Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Квантованный учебный текст для студентов технических вузов

Нина Банина,
Татьяна Чёрняева
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
chetn2005@yandex.ru

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Если коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения являются постоянными функциями (действительными числами), то оно называется *линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0\,.$$

Характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Характеристическим уравнением, соответствующим линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, называется уравнение вида

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Замечание. Формально характеристическое уравнение можно получить из линейного однородного дифференциального уравнения, если заменить в нём производные $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$, ..., y' соответственно степенями λ^n, λ^{n-1}, λ^{n-2}, ... , λ^1, а саму функцию y заменить $\lambda^0=1$.

Правила определения решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Для каждого решения λ_j характеристического уравнения определяется решение $y_j=\phi_j(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Правила решения:

1. Если действительное число λ_j — простое решение (кратности 1) характеристического уравнения, то функция $y_j = e^{\lambda_j x}$ будет решением линейного однородного дифференциального уравнения.

2. Если действительное число λ_j — решение характеристического уравнения кратности k , то k функций вида

$$y_j = e^{\lambda_j x}, y_{j+1} = xe^{\lambda_j x}, y_{j+2} = x^2 e^{\lambda_j x}, ..., y_{j+k-1} = x^{k-1} e^{\lambda_j x},$$

будут являться решениями линейного однородного дифференциального уравнения;

3. Если комплексное число $\lambda_j = \alpha + \beta_i$ — простое решение характеристического уравнения, то сопряжённое ему число $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta_i$ также будет решением характеристического уравнения, а решениями линейного однородного дифференциального уравнения будут являться функции

$$y_j = e^{ex} \cos \beta x, \; y_{j+1} = e^{ex} \sin \beta x;$$

4. Если комплексное число $\lambda_j = \alpha + \beta_i$ — решение характеристического уравнения кратности k, то сопряжённое ему число $\lambda_{j+1} = \alpha - \beta_i$ также будет решением характеристического уравнения кратности k, а решениями линейного однородного дифференциального уравнения будут являться $2k$ функций

$$\begin{aligned}
&y_j = e^{ex} \cos \beta x, \; y_{j+1} = e^{ex} \sin \beta x, \\
&y_{j+2} = xe^{ex} \cos \beta x, \; y_{j+3} = xe^{ex} \sin \beta x, \\
&y_{j+4} = x^2 e^{ex} \cos \beta x, \; y_{j+5} = x^2 e^{ex} \sin \beta x, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&y_{j+2k-2} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_{j+2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.
\end{aligned}$$

Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, найденные по приведённым выше правилам, образуют его фундаментальную систему решений.

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть решения $y_1 = \varphi_1(x), \; y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка образуют фундаментальную систему решений, тогда *общее решение* этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_n y_n,$$

где C_1, C_2, ... , C_n — произвольные постоянные.

Вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Вид общего решения линейного однородного уравнения 2-го порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ зависит от того, какое значение принимает дискриминант $D = a_1^2 - 4a_2$ соответствующего характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Таблица 1

№	Решения характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ $(D = a_1^2 - 4a_2)$	Фундаментальная система решений и вид общего решения уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$
1.	$D > 0: \lambda_1, \lambda_2$ — действительные и различные: $\lambda_1 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-a_2 - \sqrt{D}}{2}$	Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ Вид общего решения: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2.	$D = 0: \lambda_1, \lambda_2$ — действительные и равные: $\lambda_{1,2} = \lambda = -\dfrac{a_1}{2}$	Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$ Вид общего решения: $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
3.	$D < 0: \lambda_1, \lambda_2$ – комплексно сопряжённые: $\lambda_1 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{\lvert D\rvert} i}{2} = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \dfrac{-a_1 - \sqrt{\lvert D\rvert} i}{2} = \alpha - \beta i$ где $\alpha = -\dfrac{a_1}{2}, \beta = \dfrac{\sqrt{\lvert D\rvert}}{2}$	Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ Вид общего решения: $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

Порядок определения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

1. Составить характеристическое уравнение и найти его решения.

2. Определить фундаментальную систему решений, используя приведённые выше правила или табл. 1 (если порядок однородного дифференциального уравнения равен 2).

3. Записать общее решение линейного однородного уравнения в виде линейной комбинации функций, образующих фундаментальную систему решений, с произвольными постоянными.

