) частота пульса падала*
Б) 1–2 мин	*2) наибольший рос частоты пульса*
В) 2–3 мин	*3) частота пульса не превышала 100 уд/мин*
Г) 3–4 мин	*4) частота пульса сначала падала, а затем росла*

Выполнение этой задачи — более 95 %.

Пример 29. В классе учится 20 человек, из них 13 человек посещают кружок по истории, а 10 — кружок по математике. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) *Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.*
2) *Не найдётся 11 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.*
3) *Каждый ученик этого класса посещает оба кружка.*
4) *Если ученик из этого класса ходит в кружок по истории, то он обязательно ходит в кружок по математике.*

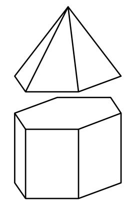
Около 10 % учащихся не выполнили это задание. При этом нашли только одно верное утверждение почти 7 %.

Эти задания проверяли умение выполнять вычисления и преобразования; использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни; выполнять действия с функциями; исследовать простейшие математические модели. Задания включали в себя следующее предметное содержание: действия с целыми, рациональными числами; нахождение процентов от числа; табличное и графическое представление данных — чтение диаграмм и применение математических методов для решения содержательных задач из практики; чтение графика функции. Задания с высоким показателем успешности выполнения относятся к заданиям курса основной школы.

В список задач с высоким показателем успешности не попали задания с предметным содержанием курсов алгебры и начал математического анализа старшей школы и курсов геометрии (стереометрия).

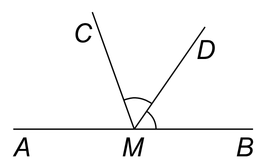
К заданиям по геометрии относятся задания:
13 (около 50 %) — многогранники — пример 30;
15 (около 65 %) — вычисление углов — пример 31;
16 (около 60 %) — вычисление объёма — пример 32.

Пример 30. К правильной шестиугольной призме с ребром основания 1 приклеили правильную шестиугольную пирамиду с ребром основания 1 так, что основания совпали. Сколько граней у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?



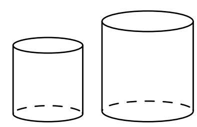
Успешность выполнения этой задачи — около 40 %, что свидетельствуют о достаточно формальном преподавании стереометрии в школе, низком уровне сформированности умения применять полученные знания. При подсчёте числа граней «забыли» про основание почти 20 %. Успешность выполнения такого задания подчёркивает значение преподавания наглядной геометрии для тех, кто не планирует продолжать обучение в технических вузах.

Пример 31. На прямой AB взята точка M. Луч MD — биссектриса угла CMB. Известно, что $\angle DMC = 63°$. Найдите угол CMA. Ответ дайте в градусах.



Успешность выполнения этой задачи — около 80 %. Ошибки в основном связаны с невнимательным прочтением условия: нашли смежный угол с углом DMC почти 3 %, почти 2 % участников смежный угол с углом DMC поделили на 2, очевидно, чтобы учесть слово «биссектриса».

Пример 32. Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 3 и 2, а второго — 8 и 9. Во сколько раз объём второго цилиндра больше объёма первого?



Успешность выполнения этой задачи — около 75 %. Почти 5 % произведение 8 и 9 разделили на произведение 3 и 2. Это задание можно было выполнить, используя справочные материалы (в них содержится формула объёма цилиндра).

Показатели демонстрируют, что геометрические задачи прикладного характера решают более 50 % выпускников.

К вычислительным заданиям относятся задания:
1 (выполнение более 85 %) — арифметические действия с обыкновенными или десятичными дробями;
2 (более 85 %) — действия со степенями;
3 (более 80 %) — простая задача на проценты;
5 (около 80 %) — действия с корнями — пример 33;
6 (более 85 %) — действия с натуральными числами;
12 (более 70 %) — оптимальный выбор в таблице — пример 34;
19 (более 50 %) — делимость — пример 35;
20 (около 40 %) — перебор — пример 36.

Данные свидетельствуют о том, что вычислительными умениями владеют около 70 % участников экзамена.

Пример 33. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

Выполнение — более 80 %, что является очень хорошим результатом.

Пример 34. Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мбайт
План «500»	550 руб. за 500 Мбайт трафика в месяц	2 руб. за 1 Мбайт сверх 500 Мбайт
План «800»	700 руб. за 800 Мбайт трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мбайт сверх 800 Мбайт

Пользователь предполагает, что его трафик составит 600 Мбайт в месяц, и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мбайт?

