ШКОЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ОСВОЕНИЕ УЧАЩИМИСЯ ЛОГИЧЕСКИХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ 7–9-Х КЛАССОВ

Александр Георгиевич Гейн, *профессор кафедры алгебры и дискретной математики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. Б.Н. Ельцина, доктор педагогических наук, профессор, г. Екатеринбург, a.g.geyn@urfu.ru*

Евгений Маркович Рекант, *соискатель Уральского федерального университета им. Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, erekant@gmail.ru*

• универсальные учебные действия • логическое мышление • метапредметные умения • критерии сформированности учебных действий • уровни сформированности учебных действий

Развитие логического мышления всегда понималось как одна из центральных задач образования на всех уровнях – от дошкольного до высшего. Ясно, что это надпредметная задача и усилия педагогов по её решению должны прилагаться в любом предмете. Это положение закреплено в ФГОС общего образования: к метапредметным **результатам освоения основной образовательной программы отнесены** «умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы»[1] (ст. 7, п. 6). Но математике здесь всегда отводилась главенствующая роль. Подтверждением служит, в частности, то, что при описании предметных результатов **освоения основной образовательной программы развитие логического мышления** ФГОС общего образования упоминает только для предметной области «Математика и информатика» (там же, с. 13).

Вопросам развития логического мышления в школьном курсе математики посвящено немало публикаций, спектр которых чрезвычайно широк – от общепсихологических до узко методических. В большинстве из них развитие логического мышления трактуется как продвижение учащихся в овладении умением рассуждать. Слова «умение рассуждать» в этих работах конкретизируются в зависимости от того, к какой части указанного выше спектра относится работа. Это, в частности, приводит к расплывчатости в понимании того, в какой форме должны быть выражены результаты развития логического мышления – они плохо укладываются в рамки принятой системы «знания – умения – навыки». Появление в ФГОС понятия «логические универсальные учебные действия (УУД)» позволяет обсуждать результаты развития логического мышления в терминах сформированности таких УУД. Более того, именно формирование УУД составляет ту часть фундаментального ядра общего образования, которая определяет не предметные, а личностные и метапредметные результаты образования, а к ним, как отмечалось выше, и относится развитие логического мышления.

Состав универсальных логических действий определён и выглядит следующим образом:
- анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных);
- синтез как составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов;
- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов; подведение под понятия;

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2588

• выведение следствий;
• установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений, доказательство;
• выдвижение гипотез и их обоснование[2].

На этапе начального образования решается задача по освоению учащимися универсальных логических действий первых трех видов[3]. Для логических универсальных действий, которые должны быть освоены учащимися начальной школы, там же приведены типовые задачи, позволяющие оценивать сформированность соответствующих УУД (с. 109–114). Что касается этапа общего образования, то здесь на сегодняшний день, по-видимому, нет сформировавшейся точки зрения – как освоение логических УУД должно развертываться при изучении алгебры и геометрии в 7–9-х классах. В данной статье мы намерены обсудить некоторые концептуальные вопросы по формированию логических УУД при изучении курса алгебры в звене общего образования. Это обсуждение имеет два основных аспекта: 1) проекция приведенного выше общего состава логических УУД на уровень общего образования и 2) указание таких заданий, которые могли бы рассматриваться как примеры типовых задач, позволяющих диагностично развивать у учащихся логическое мышление.

Мы разделяем общепринятую точку зрения, что первоочередные возможности для развития логического мышления предоставляются курсом геометрии, который в большинстве школьных учебников излагается дедуктивно, демонстрируя учащимся основные принципы и методы логических построений. В работе авторов[4] проведен анализ материала, предлагаемого в наиболее широко используемых школьных учебниках геометрии, и показано, что его потенциал используется недостаточно эффективно.

