ВКЛАД КАРЛА ПИРСОНА В РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

В.М. Кадневский,
Т.А. Ширшова

Статья посвящена научным достижениям английского ученого Карла Пирсона и его существенному вкладу в развитие математико-статистических методов. Эти методы нашли применение в качестве важного диагностического инструмента во многих науках, в том числе и в системе педагогических измерений.

• биометрика • коэффициент корреляции Пирсона • кривые Пирсона • распределение Пирсона, критерий согласия Пирсона (критерий хи-квадрат) • корреляционный анализ

Истоки научных основ теории педагогических измерений

Научные основы теории педагогических измерений закладывались на рубеже CIC–CC веков. Теория и практика педагогических измерений, основанные на математико-статистических и тестовых методах, развивались параллельно, по сути, стимулируя и ускоряя взаимное развитие. Тестовые методы первоначально утверждались в психологии, педагогике, системе профессионального отбора. Со временем многие методы были заимствованы и стали широко применяться в медицине, машиностроении, спорте. У истоков нового научного направления оказалось немало выдающихся учёных, внёсших существенный вклад в развитие и становление теории педагогических измерений. Среди них и К. Пирсон (1857–1936), ученый, представляющий британскую научную школу.

Карл Пирсон (Pearson) родился в Лондоне, в семье преуспевающего лондонского адвоката. Образование он получил в престижном Кембриджском университете (бакалавр в 1879 г., бакалавр права в 1881 г., магистр в 1882 г.). Он также изучал физику и другие науки в Гейдельбергском и Берлинском университетах. Свою профессиональную деятельность К. Пирсон начал в Лондонском университете, в должности профессора кафедры прикладной математики и механики (1884–1911). Кроме того, он параллельно в разные годы работал профессором геометрии Грэхэм — Колледжа (1891–1894), с 1903 года по 1933 возглавлял Биометрическую лабораторию, а с 1907 по 1933 год Лабораторию Френсиса Гальтона для изучения проблем национальной евгеники. Работа в Лаборатории Френсиса Гальтона позволила ему в 1911 году получить звание профессора евгеники. В 1896 году К. Пирсон становится членом Королевского Общества. За научные заслуги он был награжден медалью Дарвина в 1898 году, а в 1903 году медалью Хаксли, учреждённую Антропологическим институтом. Кроме того, Карл Пирсон был почетным доктором права Университета имени Св. Эндрю; почетным доктором наук Лондонского университета; почетным членом Кембриджского Королевского колледжа, а также Эдинбургского Королевского общества и Лондонского университетского колледжа.

Научные интересы К. Пирсона были весьма широки. В молодые годы он интересовался проблемами наследственности, евгеники, вопросами биологии и возможностями применения методов статистики для их изучения. К. Пирсон внёс вклад в развитие биологических, поведенческих и общественных наук, а предложенные им методы математической и статистической обработки результатов экспериментов востребованы современной наукой.

Он был плодовитым автором. Достаточно сказать, что только по математической статистике К. Пирсоном было опубликовано свыше 400 научных трудов.

В 1900 году К. Пирсон основал журнал «Биометрика», в котором публиковались материалы, связанные с применением статистических методов в биологии. Хотя К. Пирсон разработал статистический аппарат для биологии, он активно применяется и в других областях знаний, в том числе в психологии и педагогике.

Большое влияние на К. Пирсона оказал Френсис Гальтон (1822–1911). Пирсон был учеником и коллегой Ф. Гальтона. Под влиянием исследований Ф. Гальтона и Дж. Кеттела и полученных научных результатов К. Пирсон начал собственные исследования в области теории тестов[1].

Определение коэффициента линейной корреляции и других измерительных параметров

Именно Карл Пирсон вывел применяемую до сих пор формулу определения коэффициента линейной корреляции, получившую название коэффициента корреляции Пирсона (1896). Таким образом, им были усовершенствованы методы корреляционного, регрессионного и факторного анализа тестов[2]. Коэффициент корреляции Пирсона активно применяется и сегодня для обоснования надежности и валидности тестовых измерений.