Выполнение — более 60 %, что является очень хорошим результатом.

Пример 35. Вычеркните в числе 53164018 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите какое-нибудь одно получившееся число.

Выполнение более 45 % — очень хороший результат.

Пример 36. Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Выполнение — более 45 %, что является очень хорошим результатом.

К заданиям по алгебре и началам математического анализа относятся задания: 7 (около 50 %) — решение логарифмического уравнения — пример 37, 14 (более 90 %) — чтение свойств функции по графику, 17 (около 50 %) — решение неравенств — пример 38. Успешность выполнения заданий по алгебре и началам математического анализа свидетельствует о том, что подавляющая часть участников экзамена освоила базовые математические компетенции, но в полном объёме все разделы программы старшей школы освоили менее половины участников экзамена базового уровня.

Пример 37. Найдите корень уравнения $\log_2(-5x+3)=-1$.

Около половины участников экзамена не выполнили это задание.

Пример 38. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

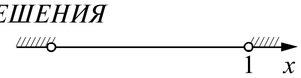
НЕРАВЕНСТВА

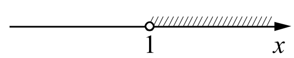
А) $\log_2 x > 0$

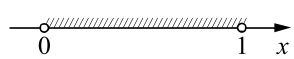
Б) $\frac{x}{x-1} < 0$

В) $\frac{1}{x(x-1)} > 0$

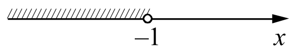
РЕШЕНИЯ

1) 

2) 

3) 

Г) $2^{-x} > 2$

4) 

Около половины участников экзамена не выполнили это задание.

Задание 10 относится к курсу «Вероятность и статистика». Пример такого задание приведён ниже.

Пример 39. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 6 спортсменов из Великобритании, 3 спортсмена из Франции, 6 спортсменов из Германии и 10 — из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Франции.

Выполнение — около 80 %, что является очень хорошим результатом для задания по курсу «Теория вероятностей и статистика», показателем успешности введения элементов статистики и вероятности и подтверждением доступности основных идей этого курса на базовом уровне.

Задание 18 проверяет умение решать простейшие логические задачи. Пример такого задание приведён ниже.

Пример 40. В классе учится 20 человек, из них 13 человек посещают кружок по истории, а 10 — кружок по математике. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Найдутся хотя бы двое из этого класса, кто посещает оба кружка.

2) Не найдётся 11 человек из этого класса, которые посещают оба кружка.

3) Каждый ученик этого класса посещает оба кружка.

4) Если ученик из этого класса ходит в кружок по истории, то он обязательно ходит в кружок по математике.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

С заданием справились более 80 % учеников, что показывает сформированность у выпускников умения решать базовые логические задачи на реальные ситуации, используя полученные знания и здравый смысл.

Краткая характеристика результатов выполнения экзаменационной работы базового уровня группами выпускников с различным уровнем подготовки дана в табл. 2.

Таблица 2

Краткая характеристика выполнения экзаменационной работы базового уровня группами выпускников

Описание отдельных групп участников экзамена	Описание уровня подготовки отдельных групп участников экзамена
Группа 1 (минимальный). Первичный балл — менее 7 (отметка «2» по пятибалльной шкале)	Выпускники (4,7 % от всех участников), не обладающие математическими умениями на базовом, общественно значимом уровне
Группа 2 (базовый). Первичный балл — 7–11 (отметка «3» по пятибалльной шкале)	Выпускники (16,4 % от всех участников), освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям

Таблица 2 (окончание)

Описание отдельных групп участников экзамена	Описание уровня подготовки отдельных групп участников экзамена
Группа 3 (базовый). Первичный балл — 12–16 (отметка «4» по пятибалльной шкале)	Выпускники (39,5 % от всех участников), успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие шансы на переход в следующую группу по уровню подготовки
Группа 4 (повышенный) Первичный балл — 17–20 (отметка «5» по пятибалльной шкале)	Выпускники (39,4 % от всех участников), освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования в вузах с нетехнической специализацией

Группу I составляют экзаменуемые, фактически не овладевшие практическими математическими компетенциями и допускающие значительное число ошибок в вычислениях и при чтении условия. В этом году около 4,7 % участников экзамена базового уровня попали в эту групп у. Самый высокий процент успешности выполнения заданий участники экзамена этой группы продемонстрировали при решении задачи 12 (на действия с числами, данными в таблице) и задачи 11 (на чтение диаграмм, графиков). Геометрические задания выполнила незначительная часть учеников В основном участники экзамена этой группы решали задания прикладного характера. Анализ показал, что программа по математике даже основной школы не усвоена. Учащиеся с таким уровнем математической подготовки должны обучаться по специальным программам компенсирующего обучения.

