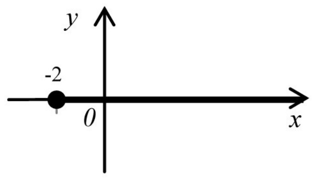
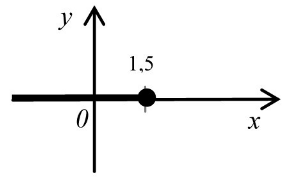
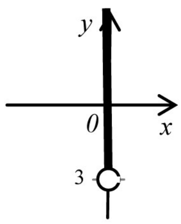
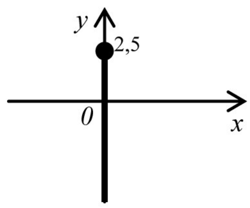
Изучение квадратичной функции

Елена Ивлиева,
старший научный сотрудник Лаборатории малочисленной школы ИСМО РАО

Завершаем публикацию материала «Наглядность при изучении квадратичной функции». Начало статьи опубликовано в двух предыдущих выпусках журнала.

Примерные задания к разделу «Чётность и нечётность квадратичной функции»

а) Прочтите и запишите выделенные промежутки на координатных осях:

	
Ответ:	*Ответ:*
	
Ответ:	*Ответ:*

б) Изобразите на указанной координатной оси промежуток:

$[4; +\infty)$ на оси ОХ $(-\infty; -3)$ на оси ОХ
$[-2; +\infty)$ на оси ОУ $(-\infty; -1)$ на оси ОУ

в) Найдите область значений квадратичной функции: $y = 3x^2 + 2x - 1$.

Правило.
Чтобы найти *область значений* квадратичной функции, надо:
1) найти значение $x_b = \frac{b}{2a}$ по коэффициентам a и b,
2) найти значение $y_B = y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$;
3) определить знак коэффициента a;
4) записать область значений квадратичной функции:
а) если, $a > 0$, то — $[y_B; +\infty)$;
б) если $a < 0$, то — $(-\infty; y_B]$

г) Найдите нули квадратичной функции: $y = 3x^2 + 2x - 1$

Правило.
Чтобы найти ***нули квадратичной функции*** $y = ax^2 + bx + c$, надо:
1) составить и решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$;
2) выписать корни (x_1 и x_2, или $x_1 = x_2$), значения которых являются нулями функции

д) Найдите промежутки знакопостоянства квадратичной функции: $y = 3x^2 + 2x - 1$

Правило.
Чтобы найти промежутки знакопостоянства квадратичной функции, надо:
1) составить неравенство:
а) $y > 0$ ($ax^2 + bx + c > 0$) или $y \geq 0$ ($ax^2 + bx + c \geq 0$);
б) $y < 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) или $y \leq 0$ ($ax^2 + bx + c \leq 0$);
2) решить неравенство;
3) записать ответ в виде числового промежутка или промежутков

е) Заполните пропуски и опишите свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$:

1. Область определения функции — ________________________________.
2. Область значений функции — ____________________________________ .
3. Нули функции $x = 0$, y = ______.
4. Парабола проходит через точку с координатами (____ ; ___), иначе через начало _________________________.
5. В промежутке __________________ функция *убывает*, а в промежутке _______________ — *возрастает.*
6. Если $x \neq 0$, то y ____ 0. График функции расположен в ________________ полуплоскости.
7. Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. Для значений — x и x из области определения функции, значения функции
$a(-x)^2$ _____ $a(x)^2$. Значит, функция $y = ax^2$ — ______________ функция.

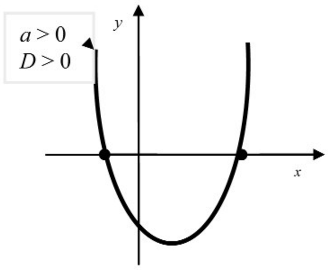
Решение квадратных неравенств

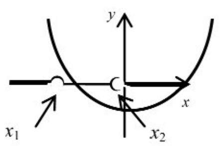
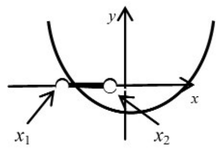
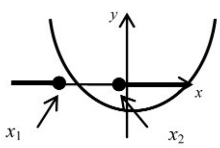
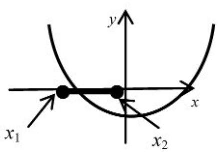
Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (*или* $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) называется **квадратным неравенством**.

Квадратные неравенства можно решать двумя способами. *Один* способ — это метод интервалов, который годится для решения многих неравенств, в том числе и квадратных. *Второй* способ, с помощью схематического графика квадратичной функции, более наглядный, не требующий сложных вычислений.

