

РЕСУРСЫ

Деятельностно–ценностные задачи

Цикл задач о подобии произвольных фигур

В.А. Кожевникова

Имя задачи: Задача о листьях

Автор: Кожевникова В.А., учитель математики школы-интерната № 29 ОАО «РЖД» г. Уссурийска.

Предмет: Математика.

Класс: 8–9.

Тема: Отношение площадей подобных фигур.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Общий.

Текст задачи. В начале лета от корней деревьев появляется молодая поросль. Вы наверняка замечали, что её листья гораздо крупнее по сравнению с листьями родительского дерева. Это так называемые теневые листья — листья растений, выросшие при недостатке света. Теневые листья возмещают недостаток света размерами своей площади, улавливающей солнечные лучи.

Найдите способ, позволяющий определить, во сколько раз площадь листа поросли больше площади листа родительского дерева.

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите и соберите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.

д) Сравните ваши выводы с культурным образцом.

Возможные информационные источники

Web-сайты:

<http://www.sakhalin.ru/boomerang/Drevesnue/opyty.htm>

<http://bio.1september.ru/2008/02/9.htm>

<http://www.home-edu.ru/user/uatml/00000693/square.htm>

Культурный образец

Перельман Я.И. Занимательная геометрия. 7-е изд., перераб. / Под ред. и с дополнениями Б.А. Кордемского. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950.

Геометрия листьев

Задача. В тени серебристого дерева от его корней разрослась поросль. Сорвите лист и заметьте, как он велик по сравнению с листьями родительского дерева, особенно с теми, что выросли на ярком солнце. Теневые листья возмещают недостаток света размерами своей площади, улавливающей солнечные лучи. Разобраться в этом — задача ботаника. Но и геометр может сказать здесь своё слово: он может определить, во сколько именно раз площадь листа поросли больше площади листа родительского дерева.

Как решили бы вы эту задачу?

Решение. Можно идти двояким путём. Во-первых, определить площадь каждого листа в отдельности и найти их отношение. Измерить же площадь листа можно, покрывая его прозрачной клетчатой бумагой, каждый квадратик которой соответствует, например, 4 кв. мм (листок прозрачной клетчатой бумаги, употребляемой для подобных целей, называется палеткой). Это хотя и вполне правильный, но чересчур кропотливый способ.

Более короткий способ основан на том, что оба листа, различные по величине, имеют всё же одинаковую или почти одинаковую форму: другими словами, — это фигуры, геометрически подобные. Площади таких

фигур, как мы знаем, относятся как квадраты их линейных размеров. Значит, определив, во сколько раз один лист длиннее или шире другого, мы простым возведением этого числа в квадрат узнаем отношение их площадей. Пусть лист поросли имеет в длину 15 см, а лист с ветви дерева — только 4 см; отношение линейных размеров $15/4$, и значит, по площади один больше другого в $225/16$, т.е. в 14 раз. Округляя (так как полной точности здесь быть не может), мы вправе утверждать, что порослевой лист больше древесного по площади примерно в 15 раз.

Имя задачи: Задача о Гулливере.

Автор: Кожевникова В.А., учитель математики школы-интерната № 29 ОАО «РЖД» г. Уссурийска.

Предмет: Математика.

Класс: 8–9.

Тема: Подобие произвольных фигур.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Общий.

Текст задачи. В знаменитом романе «Путешествия Гулливера» ирландского писателя-сатирика, поэта и общественного деятеля Джонатана Свифта (1667–1745) его герой Лемюэль Гулливер совершает путешествие в Лилипутию, где живут очень маленькие люди, и он предстаёт перед ними как человек-гора.

В стране лилипутов английскому футу соответствовал дюйм. Это означает, что все её обитатели и окружавшие их предметы были в 12 раз меньше тех, что окружают нас, по высоте,

толщине и т.д. Вот что поведал главный герой: «Были привезены шестьсот матрасов обыкновенной величины, и в моем доме началась работа: сто пятьдесят штук были сшиты вместе, и так образовался один матрас, подходящий для меня в длину и ширину; четыре таких матраса положили один на другой, но твёрдый пол из гладкого камня, на котором я спал, стал от этого не намного мягче. По такому же расчёту были изготовлены простыни, одеяла и покрывала, достаточно сносные для человека, давно привыкшего к лишениям». «...В последнем пункте условий моего освобождения император постановляет выдавать мне еду и питьё в количестве, достаточном для прокормления 1728 лилипутов». «Спустя некоторое время я спросил у одного моего придворного друга, каким образом была установлена такая точная цифра. На это он ответил...».