Что касается курса алгебры, то и здесь, конечно, значимо присутствуют логические построения, в том числе связанные с доказательствами тех или иных утверждений, например, иррациональности числа $\sqrt{2}$. Однако в большей своей части алгебраический материал связан с освоением определенных алгоритмов. И это закономерно, поскольку сама идея применения алгебраических методов, восходящая к Р. Декарту и Г. Лейбницу, состоит в том, чтобы заменить рассуждения вычислительными процедурами, т.е. создать почву для алгоритмизации решения большинства математических задач. Следует ли из этого, что алгебра дает малые возможности для развития логического мышления? Конечно, нет. Но чтобы этому априори правдоподобному утверждению придать конструктивную основу, обсудим предварительно, что понимается под развитием логического мышления и каковы основные логические схемы, освоение которых учащимися может свидетельствовать о достаточном уровне развития у них логического мышления.

Говоря о логическом мышлении, Л.С. Выготский[5] отмечает, что основными логическими формами, в которых реализуется мысль, принято считать аналитическую и синтетическую деятельность ума, то есть такие действия, которые сначала разлагают воспринимаемый мир на отдельные элементы, а затем строят из этих элементов новые образования, помогающие разобраться в окружающем. Тем самым, говоря о педагогическом аспекте развития логического мышления, необходимо вести речь не только о требованиях логичности проводимых умозаключений, но и об освоении учащимися основных логических методов и умений осознано применять их в решении учебных задач. Поэтому, строя проекцию состава логических УУД для курса алгебры, мы рассмотрим некоторые основные типы логических конструкций, применяемых в математических исследованиях, и продемонстрируем, в каком качестве каждая из них может быть задействована для формирования логических УУД в среднем звене

[2] Фундаментальное ядро содержания общего образования: проект / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. — М.: Просвещение, 2009. — С. 41. Фундаментальное ядро содержания общего образования: проект / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. — М.: Просвещение, 2009. — С. 41.

[3] Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли: пособие для учителя / [А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская и др.]; под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2008. – С. 91.

[4] *Гейн А.Г., Рекант Е.М.* Развитие логического мышления в начале курса школьной геометрии // Современные проблемы физико-математического образования: вопросы теории и практики / Коллективная монография: ред. И.Г. Липатникова – Екатеринбург, 2012. С. 181 – 197.

[5] *Выготский Л.С.* Мышление и речь – М. Лабиринт, 1999. – 352 с.

общеобразовательной школы. Включение каждой из конструкций в курс будем иллюстрировать подходящими примерами задач. При этом мы выбирали задачи, которые содержат логические конструкции, так сказать, в чистом виде, и потому могут использоваться и как стартовые для построения методики развития логического мышления, и как диагностические.

ИМПЛИКАТИВНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ: ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКИ

Умение строить цепочки логического вывода той или иной длины в первую очередь ассоциируется с обладанием развитым логическим мышлением. Однако в отличие от геометрии, где импликативный характер рассуждений проявляется особенно ярко, поскольку в явном виде указывается, что есть два класса утверждений – аксиомы и теоремы, и последние должны быть получены из первых или ранее доказанных теорем исключительно посредством логического вывода, в алгебре наличие аксиом скрыто от обучаемых, и даже само слово «теорема» встречается в учебниках крайне редко. Но это вовсе не означает отсутствия в алгебре импликативных построений. Эти умения необходимы, например, при решении любой текстовой задачи. Понимание, что откуда следует, умение делать выводы, полезные для решения задачи – необходимое условие удовлетворительной успеваемости по предмету.

В исследовании развития логического мышления необходимо учитывать как общепсихологический контекст употребления этого понятия, так и собственно математический. Общепсихологический контекст важен тем, что он акцентирует внимание на умении из общих соображений делать конкретные выводы в данной ситуации. Как правило, основная трудность у школьников заключается в том, чтобы увидеть, где и в каком виде в данной задаче нужно использовать тот или иной теоретический факт. Что касается математического контекста употребления этого понятия, то он проявляет себя именно как требование строго соблюдения логических связей между исходными положениями (или данными) и получаемыми выводами (результатами). Вот пример задачи, иллюстрирующий эту ситуацию.

Задача 1. *Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел четно.*

Логическая цепочка здесь состоит всего из двух звеньев:
а) среди двух последовательных натуральных чисел одно обязательно четно;
б) произведение любого числа на четное число обязательно четное число.