Группы II и III наиболее массовые, в них входят выпускники, хорошо освоившие курс математики основной школы на базовом уровне. Успешность выполнения заданий основной школы участниками экзамена этих групп превышает 50 %. Задания по геометрии участниками обеих групп решаются с меньшей успешностью. Задания курса математики старшей школы успешно решаются на понятийном уровне. Ученики этих групп могут претендовать на продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук.

Учителям следует обратить большее внимание на эту группу в целях выделения учащихся, не имеющих чётких мотиваций или испытывающих определённые затруднения, которые хотели бы освоить математику на более высоком уровне. Поэтому представляет интерес выделение в указанной группе подгруппы III «ближайшего резерва». Следует отметить, что участники экзамена этой группы могут рассчитывать на успешное преодоление аттестационного порога и на профильном уровне.

Группа IV — это в основном абитуриенты нетехнических вузов. Успешность выполнения заданий участниками экзамена этой группы высокая — более 80 %. Большая часть этой группы — выпускники, которые сдавали экзамен и на базовом, и на профильном уровнях, поэтому в этом году в этой группе оказались ещё и абитуриенты технических вузов. Участники этой группы могут рассчитывать на успешную сдачу экзамена профильного уровня на баллы, достаточные для поступления и дальнейшего обучения в технических вузах.

Значительная часть выпускников в 2016 году сознательно выбрала только базовый экзамен и успешно его сдала, что позволило существенно снизить количество выпускников, не освоивших даже базовые математические компетенции.

Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ профильного уровня 2016 г. по математике показывает, что использованные КИМ в целом соответствуют целям и задачам проведения экзамена, позволяют дифференцировать выпускников с различной мотивацией и уровнем подготовки по ключевым разделам курса математики на базовом и профильном уровне.

Тем не менее, выделение в рамках ЕГЭ двух уровней позволило значительной части учителей верно ориентировать своих учащихся, скорректировать программы подготовки к экзамену, опираясь на индивидуальные образовательные запросы. Обучающимся, не планирующим продолжение математического образования, базовый экзамен позволил более точно спланировать предэкзаменационную подготовку.

Всё большая часть учащихся старших классов предъявляет к своему образованию утилитарные требования, определяет круг предметов повышенного внимания, а также предметы, «ненужные» с точки зрения дальнейшей учёбы. В условиях противоречий, возникающих по этой причине, наличие двух уровней в ЕГЭ по математике предоставляет и учителю, и учащемуся, и его родителям альтернативу, которой они не имели в предыдущие годы.

Наличие базового ЕГЭ по математике позволит разрешить накопившиеся противоречия между целями и стратегией школ и различных групп обучающихся лишь частично.

Основной проблемой математического образования, как и в прошлые годы, остаётся низкая мотивация учащихся к приобретению математических знаний, которая связана с общественной недооценкой значимости математического образования, а также с избыточным единством программных требований и отсутствием конкурентной образовательной среды.

К окончанию 9 класса значительная часть учащихся по сформированности учебных компетенций остаётся на уровне 5—7 классов. До половины выпускников основной школы не готовы к дальнейшему обучению математике в старшей школе по стандартной программе.

Ключевой проблемой качества школьного математического образования остаётся неэффективность использования учебных часов. При жёстком администрировании прохождения программы по математике теряется индивидуализация обучения. Если учебный материал не усвоен учащимся, то от учителя требуется применение адекватных мер: корректировка глубины изучения, система тренировочных упражнений.

Итоги ЕГЭ 2016 года выявляют ключевые проблемы, определяющие недостаточное количество выпускников с уровнем подготовки, достаточным для успешного продолжения образования в профильных вузах:

- несформированность базовой логической культуры;
- недостаточные геометрические знания, графическая культура;
- неумение проводить анализ условия, искать пути решения, применять известные алгоритмы в изменённой ситуации;
- неразвитость регулятивных умений: находить и исправлять собственные ошибки.