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большее число правильных ответов. Нажимайте на клавишу с номерами всех правильных ответов:

1. ЛИНЕЙНЫМ ОДНОРОДНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЯВЛЯЕТСЯ (ются)

1) $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0$

2) $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$

3) $y'''-2y''+5y'-y=0$

4) $x^2y''+2xy'-y=0$

5) $y'''+y''-3y'=\sin x$

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЮ $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0$

1) $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

2) $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_{n-1}\lambda=0$

3) $\lambda^{(n-1)}+a_1\lambda^{(n-2)}+a_2\lambda^{(n-3)}+...+a_{n-1}=0$

3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМУ ПРОСТОМУ РЕШЕНИЮ λ_j ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) $y_j=e^{\lambda_j x}$

2) $y_j=e^{\lambda x}\cos x$

3) $y_j=xe^{\lambda_j x}$

4) $y_j=e^{\lambda x}\sin x$

4. РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЁННЫМ ПРОСТЫМ РЕШЕНИЯМ $\lambda_j=\alpha+\beta_i$, $\lambda_{j+1}=\alpha-\beta_i$ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) $y_j=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{j+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x$

2) $y_j=e^{\lambda_j x},\ y_j=xe^{\lambda_j x}$

3) $y_j=xe^{\alpha x}\cos\beta x, y_{j+1}=xe^{\alpha x}\sin\beta x$

5. ЕСЛИ $y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\dots,y_n=\varphi_n(x)$ — ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И $C_1, C_2,\dots, C_n$ — ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ, ТО ИХ ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ ЯВЛЯЕТСЯ

1) общим
2) частным
3) произвольным

РЕШЕНИЕМ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ

6. ЛИНЕЙНОЕ ОДНОРОДНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 2-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1) $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$
2) $2y''+5y'-y=0$
3) $y''+3x^2y'-5xy=0$
4) $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$
5) $y''+a_1y'+a_2y=0$

7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЮ $y''+a_1y'+a_2y=0$

1) $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$
2) $\lambda^2+a_1(x)\lambda+a_2(x)=0$
3) $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$
4) $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda=0$

8. СОВОКУПНОСТЬ ФУНКЦИЙ , ОПРЕДЕЛЯЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ , ЕСЛИ КОРНИ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) действительные и различные
2) действительные и равные
3) комплексно–сопряжённые

9. СОВОКУПНОСТЬ ФУНКЦИЙ $y_1=e^{\lambda_j x},\ y_2=e^{\lambda_2 x}$, ОПРЕДЕЛЯЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y''+a_1y'+a_2y=0$, ЕСЛИ КОРНИ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) действительные и различные
2) действительные и равные
3) комплексно–сопряжённые

10. СОВОКУПНОСТЬ ФУНКЦИЙ $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, ОПРЕДЕЛЯЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y''+a_1y'+a_2y=0$, ЕСЛИ КОРНИ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) действительные и различные
2) действительные и равные
3) комплексно-сопряжённые

11. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''+a_1y'+a_2y=0$ ИМЕЕТ ВИД $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$, ЕСЛИ ДИСКРИМИНАНТ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) равен нулю
2) больше нуля
3) меньше нуля

12. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''+a_1y'+a_2y=0$ ИМЕЕТ ВИД $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$, ЕСЛИ ДИСКРИМИНАНТ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) равен нулю
2) больше нуля
3) меньше нуля

13. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''+a_1y'+a_2y=0$ ИМЕЕТ ВИД $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, ЕСЛИ ДИСКРИМИНАНТ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1) равен нулю
2) больше нуля
3) меньше нуля

14. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЮ $y''+2y'+y=0$

1) $\lambda^2+2\lambda+1=0$
2) $\lambda^2+2\lambda=0$
3) $\lambda^2+2=0$
4) $(\lambda+1)^2=0$

15. СОВОКУПНОСТЬ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y'''-8y=0$

1) $y_1=e^{2x}, y_2=e^{-x}\cos\sqrt{3}x, y_3=e^{-x}\sin\sqrt{3}x$
2) $y_1=e^{x}, y_2=xe^{x}, y_3=x^2e^{x}$
3) $y_1=1, y_2=e^{2x}, y_3=e^{-\frac{4}{3}x}$
4) $y_1=e^{x}, y_2=e^{-2x}\cos\sqrt{3}x, y_3=e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$

16. СОВОКУПНОСТЬ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y'''-3y''+3y'-y=0$

1) $y_1=xe^{x}, y_2=x^2e^{x}, y_3=x^3e^{x}$
2) $y_1=1, y_2=e^{2x}, y_3=e^{-\frac{4}{3}x}$
3) $y_1=e^{x}, y_2=xe^{x}, y_3=x^2e^{x}$
4) $y_1=e^{x}, y_2=e^{-2x}\cos\sqrt{3}x, y_3=e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$

17. СОВОКУПНОСТЬ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $3y''' - 2y'' - 8y' = 0$

1) $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{-\frac{4}{3}x}$

2) $y_1 = e^{x}, y_2 = xe^{x}, y_3 = x^2e^{x}$

3) $y_1 = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{-\frac{4}{3}x}$

4) $y_1 = e^{x}, y_2 = e^{-2x}\cos\sqrt{3}x, y_3 = e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$

18. УРАВНЕНИЕ $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ ЯВЛЯЕТСЯ

1) однородным
2) характеристическим
3) фундаментальным

УРАВНЕНИЕМ

Установите правильную последовательность:

19. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

□ — записать общее решение линейного однородного уравнения в виде линейной комбинации функций, образующих фундаментальную систему решений, и произвольных постоянных
□ — составить характеристическое уравнение и найти его решения
□ — определить фундаментальную систему решений