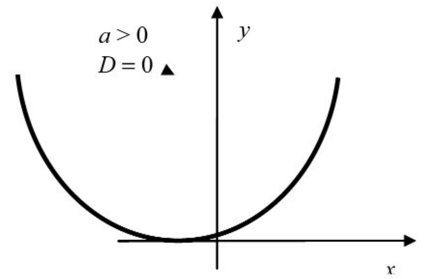
Рассмотрим таблицу, в которой приведены возможные решения квадратных неравенств.

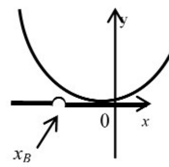
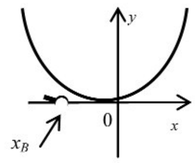
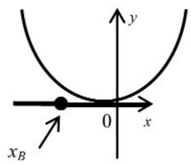
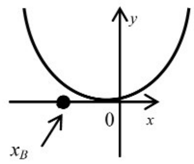
1-й случай



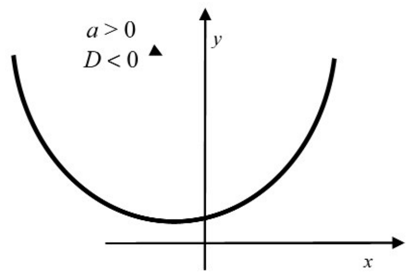
Неравенство (строгое) $ax^2 + bx + c > 0$			Неравенство (строгое) $ax^2 + bx + c < 0$
Решение	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	*Решение*
Неравенство (нестрогое) $ax^2 + bx + c \geq 0$			Неравенство (нестрогое) $ax^2 + bx + c \leq 0$
Решение	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	*Решение*

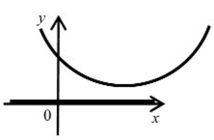
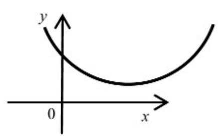
2-й случай

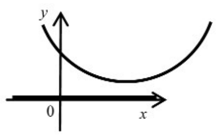
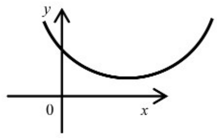


Неравенство (строгое) $ax^2 + bx + c > 0$			Неравенство (строгое) $ax^2 + bx + c < 0$
Решение	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	Нет решений	*Решение*
Неравенство (нестрогое) $ax^2 + bx + c \geq 0$			Неравенство (нестрогое) $ax^2 + bx + c \leq 0$
Решение	$(-\infty; +\infty)$	$x_В$	*Решение*

3-й случай



Неравенство (строгое) $ax^2 + bx + c > 0$			Неравенство (строгое) $ax^2 + bx + c < 0$
Решение	$(-\infty; +\infty)$	Нет решений	*Решение*

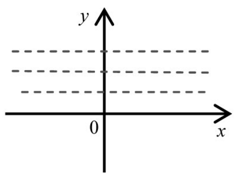
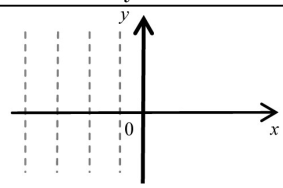
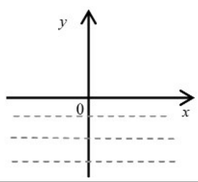
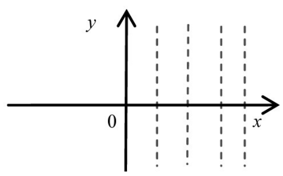
Неравенство (нестрогое) $ax^2 + bx + c \geq 0$			Неравенство (нестрогое) $ax^2 + bx + c \leq 0$
Решение	$(-\infty; +\infty)$	Нет решений	*Решение*

Замечание. Для случая, если $a < 0$ можно предложить учащимся составить аналогичные таблицы самостоятельно или сделать частичные заготовки подобных таблиц и заполнить их вместе, что зависит от задач работы учителя.

Примерные задания:

1. Значения квадратичной функции. Местоположения точки параболы

1. Опишите координаты точек в полуплоскостях, используя знак <, >.

а) Заполните пропуск в записи условия для абсцисс и ординат точек, находящихся в верхней полуплоскости	в) Заполните пропус в записи условия для абсцисс и ординат точек, находящихся в левой полуплоскости
	
$\begin{cases} x \cdot \text{любое} \\ y \cdot \end{cases}$	$\begin{cases} x \\ y \cdot \text{любое} \end{cases}$
б) Заполните пропуск в записи условия для абсцисс и ординат точек, находящихся в нижней полуплоскости	г) Заполните пропусак в записи условия для абсцисс и ординат точек, находящихся в правой полуплоскости
	
$\begin{cases} x \cdot \text{любое} \\ y \end{cases}$	$\begin{cases} x \\ y \cdot \text{любое} \end{cases}$

Замечание. Подобные задания можно поставить для описания точек по четвёртям координатной плоскости.