Однако для начального этапа формирования логического мышления важно не только то, что задача достаточно короткая, но и естественность её появления. Действительно, поскольку в заключении требуется установить свойство четности, необходимо понять, как это свойство проявляет себя в последовательности натуральных чисел. Подметить, что в натуральном ряде четные и нечетные числа чередуются уже несложно (в некоторых учебниках этот факт формулируется в явной форме[6]). После этого утверждение, записанное в пункте а), фактически является очевидным следствием обнаруженного свойства ряда натуральных чисел. Этим рассмотрением заканчивается фаза логического анализа. Следующий шаг – логический синтез, когда по свойствам сомножителей мы судим о свойствах произведения. И, наконец, выстраивается требуемая логическая цепочка.

Этим примером демонстрируется не только процесс развития мышления школьника через логический анализ и синтез дедуктивной цепочки, но и процесс демистификации появления доказательства, снимая явно задаваемый или немой вопрос, отражающийся на лице школьника: «А как до этого додуматься?» – если ему просто предлагается решение в готовом виде.

Предложенная задача может также служить образцом типовой задачи, предназначенной для диагностики сформированности действия по построению дедуктивной цепочки. Принципиальным моментом является однозначность аналитико-синтезирующей деятельности, которую должен осуществить учащийся. Это позволяет сформули-

[6] *Шеврин Л.Н., Гейн А.Г., Коряков И.О., Волков М.В.* Математика: Учебник-собеседник для 5-6 классов средней школы – М., Просвещение, 1989. – 499 с.

ровать критерии оценивания и уровни оценивания сформированности действия по построению дедуктивной цепочки.

Критерии оценивания:

- умение выявить свойства элементов, обеспечивающих достижение цели;
- установление дедуктивной связи между исходными утверждениями о свойствах элементов и целевым утверждением.

Уровни оценивания:

- отсутствует умение разложить свойство итогового объекта (в данном случае, произведения двух чисел) в свойства составляющих элементов (в данном случае, сомножителей);
- сформировано умение разложить свойство итогового объекта в свойства составляющих элементов, но не установлена дедуктивная связь выявленных свойств элементов с их свойствами, определенными условиями задачи;
- сформированы умения разложить свойство итогового объекта в свойства составляющих элементов и установления дедуктивной связи выявленных свойств элементов с их свойствами, определенными условиями задачи.

Мы считаем, что на начальном этапе развития логического мышления в плане овладения умением проводить импликативные рассуждения целесообразно использовать именно задачи с короткими и однозначно определёнными логическими цепочками. В последующем задачи могут усложняться за счет построения более длинных цепочек рассуждений, но по существу речь идет о встраивании промежуточных звеньев, в которых фиксируется обнаружение очередных свойств элементов и дедуктивных связей с исходными данными.

РАЗБОР СЛУЧАЕВ

Умение выделять и правильно анализировать все возможные случаи – важнейшая составляющая развитого логического мышления. Конечно, с задачей рассмотрения разных ситуаций ученики встречались и до курса алгебры. Но тогда необходимость такого рассмотрения, а нередко и все рассматриваемые случаи, были оговорены в условии задачи; учащимся требовалось лишь выполнить стандартные операции по готовой схеме. С идеей самостоятельно выделить при решении задачи несколько принципиально разных ситуаций учащиеся в курсе алгебры среднего звена школьного образования практически не встречаются и тем самым данный логический механизм мышлением школьников не осваивается.[7] Научить учащихся проводить разбор всех возможных случаев и доказывать невозможность остальных – сложная, но крайне необходимая задача, стоящая перед учителем математики. Она непосредственно связана с формированием того компонента логических УУД, который обозначен как составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов. Приведем иллюстрирующую задачу.

Задача 2. Из двух пунктов, расстояние между которыми 340 км, выехали одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного из них на 5 км/ч больше скорости другого. Найти скорости поездов, если известно, что через 2 ч после начала движения расстояние между ними стало 30 км.