К. Пирсон также разработал непараметрический коэффициент хи-квадрат, который широко применяется в психологических и педагогических исследованиях. Таким образом, К. Пирсон внес существенный вклад в развитие мультивариантных статистических методов и использование этих методов в различных научных исследованиях, в том числе педагогических.

Впервые идеи К. Пирсона о корреляции и критерии хи-квадрата были опубликованы в серии из 18 книг (1893–1912) под общим заголовком *Математический вклад в теорию эволюции*[3].

Карла Пирсона в научном сообществе считают одним из основателей математической статистики. И на это есть серьёзные основания. Его научные достижения в этой области впечатляют: это и множество понятий носящих его имя, и формулы, и таблицы, предложенные им. Следует отметить, что ученые из разных отраслей науки до сегодняшнего дня используют статистический аппарат, разработанный К. Пирсоном.

Перечень основных его достижений выглядит следующим образом: стандартное отклонение (1893), метод моментов, смещенный момент произведения (1893–1894), биномиальное распределение (1895),

1 *Кадневский В., Лемиш В., Ширшова Т.* Френсис Гальтон: ученый — энциклопедист, один из первых создателей теории педагогических измерений. Педагогические измерения. 2012. № 1. С. 3–16.

2 *Хлебников В.А.* Краткий обзор развития педагогического тестирования в России. [электронный ресурс]/ В.А. Хлебников //Международный научный педагогический интернет — журнал с библиотекой депозитарием. Режим доступа: http://www.oim.ru/ reader@nomer=571.asp. Загл. с экрана. Рус.

3 http://apd.dn.ua/ pirson-karl.html

коэффициент парной корреляции через момент произведения и метод максимального правдоподобия (1896), стандартная ошибка коэффициента корреляции, парная регрессия (1895), коэффициент частной корреляции (1897), множественная регрессия (1903), коэффициент множественной корреляции (1898), экспоненциальное распределение (1895), подбор функций (1895), гетероскедастичность (1905), гистограмма (1895), метод взвешенных наименьших квадратов (1920), ранговая корреляция (1907), случайные числа (1927), случайные выборки (1900), случайное блуждание (1905), нелинейная регрессия (1900-е годы), скошенность (ассиметрия) (1894), вариация (1905), критерий согласия хи-квадрат (1900), расширение сферы использования теста хи-квадрат для проверки гипотезы о независимости переменных в таблицах сопряженности (1904) и последующая тетрахорическая, бисериальная и полихроническая корреляция (начало 1900-х годов).

Также К. Пирсону мы обязаны употреблением таких понятий и терминов, как коэффициент вариации, стандартное отклонение, стандартная ошибка оценки, скедастичность, коэффициент сопряженности и др. (всего свыше 30 терминов). По его инициативе были подготовлены и изданы *Таблицы для статистиков и биометров*. Всего К. Пирсон опубликовал 650 научных работ, из которых около 400 относятся к математической статистике[4].

К. Пирсон и биометрия

Стоит обратить внимание и на вклад К. Пирсона в биометрию, у истоков которой он стоял. Известно, что впервые ввел в употребление термин «biometry» Ф. Гальтон. Он же разработал и основы корреляционного анализа, положив, таким образом, начало новой науки, однако именно К. Пирсон превратил её в стройную научную дисциплину. Этому в немалой степени способствовало личное знакомство К. Пирсона с Ф. Гальтоном и его работами, состоявшееся в 1889 г.