Выясните, насколько точны были вычисления математиков из страны Лилипутии.

а) *Выделите ключевые слова для информационного поиска.*

б) *Найдите и соберите необходимую информацию.*

в) *Обсудите и проанализируйте собранную информацию.*

г) *Сделайте выводы.*

д) *Сравните ваши выводы с культурным образцом.*

Возможные информационные источники

Web-сайты:

http://royallib.ru/read/svift_dgonatan/puteshestviya_gullivera.html#34030

Культурный образец

Перельман Я.И. Занимательная геометрия. 7-е изд., перераб. / Под ред. и с дополнениями Б.А. Кордемского. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950.

Геометрия Гулливера

Автор «Путешествия Гулливера» с большой осмотрительностью избегал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лилипутов нашему футу соответствовал дюйм, а в стране великанов, наоборот, дюйму — фут. Другими словами, у лилипутов все люди, все вещи, все произведения природы в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы вроде следующих:

- во сколько раз Гулливер съед за обедом больше, чем лилипут?
- во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лилипутам?
- сколько весило яблоко страны великанов?

Автор «Путешествия» справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лилипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объём его тела меньше в $12 \times 12 \times 12$, т.е. в 1728 раз; следовательно, для насыщения тела Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лилипута.

...Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливеру. Поверхность его тела боль-

РЕСУРСЫ

ше, чем у лилипутов в $12 \times 12 = 144$ раза; во столько же раз больше нужно ему материала, портных и т.п.

...Надобность производить подобные расчёты возникла у Свифта чуть не на каждой странице. И вообще говоря, он выполнял их правильно. Если у Пушкина в «Евгении Онегине», как утверждает поэт, «время расчислено по календарю», то в «Путешествиях» Свифта все размеры согласованы с правилами геометрии. Лишь изредка надлежащий масштаб не выдерживался...

<http://www.nkj.ru/> Портал журнала «Наука и жизнь». 2010. № 3

Н. Карпушина, кандидат педагогических наук

Задачи от Гулливера, или Геометрия подобия в романах Джонатана Свифта

Из воспоминаний Гулливера:

«...по приказанию императора для меня была изготовлена постель. Ко мне были привезены шестьсот матрацев обыкновенной [для лилипутов] величины; сто пятьдесят штук были сшиты вместе, и таким образом образовался один матрац, подходящий для меня в длину и ширину; четыре таких матраца положили один на другой, но, несмотря на это, моя постель была немногим мягче гладкого каменного пола. По такому расчёту были сделаны также простыни, одеяла и покрывала...»

Вычисления показывают: на изготовление матраца для Гулливера требовалось $144 \cdot 4 = 576$ лилипутских матрацев, а не 600, как указал автор (очевидно, «ошибка» продикто-

вана стремлением Свифта упростить расчёты и округлить ответ). Согласимся и с тем, что постель была слишком жёсткой, ведь матрац оказался втрое тоньше, чем полагалось его сделать.

Далее герой сообщает: «...в последнем пункте условий моего освобождения император постановляет выдавать мне еду и питьё в количестве, достаточном для прокормления 1728 лилипутов».

Всё верно: за один приём пищи Гулливер должен был съесть и выпить в $12^3 = 1728$ раз больше лилипута. В книге рассказывается, как проводился этот расчёт: «Спустя некоторое время я спросил у одного моего придворного друга, каким образом была установлена такая точная цифра. На это он ответил, что математики его величества, определив высоту моего роста и найдя, что эта высота находится в таком отношении к высоте лилипута, как двенадцать к единице, пришли к заключению, что объём моего тела равен, по крайней мере, объёму 1728 тел лилипутов, а следовательно, оно требует во столько же раз больше пищи».

Имя задачи: Задача о «палетке».

Автор: Кожевникова В.А., учитель математики школы-интерната № 29 ОАО «РЖД» г. Уссурийска.

Предмет: Математика.

Класс: 8–9.

Тема: Подобие произвольных фигур.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Общий.