На первый взгляд это стандартная задача на составление уравнения (хотя она может быть решена и число арифметическими средствами). Главная проблема – увидеть наличие двух случаев: когда поезда через 2 часа ещё не успели встретиться, и когда они уже после встречи разъехались на 30 км. Сама возможность существования двух различных ответов в одной задаче является довольно непривычной для школьников седьмого класса, особенно в курсе алгебры. Понимание необходимости рассматривать две ситуации свидетельствует о высоком уровне логического мышления.

[7] С разбором случаев учащиеся знакомятся преимущественно при решении уравнений или неравенств, в которых правая часть равна 0, а левая представляет собой произведение двух или большего числа множителей, содержащих неизвестное. Тогда решение сводится к рассмотрению совокупности уравнений или неравенств. Но в этом случае появление такой совокупности, как правило, является результатом применения алгоритма, действуя по которому учащийся и получает требуемую совокупность. Это означает, что применение данной логической конструкции – разбор случаев – не становится метапредметным умением и тем самым изучение данного материала не способствует формированию у учащихся требуемого логического универсального учебного действия.

Выделив два случая, учащемуся необходимо в каждом из них правильно составить математическую модель задачи. Здесь также возможны разные варианты, каждый из которых определяется выстраиванием подходящей схемы логических рассуждений. Вообще построение математической модели всегда связано с дедуктивными рассуждениями, но мы на этом вопросе в данной работе останавливаться не будем.

Возможность использования приведённой задачи как образца для конструирования типовых задач обеспечивается тем, что выделение двух случаев однозначно определяется условием задачи.

Критерии оценивания:
• ориентация на выделение условий задачи, предусматривающих необходимость рассмотрения случаев.

Уровни оценивания:
• отсутствует умение выделять условия, которые содержат в себе необходимость разбиения на несколько случаев;
• имеется неустойчивая ориентация на выделение условий задачи, предусматривающих необходимость рассмотрения случаев;
• сформировано умение выделять те условия, которые содержат в себе необходимость разбиения на несколько случаев, но отсутствует полнота в их перечислении;
• устойчивое распознавание условий, требующих перехода к рассмотрению случаев, и умение формировать из них полную систему.

Класс задач, требующих более высокого уровня логического мышления, связан с разбиением на случаи, необходимость которых диктуется не исходными условиями, а различиями в построении дедуктивных рассуждений.

Доказательство от противного

Метод рассуждений от противного достаточно часто используется в математике. Он базируется на формально-логическом законе исключенного третьего. Применяя этот метод, мы предполагаем, что заключение утверждения неверно, и получаем из этого предположения два противоположных высказывания, так называемое противоречие. Однако использование его должно быть мотивированным. Во многих простых случаях без него вполне можно обойтись, и тогда он только загромождает решение задачи. В целом его использование как метода целесообразно, на наш взгляд, в тех случаях, когда отрицанием заключения в доказательстве утверждения приходится воспользоваться (в явной или неявной форме) более одного раза. Тем не менее, неназываемый, он может применяться в некоторых доказательствах уже в самом начале курса математики.

Задача 3. *Может ли среднее арифметическое двух следующих друг за другом нечетных простых чисел быть простым числом?*

Задача достаточно простая, однако без применения метода от противного её решить трудно. Наоборот, при предположении, что полусумма двух соседних простых чисел есть простое число, противоречие получается почти мгновенно. В самом деле, полусумма строго больше меньшего из двух взятых простых чисел и строго меньше большего из этих чисел. Поскольку взятые простые числа непосредственно следуют друг за другом, т.е. между ними нет простых чисел, их полусумма не может быть простым числом. Идея применить метод от противного рождается, скорее всего, после нескольких безуспешных попыток привести пример, дающий положительный ответ к задаче.

Такое «одноходовое» применение, когда противоречие получается сразу, как только высказано противоположное утверждение, полезно как пропедевтика данного метода. В силу указанного обстоятельства данная задача не годится для диагностики сформированности умения применять метод «доказательство от противного».