Большое влияние на Пирсона как ученого оказал также зоолог Ф. Велдон. Помогая Ф. Велдону в анализе полученных данных, К. Пирсон ввел в 1893 году понятие среднего квадратичного отклонения и коэффициента вариации. Далее, применяя математические методы к теории наследственности Ф. Гальтона, К. Пирсон в 1898 году создает основы метода множественной регрессии. В 1903 году он обобщил теорию сопряженности признаков, а в 1905 году были опубликованы

4 *Елисеева И.И., Соколов Я.В.* Карл Пирсон: к 150-летию со дня рождения //Вопросы статистики. 2007. № 11. С. 76–80.

основы нелинейного корреляционного анализа и методы нелинейной регрессии[5]. К. Пирсона считают не только одним из основоположников биометрии, но и фактическим основателем знаменитой школы английских биометров. Вместе с Гальтоном и Велдоном он основал быстро обретший популярность и влияние среди читателей в начале XX века журнал Biometrika. Фактически К. Пирсон был редактором этого журнала до самой своей смерти.

Корреляционный анализ

Трудно переоценить вклад К. Пирсона в создание методакорреляционного анализа. На сегодня он стал одним из самых применяемых статистических методов в педагогике и психологии. Термин «корреляция» впервые применил французский палеонтолог Ж. Кювье, который вывел «закон корреляции частей и органов животных» (этот закон позволяет восстанавливать по найденным частям скелета облик всего животного). В статистику этот термин ввел Ф. Гальтон, но не просто как понятие «связь» — relation, а как понятие «связь» — corelation. Далее это понятие развил до отдельного научного направления, получившего название «корреляционный анализ», ученик Ф. Гальтона — К. Пирсон.

Главная задача корреляционного анализа состоит в проверке гипотез о связи между переменными с использованием коэффициентов корреляции.

Корреляционный анализ для двух случайных величин заключает в себе:
- построение корреляционного поля и составление корреляционной таблицы;
- вычисление выборочных коэффициентов корреляции и корреляционных отношений;
- проверка статистической гипотезы значимости связи[6].

Основная функция корреляционного анализа заключается в установлении связи между двух и более изучаемых случайных величин. Корреляционная связь обладает следующими свойствами: формой, направленностью и силой.

Таким образом, корреляционный анализ позволяет установить направление (положительное или отрицательное), форму (линейная, нелинейная) и тесноту связи между изучаемыми признаками. И на завершающем этапе проверит уровень значимости полученных коэффициентов корреляции.

Наиболее востребованные коэффициенты корреляции

В настоящее время используется несколько коэффициен-

5 *Леонтьев В.П.* Применение статистики в статьях и диссертациях по медицине и биологии. Часть II. История биометрии и ее применения в России //Международный журнал медицинской практики. 1999. Вып. 4. С. 7–19.

6 *Шишлянникова Л.М.* Применение корреляционного анализа в психологии //Психологическая наука и образование. 2009. № 1. С. 98–106.

тов корреляции. Наиболее известные это коэффициент линейной корреляции Пирсона, ранговый коэффициент корреляции Спирмана и коэффициент корреляции Кендалла. Выбор коэффициента корреляции зависит от типа шкал, к которым относятся переменные (табл. 1)[7].

Подробнее остановимся на использовании коэффициента линейной корреляции Пирсона для оценки тесноты связи между двумя признаками. Его применение уместно, если:

1) рассматриваемая связь линейная.

2) обе переменные измерены в реляционной или интервальной шкалах.

Коэффициент линейной корреляции Пирсона вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})\right)^2}},$$

где x_i, y_i — числовые значения рассматриваемых вариант признаков, n — объем выборки.

При малых объемах выборки ($n < 100$) значение коэффициента линейной корреляции Пирсона необходимо корректировать с помощью формулы:

$$r' = r\left(1 + \frac{1 - r^2}{2(n-3)}\right).$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона, как и все выборочные характеристики, является случайной величиной и при повторных измерениях может принимать другие значения.