Педагогические технологии № 1 2014 г.

Текст задачи. В окружающей нас действительности часто встречаются такие предметы или их изображения, которые бывают сходны по своей форме, но отличаются своими размерами, например отличающиеся размерами фотографии одного и того же лица, карты земной поверхности, планы зданий и т. д. Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. Свойства подобных фигур издавна применяются при составлении географических карт, планов и чертежей, при землемерных работах на местности.

Для практики всегда имели большое значение сравнительно простые и общедоступные методы построения подобных фигур.

Найдите такие методы построения фигур и постройте фигуру, подобную данной, площадь которой в пять раз больше площади исходной фигуры. Обоснуйте своё построение с точки зрения геометрии.

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите и соберите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.
д) Сравните ваши выводы с культурным образцом.

Возможные информационные источники

Web-сайты:

<http://festival.1september.ru/articles/614679/>

<http://oldskola1.narod.ru/Nikitin/0093.htm>

Культурный образец

Глейзер Г.И. История математики в школе: Пособие для учителей / Под ред. В.Н. Молодшего. М.: Просвещение, 1964.

О подобии фигур

Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамсеса II есть стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

...Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорций было создано в Древней Греции в V–IV вв. до н.э. трудами Гиппократы Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и других. Оно изложено в VI книге «Начал» Евклида, начинающейся следующим определением: «Подобные прямолинейные фигуры суть те, которые имеют соответственно равные углы и пропорциональные стороны».

О построении подобных фигур

Свойства подобных фигур издавна применяются на практике при составлении географических карт, планов и чертежей, при землемерных работах на местности (так называемой мензульной съёмке) и т.п.

Для практики всегда имели большое значение сравнительно простые и общедоступные методы построения подобных фигур. Одним из них является «способ палетки», который

РЕСУРСЫ

обычно применяется при копировании рисунков, картин и портретов. Желая сделать копию рисунка, мы накрываем его палеткой (от французского *palette*), т.е. прозрачной пластинкой или бумагой с нанесённой на неё сеткой квадратов. На месте, предназначенном для копии, чертится временная квадратная сетка, которая по окончании работы стирается (рис. 1). Сторона квадрата временной сетки больше, меньше или равна стороне квадрата палеточной сетки в зависимости от того, требуется ли увеличить, уменьшить или оставить рисунок без изменений. Отношение стороны квадрата временной сетки к стороне квадрата палеточной сетки будет коэффициентом подобия.

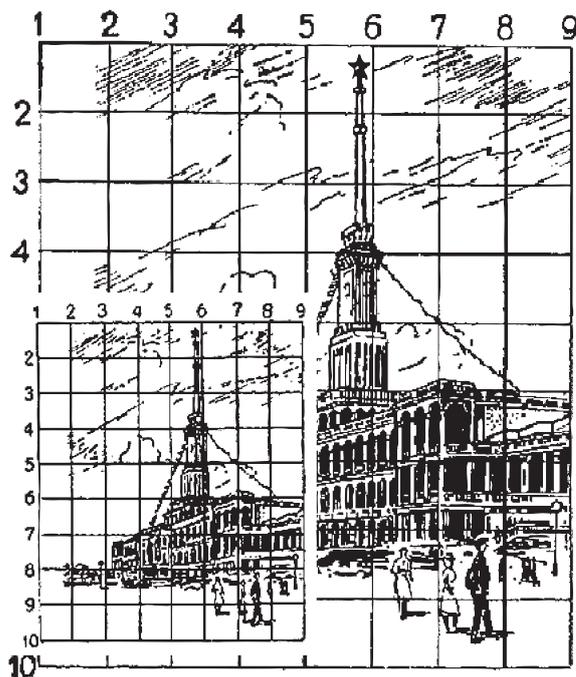


Рис. 1. Метод палетки

Пусть некоторая точка (деталь) рисунка находится в вершине (или в центре) одного из квадратов палеточной сетки. Отмечаем на копии соответствующую точку в вершине (или в центре) соответствующего квадрата временной сетки и т.д. Этот метод копирования при помощи квадратной сетки был известен ещё древним египтянам. Палетку применяют также для вычисления площадей на планах и картах.