Расширение/сужение условий

При решении той или иной задачи ученику нередко бывает полезным вспомнить, не было ли подобной задачи ранее. К сожалению, учащиеся успешно используют ранее изученные рассуждения лишь тогда, когда они полностью повторяются в новой задаче. Если же ситуация иная, и очевидно, что дословное копирование старого решения не ведет к успеху, ученики теряются и вообще не пытаются обратиться к предшествующему случаю. Вот иллюстрирующий эту ситуацию пример.

Задача 4. а) Верно ли, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел всегда делится на 3?
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия, все члены которой – натуральные числа. Верно ли, что произведение любых трех последовательных членов такой прогрессии всегда делится на 3?

Очевидно, что пункт б) является расширением пункта а) – разность прогрессии теперь не равна 1, а может быть произвольным натуральным числом. Положительный ответ в случае а) достаточно очевиден, поскольку среди трёх последовательных натуральных чисел обязательно найдется одно (причем ровно одно, хотя это и не важно), делящееся на 3. Для б) простейший опровергающий пример – прогрессия 1; 4; 7; 10; …

После решения этой задачи перед учащимися естественно поставить вопрос, какому условию должна удовлетворять разность арифметической прогрессии, чтобы для неё сформулированное утверждение было верным. В этом случае надо обязательно обратить внимание, что расширение множества рассматриваемых прогрессий связано именно с переходом от разности 1 к произвольному натуральному числу, поэтому и условие надо искать относящееся именно к разности, а не, например, к первому члену прогрессии. После того, как достаточное условие сформулировано – разность прогрессии должна не делиться на 3 – и обосновано, можно обсудить, будет ли оно необходимым. Ответ, очевидно, отрицательный, поскольку, если не только разность, но и первый член прогрессии делится на 3, то и каждый член прогрессии (а значит, и произведение любого их количества) делится на 3.

Пример этой задачи показывает, насколько велик потенциал для развития логического мышления школьников, который имеют задачи. связанные с расширением и сужением условий. В рамках приведенной выше классификации логических УУД такие задачи способствуют прежде всего развитию умений анализировать объект с целью выделения существенных и не существенных признаков.

Диагностика и оценка сформированности логического УУД, связанного с анализом расширения/сужения условий с очевидностью требует предъявления как минимум двух заданий, в одном из которых как раз и присутствует более широкое условие, нежели в другом.

Критерии оценивания:
- выделение варьируемого условия.

Уровни оценивания:
- отсутствует умение выделять условие, которое при переходе от одного задания к другому определяет более широкий или, наоборот, узкий класс рассматриваемых объектов;
- имеется неустойчивая ориентация на выделение условий задачи, определяющих варьирование рассматриваемого класса объектов (условие указано правильно, но ученик не может объяснить, в чем именно состоит расширение или сужение класса рассматриваемых объектов);
- сформировано умение выделять те условия, которые определяют изменение класса рассматриваемых объектов, и на основе их анализа ученик может объяснить, какие дополнительные свойства имеет новый класс объектов по сравнению с предшествующим.

Конструктивные методы (построение примеров)

Построение конкретных примеров – едва ли не самый «любимый» метод рассуждений у школьников, применяемый далеко не всегда правомерно. В использовании этого метода необходимо учитывать три вещи, которые они часто забывают.

1. Построенный пример является подтверждением существования, но никак не доказательством, что всегда происходит так. В то же время, если пример не удается привести, это ещё не значит, что его не существует.

2. Приведенный пример, доказывающий существование одного из случаев, вовсе не говорит о том, что не может быть случаев других. Здесь мы возвращаемся к типу логических рассуждений, связанному с разбором случаев.

3. В случае, когда надо опровергнуть утверждение, построение примера столь же

удачно, как и при доказательстве существования. Фактически, опровергая всеобщность некоторого свойства, мы доказываем, что существуют ситуации, когда имеет место его отрицание.