Таблица 1

Тип шкал		**Меры связи**
Переменная X	Переменная Y	
Интервальная или отношений	Интервальная или отношений	Коэффициент Пирсона
Ранговая, интервальная или отношений	Ранговая, интервальная или отношений	Коэффициент Спирмана
Ранговая	Ранговая	Коэффициент Кендалла
Дихотомическая	Дихотомическая	Коэффициент ассоциации Пирсона, коэффициент четырехклеточной сопряжённости Пирсона
Дихотомическая	Ранговая	Рангово-бисериальный коэффициент
Дихотомическая	Интервальная или отношений	Бисериальная корреляция
Интервальная	Ранговая	Значения интервальной шкалы переводятся в ранги и используется ранговый коэффициент

7 *Попов О.А.* Коэффициент корреляции. Статистика психологии и педагогики. http://psystat.at.ua

Вследствие чего возникает проблема, заключающаяся в проверке значимости выборочного коэффициента корреляции.

Будем считать, что нулевая гипотеза h_0 заключается в отсутствии линейной корреляционной связи между исследуемыми признаками в генеральной совокупности: $\rho = 0$. Альтернативная гипотеза h_1 заключается в том, что генеральный коэффициент корреляции отличен от нуля: $\rho \neq 0$. При ограниченных выборках ($n < 100$) для проверки гипотезы об отсутствии связи между исследуемыми признаками используется преобразование Фишера:

$$u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r'}{1-r'},$$

где r' — скорректированное значение выборочного коэффициента корреляции. Проверка нулевой гипотезы заключается в вычислении значения u и сопоставления его с критическим:

$$u_\alpha(n) = z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}},$$

где $z_{1-\alpha/2}$ квантили нормированного распределения:

$$z_{1-\alpha/2} = 1{,}960(\alpha = 0{,}05)$$

и

$$z_{1-\alpha/2} = 2{,}576(\alpha = 0{,}01),$$

Если эмпирическое значение u попадает в область допустимых значений, то есть если выполняется условие $|u| < u_\alpha(n)$, нулевая гипотеза не отвергается. То есть линейной корреляционной связи между рассматриваемыми признаками нет. Корреляция считается значимой, если эмпирическое значение u попадает в критическую область, то есть $|u| > u_\alpha(n)$.

Границы доверительного интервала для генерального коэффициента корреляции при ограниченном объеме выборки определяют как $r_1 < \rho < r_2$, где r_1 и r_2 находятся из формулы

$$u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r'}{1-r'} \text{ для } u_1 = u - u_\alpha(n)$$

и $u_2 = u + u_\alpha(n) : r = \dfrac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}.$

Пример. По результатам измерения ригидности (X) и времени решения креативной задачи (Y) у 16 испытуемых требуется произвести оценку корреляционной связи. Переменная X измерена в интервальной шкале (в T-баллах), переменная Y — в реляционной (в секундах).

Линейная корреляция

Решение. Выборочные средние арифметические значения находим по результатам первого и второго столбцов:

$$\bar{x} = \frac{719{,}2}{16} = 44{,}95,$$

$$\bar{y} = \frac{260{,}0}{16} = 16{,}25.$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции есть от-