<http://www.pyramid-travel.ru/grobnicza-seti-i.html> (фотография, видеоролик)

<http://kolizej.at.ua/photo/abidos/122> (фотографии)

Методический комментарий

Технологическая карта урока с использованием этих трёх деятельностно-ценностных задач

Урок апробирован в рамках педагогического эксперимента в Приморском крае по технологии обучения в глобальном информационном сообществе. Автор является разработчиком деятельностно-ценностных задач по ТОГИС в апреле 2013 года.

Особенность урока — одновременное решение трёх деятельностно-ценностных задач (ДЦЗ) по теме «Подобие произвольных фигур». Задачи «О Гулливере», «О листьях» и «О палетке» направлены на повторение (закрепление) темы «Подобие», изучаемой в курсе геометрии восьмого класса, углубляют знания учащихся по теме «Подобие произвольных фигур», служат для освоения учащимися способов построения подобных фигур, сравнения их площадей и объёмов в жизненной ситуации. Все задачи

имеют метапредметный характер. Решая задачу «О палетке», учащиеся получают знания из области истории математики и Древнего Египта V–IV вв. до н.э. Задача «О Гулливере» построена на основе литературного произведения «Путешествия Гулливера» ирландского писателя Джонатана Свифта и ярко иллюстрирует связь математики с жизнью. Работая над задачами «О листьях», учащиеся расширят свои знания по биологии.

Этап предварительной подготовки урока включает подбор информационных источников (книг, статей, интернет-ссылок, видеороликов), распределение учащихся на группы в целях организации продуктивной групповой работы (рекомендуемое количество учащихся в группах — 4–5 человек).

Цель урока: создание условий для систематизации, обобщения и расширения знаний учащихся по теме «Подобие произвольных фигур», освоения способов построения произвольных подобных фигур, применения свойств подобных фигур в практической деятельности.

Задачи урока: расширить знания учащихся об области применения геометрических свойств предметов в реальных жизненных ситуациях, научить строить произвольные фигуры и обосновывать построения, используя свойства подобия, выявлять межпредметные связи геометрии.

Оборудование: компьютеры с выходом в Интернет, мультимедиа-проектор, чертёжная бумага и инструменты для построений, маркеры.

Ход урока	Методический комментарий
<p>I этап урока — мотивационный Учитель, демонстрируя учащимся видеоряд, предлагает им выдвинуть гипотезы о теме урока. Актуализация знаний происходит в форме беседы, в ходе которой выясняется, что учащимся известно о подобии фигур, какие фигуры рассматривались при изучении темы «Подобие» в 8 классе. После этого, опираясь на представленный видеоряд, учитель с помощью учащихся уточняет тему урока и предлагает для решения три задачи.</p> <p>Выбор задач для каждой группы можно осуществить с помощью жеребьёвки (если группы равносильные в математической подготовке) или распределить задачи с учётом способностей учащихся, входящих в состав каждой группы.</p> <p>II этап урока — решение ДЦ-задачи (далее описана процедура решения ДЦЗ, которая регламентирована технологией ТОГИС, в которой чёткое выполнение указанных шагов является обязательным).</p>	<p>На данном этапе используется проблемная ситуация, которая позволяет активизировать мыследеятельность. Приведение высказываний известных учёных о математике и её значении в мире наук служит дополнительным стимулом для плодотворной работы. В процессе вводной беседы происходит уточнение понятий, акцентируется внимание на свойствах подобных фигур.</p> <p>«Задача о листьях» относится к общему уровню, поскольку в предложенных источниках информации не содержится явный ответ на вопрос задачи. Задача носит практико-ориентированный характер. В ходе решения задачи учащиеся должны получить ответы на следующие вопросы:</p> <ul style="list-style-type: none"> • какими отношениями связаны линейные размеры и площади произвольных фигур; • какие существуют практические способы определения площадей.