Говоря о диагностике освоения обучающимися данного логического УУД, мы хотим подчеркнуть целесообразность её двухэтапности. Сначала естественно диагностировать умение различать в рамках одной предъявляемой для решения задачи единичности явления (существования) и общности. На втором этапе такое умение обучающийся должен проявлять уже для заданий, в которых требуется самостоятельно определить, каким будет тип утверждения, формулирующего ответ к заданию. Этот тезис мы проиллюстрируем примером из геометрии – он проще соответствующего примера из алгебры.

Задача 5. Угол ABC равен 70°, а угол BCD равен 110°. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? Если да, то можно ли утверждать, что при данных условиях прямые всегда параллельны?

Эта задача является модификацией задачи из учебника[8]: «Угол ABC равен 70°, а угол BCD равен 110°. Могут ли прямые AB и CD быть а) параллельными; б) пересекающимися». В такой формулировке связь между заданиями в пунктах а) и б) не столь явная; ученик, выполняя каждое из них по отдельности, может эту логическую связь и не увидеть. В нашей формулировке эта связь указана явно. Более того, она по самой своей формулировке обращает внимание на принципиальное различие между квантором существования и квантором всеобщности – вечный камень преткновения в мышлении многих школьников, пытающихся с помощью примера или разбора частного случая обосновать общее утверждение.

Отвечая на первый вопрос, ученикам достаточно провести две параллельные прямые AB и CD и секущую BC так, чтобы $\angle ABC = 70°$ и точки A и *D* лежали в одной полуплоскости относительно прямой BC. Тогда, пользуясь свойством параллельных прямых, получим, что внутренний односторонний $\angle BCD = 110°$. Пример построен. Отвечая на второй вопрос, нужно опровергнуть квантор всеобщности, а значит, привести пример, когда прямые не параллельны. Для этого достаточно провести прямые AB и *CD* так, чтобы углы ABC и BCD были внутренними накрест лежащими. Как мы видим, в обоих случаях применяется построение примеров, но для разных целей – подтверждения существования и опровержения общего утверждения.

Диагностике второго этапа соответствует задача 4 б) из предыдущего пункта – учащийся сам должен определить, в каких случаях нужен пример, а в каких нужно провести доказательство.

Критерии оценивания:
- различение случаев единичности (существования) и всеобщности (1-й этап);
- выделение основания для построения примера (2-й этап).

Уровни оценивания:
- отсутствует умение различать ситуации существования и всеобщности (1-й этап), выделять основание для построения примера (2-й этап);
- имеется неустойчивая ориентация на выделение основания для построения примера (ученик правильно выбирает установку на построение примера, но не может аргументировать свой выбор);
- сформировано умение выделять основания для построения примера или демонстрируется понимание недостаточности такого построения для обоснованности высказываемого утверждения.

ИНДУКЦИЯ

Индукции, и в частности методу математической индукции, уделяется значительное внимание в курсе алгебры. Имеется довольно обширная методическая литература по вопросам изучения метода математической индукции, в которой, как правило, обсуждается и общее понятие индукции, поэтому мы ограничимся лишь несколькими замечаниями, позволяющими сместить акцент в нужную, на наш взгляд, сторону.

Индукция – это умозаключение, ведущее от фактов к некоторой гипотезе (общему ут-

[8] Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений [Текст] / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2010. – 394 с.

верждению). Индуктивные рассуждения играют большую роль в выдвижении гипотез. Умение строить гипотезы на основании рассмотрения конечного множества примеров, проверять их – неотъемлемая черта развитого логического мышления. Вместе с тем учащиеся должны отчетливо понимать, что никакая проверка частными случаями не является основанием для вывода об истинности общего утверждения (см. обсуждение в п. 5). Тем самым индуктивное умозаключение обязательно должно быть поддержано дедуктивным рассуждением. И здесь возможны различные варианты.

Индукция подразумевает собой переход от частного случая к общему. Например, разобрав какие-то конкретные примеры, мы можем перейти к рассмотрению общей ситуации, где конкретные числа заменяются буквами. К примеру, рассмотрев в задаче 4 б) несколько примеров арифметических прогрессий с различными значениями разности, учащиеся вполне способны высказать общее суждение о том, какому условию должна удовлетворять разность прогрессии, чтобы гарантировать делимость на 3 произведения трех любых последовательных её членов. Дедуктивное рассуждение может быть осуществлено уже с помощью чисто алгебраических методов.