Таблица 2

Расчёт коэффициента линейной корреляции Пирсона

№	Испытуемый	X_i	Y_i	$x_i-\overline{x}$	$y_i-\overline{y}$	$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(y_i-\overline{y})^2$
1	Арбузов	39,3	15,0	–5,65	–1,25	7,0625	31,9225	1,5625
2	Веткин	33,3	13,0	–11,65	–3,25	37,8625	135,7225	10,5625
3	Дунайский	56,6	20,9	11,65	4,65	54,1725	135,7225	21,6225
4	Ёжиков	62,3	19,0	17,35	2,75	47,7125	301,0225	7,5625
5	Зубовский	31,1	13,6	–13,85	–2,65	36,7025	191,8225	7,0225
6	Карпов	36,7	15,0	–8,25	–1,25	10,3125	68,0625	1,5625
7	Лукин	52,9	17,1	7,95	0,85	6,7575	63,2025	0,7225
8	Мороз	32,9	13,5	–12,05	–2,75	33,1375	145,2025	7,5625
9	Носов	35,2	14,2	-9,75	–2,05	19,9875	95,0625	4,2025
10	Орлов	62,8	21,3	17,85	5,05	90,1425	318,6225	25,5025
11	Пригожин	34,2	13,5	–10,75	–2,75	29,5625	115,5625	7,5625
12	Русалин	58,1	17,0	13,15	0,75	9,8625	172,9225	0,5625
13	Сёмченко	29,3	13,0	–15,65	–3,25	50,8625	244,9225	10,5625
14	Ушаков	59,9	18,2	14,95	1,95	29,1525	223,5025	3,8025
15	Федулина	49,0	19,2	4,05	2,95	11,9475	16,4025	8,7025
16	Яблоков	45,6	16,5	0,65	0,25	0,1625	0,4225	0,0625
	Сумма	719,2	260,0			475,4000	2260,1000	119,1400

ношение суммы пятого столбца к квадратному корню из произведения сумм шестого и седьмого столбцов:

$$r=\frac{475{,}40}{\sqrt{2260{,}10\cdot 119{,}14}}=0{,}916.$$

Ввиду оценки корреляции по выборке малого объема необходима поправка:

$$r'=0{,}916\cdot\left(1+\frac{1-0{,}916^2}{2(16-3)}\right)=0{,}922.$$

Проверим значимость коэффициента корреляции. Нулевой гипотезой h_0 является предположение о том, что генеральный коэффициент корреляции равен нулю ($\rho=0$), альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что генеральный коэффициент корреляции отличен от нуля ($\rho\neq 0$).

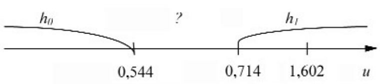
Для проверки нулевой гипотезы находим эмпирическое

значение $u=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+0{,}922}{1-0{,}922}=1{,}602,$

которое сопоставляем с критическими значениями

$$u_{0,05}=\frac{1{,}96}{\sqrt{16-3}}=0{,}544;$$

$$u_{l0,01}=\frac{2{,}576}{\sqrt{16-3}}=0{,}714.$$



Эмпирическое значение попадает в критическую область, так как $|1{,}602| > 0{,}714$, что позволяет отвергнуть нулевую гипотезу. Коэффициент корреляции значимо отличается от нуля ($p < 0{,}01$).

Для построения 95%-го доверительного интервала для генерального коэффициента корреляции находим $u_1 = 1{,}602 - 0{,}544 = 1{,}058$ и $u_2 = 1{,}602 + 0{,}544 = 2{,}146$.

Границы доверительного интервала находим по формулам:

$$r_1 = \frac{e^{2\cdot 1{,}058} - 1}{e^{2\cdot 1{,}058} + 1} = \frac{e^{2{,}116} - 1}{e^{2{,}116} + 1} =$$

$$= \frac{7{,}2979}{9{,}2979} = 0{,}785;$$

$$r_2 = \frac{e^{2\cdot 1{,}46} - 1}{e^{2\cdot 1{,}46} + 1} = \frac{e^{4{,}292} - 1}{e^{4{,}292} + 1} =$$

$$= \frac{72{,}1125}{74{,}1125} = 0{,}973.$$

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о наличии тесной ($|r| > 0{,}75$) прямой ($r > 0$) линейной корреляционной связи между уровнем ригидности испытуемого и временем решения им креативной задачи. Генеральный коэффициент корреляции с вероятностью 95% лежит в интервале $0{,}785 < \rho < 0{,}973$[8].