РЕСУРСЫ

<ul style="list-style-type: none">• Шаг первый — предъявление задач: задачи предъявляются последовательно каждой группе, после чего группа задаёт уточняющие вопросы по тексту задачи. Задача о листьях Задача «О Гулливере» Задача «О палетке»• Шаг второй — вопросы на уточнение и понимание (до исчерпания вопросов) содержания задачи Учащиеся задают уточняющие вопросы до полного понимания содержания задачи.• Шаг третий — поиск, отбор и систематизация информации. Работая в группах, учащиеся осуществляют поиск информации из различных источников (интернет, справочная литература, статьи, учебники).• Шаг четвертый — анализ информации, подготовка выступления группы (до 20 минут) Каждая группа готовит выступление (в виде, доклада, презентации, рисунка, схемы кластера и прочих форм представления информации).• Шаг пятый — тур слушаний:<ol style="list-style-type: none">1. Каждая группа выступает со своим решением ДЦЗ по очереди.2. После выступления каждой группе задаются вопросы от других групп на уточнение и понимание решения выступавшей группы. В результате обсуждения каждая группа формирует своё отношение к предложенным решениям ДЦЗ.3. Группы предъявляют суждения по поводу увиденного и услышанного в порядке, определённом учителем.• Шаг шестой — предъявление культурного образца (КО). КО предъявляется учителем в устной форме в сопровождении презентации для всех групп одновременно. Распечатанный экземпляр КО раздается в каждую группу. В дополнение учащимся демонстрируются видеоролик «Гробница фараона»• Шаг седьмой — вопросы на уточнение и понимание (до исчерпания вопросов) Учащиеся задают уточняющие вопросы по содержанию КО.• Шаг восьмой — переработка выступлений с учётом культурных образцов	<p>Данная задача может быть использована как на этапе изучения новой информации в 8 классе, так и в целях повторения темы «Подобие произвольных фигур» в курсе 9 класса.</p> <p>Задача «О Гулливере» отнесена к общему уровню, т.к. учащимся предстоит самостоятельно применить знания о подобии фигур в нестандартной ситуации: в художественном тексте найти существенные признаки математических понятий, проанализировать текст и найти ошибки в расчётах писателя.</p> <p>Решая данную задачу, учащиеся получают возможность повторить понятия «пропорциональность», «коэффициент подобия», теоремы об отношении площадей и объёмов подобных фигур.</p> <p>Задача может быть использована на этапе итогового повторения темы «Подобие фигур» в 8–9 классах общеобразовательной школы. Задача «О палетке» носит практико-ориентированный характер. Она отнесена к общему уровню, поскольку учащимся предстоит самостоятельно не только отыскать способы построения произвольных подобных фигур, но и выполнить это построение.</p> <p>В ходе решения задачи учащиеся получают возможность повторить основные понятия темы «Подобие произвольных фигур» курса геометрии 8 класса, познакомятся с общедоступным способом построения подобных фигур на практике.</p> <p>Данная задача может быть использована на этапе итогового повторения курса математики в 8–9 классах общеобразовательной школы.</p> <p>Задачи учителя: инициировать учащихся на поисковую и исследовательскую деятельность; наблюдать за работой групп, консультировать; контролировать время на подготовку конечного выступления группы, т.е. озвучить регламент, а также:</p> <ul style="list-style-type: none">— мотивация учащихся на слушание,— контроль времени выступлений (до 5 минут)— организация и поддержка дискуссии между группами. <p>Далее продемонстрировать КО в наглядной форме (презентация, видео). Латентной задачей учителя на данном этапе является демонстрация способов обработки информации.</p>
---	---

- Шаг девятый — тур слушаний (см. шаг пятый):
 - 1) Каждая группа представляет свои выступления, переработанные с учетом КО, формирует позицию группы относительно глубины ответа на вопрос задачи.
 - 2) Группы предъявляют свои суждения по поводу решения группой задачи.
- Шаг десятый — рефлексия
Учитель предлагает учащимся заполнить таблицу «Мыслеобраз дня» и поделиться впечатлениями о проделанной работе (см. ниже).

После этого инициировать обсуждение услышанного для понимания КО, контролировать времени (выступление группы до 3 минут), организовать рефлексивно-оценочную деятельность учащихся

«Мыслеобраз дня» (рефлексивная карта)

Придумать эпитаф дня	
Выбрать цвет, наиболее соответствующий восприятию этого дня	
Нарисовать символ дня	
Вспомнить «цитату дня» — фразу, высказанную кем-либо из участников урока	
Отметить «изюминки» дня — наиболее ценные с личной точки зрения: мысли, слова, какие-то детали, полезные «мелочи»	
Чем Я могу сегодня гордиться	
О чем Я сейчас сожалею	
Мои общие впечатления	