В то же время надо, чтобы учащиеся отчетливо понимали, что метод математической индукции – это дедуктивный механизм, и употребление в его названии слова «индукция» отражает всего лишь внешнее сходство с индуктивными умозаключениями.

В отличие от предыдущего пункта, диагностике умений делать обобщения посвящено немало исследований. Однако в подавляющем большинстве предлагаемых диагностических заданий учащимся предъявляется готовый набор объектов, для которых требуется выделить общее свойство. Мы же под индуктивным рассуждением понимаем единство процессов генерации объектов, удовлетворяющих исходным условиям задания, и выделения у них общего свойства, позволяющего в последующем получить требуемый в задании результат. Поэтому умение выполнять действия индуктивного характера непосредственно опирается на умение конструировать объекты с заданными свойствами, о чем шла речь в предыдущем пункте. В предположении, что такое умение сформировано, можно предложить следующие критерии и уровни освоенности умений выполнять индуктивные построения.

Критерии оценивания:
• умение строить репрезентативный набор объектов, удовлетворяющих заданным условиям при значительном варьировании других свойств и признаков;
• умение в полученной совокупности объектов выделить общее свойство, являющееся следствием наложенных на объекты исходных требований (возможно, с дополнительными ограничениями, сопряженные с варьируемыми признаками, выделенными на этапе построения совокупности объектов).

Уровни оценивания:
• отсутствует умение строить набор объектов, удовлетворяющих заданным условиям и при этом не имеющих скрытое несущественное общее свойство (стереотипное или сугубо формальное восприятие условия задачи);
• при построении набора объектов, удовлетворяющих заданным условиям, наблюдается неустойчивая ориентация на несущественные свойства (учащийся не осознает и не может сформулировать, какие свойства объектов подвергаются варьированию при построении набора);
• сформировано умение строить репрезентативный набор объектов, удовлетворяющих заданным условиям, при осознанном варьировании других свойств и признаков;
• сформированы умения строить репрезентативный набор объектов, удовлетворяющих заданным условиям, и умение выделять у них свойства, полезные с точки зрения продвижения к требуемому заключению, с одновременным анализом влияния на наличие таких свойств варьируемых характеристик рассматриваемых объектов.

В задаче 4 б) варьируемыми параметрами является первый член арифметической прогрессии и её разность – именно они определяют любую арифметическую прогрессию. Если принять гипотезу, что положительный ответ на вопрос задачи связан со свойствами разности прогрессии, то почти мгновенно можно сделать вывод, что она не должна делиться на 3, когда первый член прогрессии не делится на 3. Если же варьировать только значение первого члена прогрессии, то получающиеся примеры ясно показывают, что результат всё равно зависит от свойств разности.

Такое достаточно простое, ясное и четкое выделение варьируемых параметров свидетельствует о том, что данная задача может служить типовой для диагностики сформированности логических УУД данного вида.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМВОЛЬНОГО ЯЗЫКА

В этом пункте мы обсудим не конкретные логические конструкции, а общую идею использования символьного языка в логических построениях. Мы хотим показать, как можно продемонстрировать учащимся эффективность использования алгебраических (в школьном понимании) методов при построении логических рассуждений. Рассмотрим для примера следующую задачу.

Задача 6. Из трехзначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Доказать, что результат разности делится и на 9, и на 11.

Данная задача отличается от большинства предлагаемых в школе заданий тем, что множество исходных данных (трехзначные числа) велико – их 900. Да и множество возможных результатов вычитания из исходного числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, тоже весьма велико. С формальной точки зрения решение этой задачи возможно полным перебором вариантов. И учитель может задать провокационный вопрос: «А не перебрать ли нам все возможные трехзначные числа?» Но он должен быть уверен, что его ученики уже достаточно интеллектуально развиты, чтобы отвергнуть такой вариант. Величайший математик XX столетия академик А.Н. Колмогоров[9] прямо указывает, что «для задачи, в которой возможно решение методом перебора, показателем искомых [математических] способностей [учащихся] могло бы быть только краткое, логически интересное решение».