Указанные проблемы вызваны, помимо недостатка внутренней мотивации, системными недостатками в преподавании:

- отсутствие системы выявления и ликвидации пробелов в осваиваемых математических компетенциях, начиная с 6 класса;
- отсутствие системной поддержки углублённого математического образования в 8—11 классах;
- отсутствие действительного разделения обучения математике на базовое и профильное в 10—11 классах, что провоцирует низкую эффективность уроков;
- отсутствие во многих регионах системной работы по развитию математического таланта учащихся.

При обучении математике необходимо выстроить систему изучения практической, жизненно важной математики во все школьные годы. Сюда входят элементы финансовой и статистической грамотности, умение принимать решения на основе расчётов, навыки самоконтроля с помощью оценки возможных значений физических величин на основе жизненного опыта и изучения предметов курса естествознания.

Органам управления образования, администрациям образовательных организаций, учителям необходимо усилить разъяснительную работу среди учащихся и родителей, направляя и поощряя их сознательный выбор требуемого и необходимого уровня математического образования и уровня итоговой аттестации.

При организации преподавания математики в основной и средней (полной) общей школе приобретают ещё большую актуальность следующие меры:

1. Выделение направлений математической подготовки:

- математика, необходимая для успешной жизни в современном обществе;

- математика, необходимая для прикладного использования в дальнейшей учёбе и профессиональной деятельности;
- математика как подготовка к творческой работе в математике и других научных областях.

2. Для каждого направления необходимо определить меры по реализации содержания образования на базе ФГОС и примерных образовательных программ, в частности — актуализированное общедоступными базами учебных и контрольных заданий.

3. Требуется дальнейшее увеличение доли геометрии, статистики, теории вероятностей и логики в преподавании математики.

4. Для эффективной реализации программы уровневого обучения необходим мониторинг индивидуальных учебных траекторий школьников начиная с первого года обучения.

5. Необходимо внедрение механизмов компенсирующего математического образования как в виде очных занятий, так и через сеть интернет-курсов, позволяющих своевременно ликвидировать пробелы, незнание.

6. Необходимо внедрение эффективных механизмов текущего и рубежного контроля — на школьном, региональном и федеральном уровнях.

7. Для учащихся, достигших базового уровня и не претендующих на достижение профильного уровня и выполнение экзаменационной работы профильного уровня, на ступени старшей школы должна быть предусмотрена возможность развивающего обучения математике.

8. Для учащихся, не достигших базового уровня математической подготовки к окончанию основной школы, дальнейшее математическое образование на старшей ступени средней школы должно проводиться по специально разработанным интенсивным программам, направленным на освоение базовых математических умений, и позволяющим подготовиться к итоговой аттестации на базовом уровне. Система внутреннего промежуточного контроля и итоговой аттестации по математике должна быть нацелена не на оценку абсолютной подготовки учащегося, а на оценку результата освоения математики учащимся с учётом выбранного направления математической подготовки.

9. Необходимо заменить «принцип прохождения программы» качественным усвоением знаний и умений на выбранном направлении подготовки.

10. Для организации повторения следует использовать для работы на уроке комплекты материалов для подготовки учащихся к итоговой аттестации.

Рекомендации по работе с учащимися, планирующими выполнение экзаменационной работы на профильном уровне

Для учащихся группы III, которые могут успешно освоить курс математики средней (полной) школы на базовом уровне, образовательный акцент должен быть сделан на полное изучение традиционных курсов алгебры и начал анализа и геометрии на базовом уровне. Помимо заданий базового уровня в образовательном процессе необходимо использовать задания повышенного уровня. Количество часов математики должно быть не менее 5 часов в неделю.

Для учащихся группы IV, которые могут успешно освоить курс математики полной (средней) школы на профильном (повышенном) уровне, образовательный акцент стоит сделать на полном изучении традиционных курсов алгебры и начал анализа и геометрии на профильном уровне. Количество часов математики должно быть не менее 6–7 часов в неделю.

Группа V. Количество часов математики обычно не менее 7–8 часов в неделю.

В первую очередь требуется выработать у обучающихся быстрое и правильное выполнение заданий части 1, используя, в том числе, и банк заданий экзамена базового уровня. Умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня, должны быть под постоянным контролем.