Хи-квадрат Пирсона

В современной науке и практике находит применение разработанный К. Пирсоном статистический критерий, получивший в честь автора название — хи-квадрат Пирсона. Он является одним из самых востребованных в психолого-педагогических исследованиях. Критерий хи-квадрат применяется в двух целях:

1) для сопоставления эмпирического распределения признака с теоретическим — равномерным, нормальным или каким-либо другим;

2) для сопоставления двух, трех или более эмпирических распределений одного и того же признака.

Критерий хи-квадрат отвечает на вопрос о том, с одинаковой ли частотой встречаются разные значения признаков в эмпирическом и теоретическом распределениях, или в двух и более эмпирических распределениях. Данный метод весьма универсален, применим для статистического анализа распределения численностей разнообразных количественных материалов. Его преимущество состоит в том, что он позволяет сопоставлять распределения признаков, представленных в любой шка-

8

Харченко М.А. Корреляционный анализ: Учеб. пособие. Воронеж. ИПЦ ВГУ, 2008.

ле, начиная от шкалы наименований. В самом простом случае альтернативного распределения «да/нет», «допустил/не допустил», «решил/не решил» и т.п.

Формула, по которой определяется критерий хи-квадрат:

$$x^2 = \sum \frac{(f_э - f_m)^2}{f_m},$$

где $f_э$ — наблюдаемые (эмпирические) численности; f_m — предполагаемые (теоретические) численности. Чаще всего этот критерий используется в двух вариантах:

1) как расчет согласия эмпирического значения и предполагаемого теоретического. В этом случае проверяется гипотеза h_0 об отсутствии различий между теоретическим и эмпирическим распределением;

2) как расчет однородности двух независимых экспериментальных выборок. В этом случае проверяется гипотеза h_0 об отсутствии различий между двумя эмпирическими распределениями.

Критерий хи-квадрат Пирсона может применяться при соблюдении следующих условий:

1. Объем выборки должен быть большим ($n \geq 30$). При меньшем объеме критерий дает приближенные значения. Точность повышается с ростом объема выборки.

2. Теоретическая частота для каждой ячейки таблицы не должна быть меньше пяти.

3. Выбранные разряды должны вычерпывать все распределения, то есть охватывать весь диапазон вариативности признаков. Группировка на разряды должна быть одинаковой во всех сопоставляемых распределениях.

4. Необходимо вносить поправку на непрерывность при сопоставлении распределений признаков, которые принимают два значения.

5. Разряды должны быть непересекающимися. Если наблюдение отнесено к одному разряду, то оно не может быть отнесено к любому другому разряду.

Вычисление критерия хи-квадрата

Техника вычисления критерия хи-квадрата достаточно проста. Продемонстрируем это на конкретном примере, когда сравниваются две выборки, составленные из выпускников двух школ. Из первой школы сдавали экзамен 100 человек, из них 82 успешно сдали экзамен, не сдали — 18. Из второй школы сдавали экзамен 87 человек, выдержали его 44 человека, не сдали — 43. Можно ли утверждать, что подготовленность выпускников этих школ неодинакова?

В выбранном нами примере всего сдавали экзамен 187 человек. Из этого числа на долю 1-й школы приходится 53,5% (100 человек), на долю 2-й школы — 46,5% (87 человек). Можно предположить, что выпускники обеих школ подготовлены одинаково, тогда и доли сдавших и не сдавших будут такие же, как доли их представленности в общем числе экзаменующихся. Всего сдали экзамен 126 выпускников. Согласно высказанному предположению, 53,5% от этого числа учились в 1-й школе — это примерно 67,4 и 46,5% учились во 2-й школе — это примерно 58,6. Аналогично рассуждаем относительно не сдавших экзамен. Их всего 61 человек. На 1-ю школу, по предположению, должно приходиться 53,5% от этого числа, то есть примерно 32,6 человека, а на долю 2-й школы — 46,5%, то есть примерно 28,4. Нулевая гипотеза, заключающаяся в том, что между выпускниками нет различия, при таком соотношении сдавших и не сдавших подтвердилась бы. Но в данном примере мы имеем другое распределение. Количество выпускников 1-й школы, сдавших экзамен, составляет 82, а не 67,4, как можно было бы предположить, исходя из нулевой гипотезы. Соответственно количество выпускников 2-й школы, сдавших экзамен, составляет в действительности 44, а не 58,6. Точно также, сравнивая количество учащихся, не сдавших экзамен, по 1-й школе их оказалось 18, а не 32,6, а по 2-й школе — 43, а не 28,4. Таким образом, мы получаем расхождение между действительными (наблюдаемыми) распределениями и распределениями, которые могли бы иметь место, если исходить из нулевой гипотезы. Представим сказанное в виде таблицы-графа распределения численностей. Количества, которые могли бы быть получены при нулевой гипотезе, заключены в скобки. В левом углу буквенное обозначение клетки.