[9] *Колмогоров А.Н.* Письмо В.А. Крутецкому. / Вопросы психологии. № 3, 2001, с. 103-106.

В ходе обдумывания данной задачи перед учеником возникает логическая проблема, как охарактеризовать эти множества так, чтобы можно было конструктивно описать связь между ними. Понимание учеником этой общей постановки проблемы обнаружения конструктивной связи между множеством исходных данных и множеством результатов (именно между множествами, а не отдельными их элементами – такая связь в явной форме представлена в условии задачи) – это и есть признак развития логического мышления, поскольку такое понимание не связано с конкретной задачей, а представляет собой обобщенный взгляд на задачу.

Нередко на вопрос, как нам записать произвольное трехзначное число, учащиеся отвечают, что его надо обозначить буквой. Это проявление стереотипа, который вырабатывается на формально применяемое правило «неизвестное обозначай буквой». Это правило очень важно – на нем зиждется вся алгебра, – но оно не должно превращаться в формальную процедуру. Поскольку нам для решения задачи предстоит манипулировать с цифрами (записывать их в обратном порядке), а они нам тоже неизвестны, то естественный логический ход обозначить каждую цифру своей буквой, например, x – количество сотен, y – количество десятков, а z – количество единиц. То же самое правило «обозначай неизвестное буквой» сработало не формально, а логически вытекающим из условия задачи. Следующий шаг – получение ответа на вопрос: как описать элементы множества исходных данных с помощью введенных нами обозначений? Здесь тоже бывают заминки, но в целом учащиеся формулу $100x + 10y + z$ пишут достаточно уверено.

Причин, по которым уже в этой части, относящейся по существу всего лишь к описанию множества исходных данных, задача оказывается сложной для учащихся 7–9-х классов, по-видимому, три:

1) довольно поверхностное представление о структуре десятичной записи натуральных чисел;
2) малый опыт решения задач на доказательство с помощью алгебраических методов;
3) привычка сводить задачи к уравнениям с одним неизвестным.

Как правило, следующий шаг в решении задачи учащиеся выполняют без особых усилий. Более того, они обычно самостоятельно или с минимальным призывом со стороны учителя преобразуют полученную разность к виду 99(x – z), Однако даже после этого далеко не каждый ученик видит и/или может обосновать, почему полученное число делится на 9 и на 11. Дело в том, что понятие «одно число делится на другое» у большинства школьников связано с операцией деления – одно число делится на другое, если в результате выполнения этой операции остаток окажется нулевым. А как здесь выполнить деление? В данной задаче надо использовать тот факт, что одно число делится на второе, если первое из них можно представить, как произведение второго числа на еще какой-либо целый множитель. Полученное выражение 99(x – z) можно записать как 9·11·(x – z), откуда вывод о делимости на 9 и 11 станет очевидным, поскольку x – z – это целое число.[10]

С точки зрения развития у школьников логического мышления здесь было бы полезно поставить вопрос, действительно ли множество возможных результатов описывается двумя указанными признаками, т.е., иными словами, верно ли, что любое не более чем трехзначное число, делящееся на 9 и 11, представимо как разность некоторого трехзначного числа и его «обращенного». Ответ, разумеется, положительный, но требует от школьника уже других логических операций, связанных с конструированием примеров.

Как мы видим, вопреки довольно распространенному мнению, курс алгебры в 7–9-х классах является преимущественно техническим, он предоставляет значительные возможности для развития логического мышления школьников в целом и формирования логических УУД в частности. ❑

[10] Отметим, что и здесь у школьников далеко не всегда имеется полная ясность. Некоторых смущает, что число x – z может оказаться отрицательным или нулем. Всё это обусловлено тем, что делимость чисел обсуждается только на множестве натуральных чисел, а вопросам делимости целых чисел внимания практически не уделяется.