2. Какими могут быть значения функции?

1)	Изобразите на координатной плоскости следующие точки A(0; 2), B(1; 4), C(−2; 3), E(−5; 1). Что общего в расположении этих точек? В чём различие в их расположении?
2)	Изобразите на координатной плоскости точки, соответствующие данным условиям: 1) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$
3)	Изобразите в нижней полуплоскости несколько точек. Опишите их координаты в общем виде с помощью неравенств

3. Какое из указанных значений данной квадратичной функции $y(x) = x^2 - x - 6$ является положительным числом?

1) $y(2)$; 2) $y(-2)$; 3) $y(-4)$.

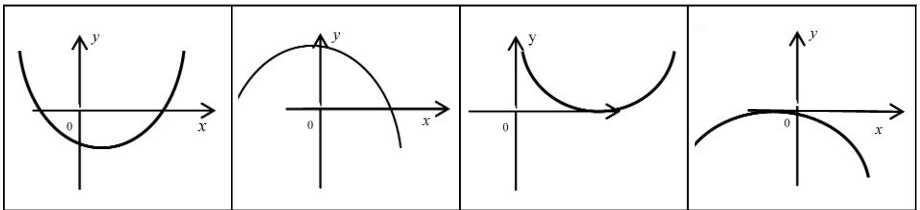
В какой полуплоскости лежит эта точка?

4. Определите, для каких из указанных значений абсцисс ординаты квадратичной функции $y = 3x^2 - x - 8$ будут отрицательные:

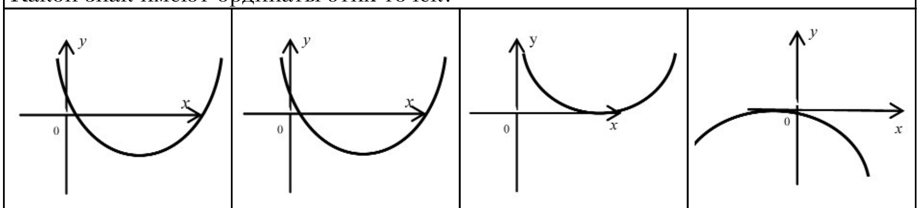
1) $x = -\frac{1}{2}$; 2) $x = 0$; 3) $x = 3$?

В какой полуплоскости лежит эта точка?

5. Расположение точек параболы в полуплоскостях координатной плоскости



На рисунке выделите точки параболы, которые находятся в верхней полуплоскости. Какой знак имеют ординаты этих точек?



На рисунке выделите точки параболы, которые находятся в нижней полуплоскости. Какой знак имеют ординаты этих точек?

2. Разные способы решения квадратных неравенств

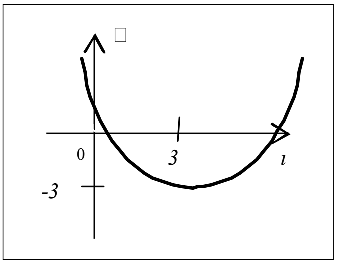
1. Для каждого неравенства укажите множество его решений:

А) $x^2 + 1 > 0$; Б) $x^2 - 1 > 0$; В) $x^2 + 1 < 0$;

1) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$, 2) $(-\infty; +\infty)$, 3) $(-1; 1)$.

А	Б	В

2. На рисунке изображена парабола $y = x^2 - 3x$. Используя данный график, решите неравенство $x^2 < 3x$.



3. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 7x + 12 < 0$?

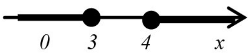


Рис. 1.

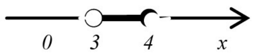


Рис. 3.

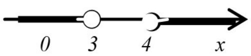


Рис. 2.

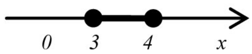


Рис. 4.

4. Решите квадратное неравенство методом интервалов:

1. $(x - 2)(x - 4) > 0$;
2. $-x^2 - x \leq 0$;
3. $4x^2 - x - 5$ і 0.

Представленные материалы могут быть использованы учителем при подготовке к урокам, организации самостоятельной работы учащихся для формирования устойчивых представлений, знаний и умений о квадратичной функции, её свойствах и графике. Учитель может вносить изменения в предлагаемые материалы и приспосабливать их к работе с учащимися конкретного класса. Материалы могут оказать помощь учащимся, которые пропустили занятия, имеют пробелы в данном учебном материале, а также при подготовке к экзаменам.