Задания с кратким ответом (повышенного уровня) части 2 должны находить отражение в содержании математического образования, и аналогичные задания надо включать в систему текущего и рубежного контроля.

В записи решений к заданиям с развёрнутым ответом особое внимание следует обращать на построение чертежей и рисунков, лаконичность пояснений, доказательность рассуждений.

Рекомендации по работе с учащимися, планирующими выполнение экзаменационной работы на базовом уровне

Для учащихся групп I и II, слабо овладевших или фактически не овладевших математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающих значительное число ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи, образовательный акцент необходимо сделать на формировании базовых математических компетентностей. В этой группе учебный материал старшей школы может изучаться обзорно. Дополнительно потребуется не менее 2–3 часов в неделю для ликвидации проблем в базовых предметных компетенциях. Общее количество часов математики — не менее 5 часов в неделю.

Для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся этой категории следует различными диагностическими процедурами выявить 9—12 заданий экзамена базового уровня, которые школьники могут выполнить, возможно, с ошибками, и в процессе обучения добиться уверенного выполнения данных заданий. Расширять круг этих заданий следует поэтапно.

Эта работа может быть организована для различных групп учеников одного класса на разных уровнях в урочной и внеурочной работе.

В обучении учащихся, имеющих значительные пробелы в знаниях и слабые вычислительные навыки, программа обучения должна быть компенсирующей.

Для учащихся, которые имеют достаточно высокий уровень подготовки, но не планируют сдачу экзамена профильного уровня при подготовке к экзамену базового уровня, следует делать больший акцент на решение задач 18—20 с целью развития мышления, а также уделить внимание формированию представления об общекультурной роли математики, развитию наглядных геометрических представлений.

Стоит обратить особое внимание на выбор уровня экзамена, рекомендуя выпускникам, которые неуверенно решают 6 заданий с кратким ответом, сдачу экзамена на базовом уровне вместо профильного, а тем, кто решает 6—10 заданий, — сдачу экзамена базового уровня наряду с профильным.

При подготовке, с учётом увеличения числа заданий с полным решением, следует обратить дополнительное внимание на эти задания. В частности, для учащихся с не очень высоким уровнем подготовки необходимо рекомендовать обратить особое внимание на задание 13 и первые пункты заданий 14, 16 и 19.

Изменений в структуре КИМ ЕГЭ базового и профильного уровней в 2017 году не планируется.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что главной основой успешной сдачи экзамена по математике является качественное системное изучение математики, отсутствие пробелов в базовых математических знаниях.

Важно помнить, что, как и написано на сайте ФИПИ, «при ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2017 г. следует иметь в виду, задания, включённые в него, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2017 г. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2017 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2017 г. по математике».

Типичной ошибкой при подготовке к экзамену является многократное решение демонстрационного варианта, которое создаёт ложное ощущение освоения материала и завышенные ожидания результатов экзамена.

Не надо чрезмерно увлекаться и «прорешиванием вариантов» — полезно провести одно-два тестирования в формате ЕГЭ в октябре—декабре. Затем следует, основываясь на имеющемся уровне знаний, верно определить свои цели на экзамене, правильно выбрать уровень сдачи (базовый, профильный, или оба уровня) и спланировать стратегию итогового повторения. Её следует организовывать тематически, обязательно уделяя внимание регулярным тренингам по базовым математическим навыкам (арифметические действия, поиск ошибок в выкладках, умение читать условия задачи). Ведь очень обидно, решив сложные задачи, потерять баллы на самых простых первых задачах. А это происходит каждый год у 25 % участников экзамена.

Наличие в ЕГЭ по математике практических задач, с которыми каждый из нас встречается в реальной жизни, делает процесс итогового повторения нужным, понятным и интересным для каждого выпускника. Ведь окружающий нас мир, полный информации, требует принятия решений, основанных на вычислениях, прикидках и оценках, требует наличия основ логической культуры у каждого современного человека.

При подготовке к экзамену профильного уровня необходимо помнить, что если на тренировке вы решаете менее чем 10 заданий — стоит рассмотреть выбор и базового уровня тоже, это придаст дополнительную психологическую уверенность, позволит более эффективно выстроить подготовку. Отметим, что выпускники, набравшие на базовом экзамене 19 или 20 баллов, уверенно набирали на профильном 50–60 и более баллов.