Таблица 3

Школы	**Число сдавших учащихся**	**Число не сдавших учащихся**	**Всего**	**Долевое отношение**
1	А 82 (67,4)	В 18 (32,6)	100 (100)	53,5%
2	С 44 (58,6)	Д 43 (28,4)	87 (870)	46,5%
Всего	126	61	187	100%

Получены разности по клеткам.

А $f_A = 82 - 67{,}4 = 14{,}6$.
В $f_B = 18 - 32{,}6 = -14{,}6$.

ПЕД диагностика

С $f_С = 44 - 58,6 = -14,6$.

Д $f_Д = 43 - 28,4 = 14,6$.

В рассмотренном примере эмпирический критерий хи-квадрат Пирсона равен

$$x^2_э = \frac{14,6^2}{67,4} + \frac{(-14,6)^2}{32,6} + \frac{(-14,6)^2}{58,6} + \frac{14,6^2}{28,4} = \frac{213,16}{67,4} + \frac{213,16}{32,6} + \frac{213,16}{58,6} + \frac{213,16}{28,4} = 3,2 + 6,5 + 3,6 + 7,5 = 20,8.$$

Для получения числа степеней свободы воспользуемся формулой:

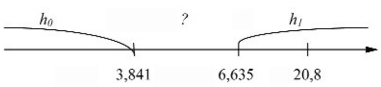
$$\mu = (k-1)(c-1) = (2-1)(2-1) = 1,$$

где k — число столбцов, c — число строк в таблице.

По таблице уровней значимости для одной степени свободы находим критические значение критерия.

$x^2_ь = 3,841$ при $p = 0,05$ и $x^2_k = 6,635$ при $p = 0,01$.

Эти числа определяют числовую ось значимости.



Значение эмпирического критерия $x^2_э = 20,8$ расположено на оси значимости в зоне значимости. Следовательно, полученная величина хи-квадрата Пирсона достаточна для отклонения нулевой гипотезы. Есть все основания для содержательного вывода о различной степени подготовленности выпускников 1-й и 2-й школ к экзаменам[9].

Приведённые факты и примеры свидетельствуют о том, что Карл Пирсон является выдающимся ученым, внесшим ощутимый вклад в различные отрасли науки. Ведь его можно назвать и математиком, и физиком, и биологам, и обществоведом. Но самый значительный вклад он внес, конечно, в статистику. Статистические методы, предложенные и обоснованные К. Пирсоном, и до настоящего времени являются основным инструментом в системе педагогических измерений.

В современной науке прочно утвердились такие понятия, как:

Кривые Пирсона;

Распределение Пирсона;

Критерий согласия Пирсона (критерий хи-квадрат);

Коэффициент корреляции Пирсона и корреляционный анализ.

С именем К. Пирсона специалисты также связывают и такие понятия, как:

Ранговая корреляция;

Множественная регрессия;

Коэффициент вариации;

Нормальное распределение.

9 Применение статистических методов в психолого-педагогических исследованиях: Учеб. пособие/ Сост. С.В. Нужнова. Троицкий филиал ЧелГУ. Троицк, 2005.