АНАЛОГИЯ И ОБОБЩЕНИЕ КАК СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ НОВОГО ЗНАНИЯ

Даглар Мамедярович Мамедяров*, директор МКОУ «Митаги – Казмалярская СОШ» Дербентского района Республики Дагестан, кандидат педагогических наук, г. Дербент*

• треугольные числа • пирамидальные числа • коэффициенты разложения бинома Ньютона

Одним из весьма важных типов умозаключений является так называемое традуктивное умозаключение (лат. tradutio – перемещение), при котором от двух или нескольких суждений некоторой степени общности переходят к новому суждению той же общности. Как метод исследования, традукция заключается в том, что, установив сходство двух объектов в некотором, делают вывод о сходстве тех объектов и в другом отношении. Важнейшим видом традуктивного умозаключения является аналогия (греч. analogia – соответствие, сходство). При умозаключении по аналогии знание, получаемое из рассмотрения какого-либо объекта («модели»), переносится на другой, менее изученный (менее доступный для исследования, менее наглядный и т.п.) в каком-либо смысле объект. По отношению к конкретным объектам заключения, получаемые по аналогии, носят, вообще говоря, лишь вероятный характер: они являются одним из источников научных гипотез, индуктивных рассуждений и играют важную роль в научных открытиях [2, с. 93].

Аналогия является, пожалуй, одним из самых распространенных методов научного исследования. Широкое применение аналогии часто приводит исследователя к более или менее правдоподобным предположениям о свойствах изученного объекта, которые могут быть затем подтверждены или опровергнуты опытом, или более строгими рассуждениями.

В процессе обучения математике учителю следует не только самому пользоваться полезными аналогиями, но и приобщать учащихся к самостоятельному проведению умозаключений по аналогии. При этом учащиеся должны понимать, что выводы, полученные по аналогии, требуют обязательного обоснования, так как не исключено то, что они могут оказаться ошибочными. Например, по аналогии с известными признаками делимости на 3 и на 9 можно сформулировать вероятный признак делимости на 27: «Если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27». Однако это утверждение неверно, убедиться в этом можно на каком-нибудь конкретном примере [2, с. 94].

Однако следует помнить: широкое применение аналогии в процессе обучения математике является одним из эффективных приемов, способных пробудить у учащихся живой интерес к предмету, приобщить их к тому виду деятельности, который называют исследовательским. Кроме того, широкое применение аналогии дает возможность более легкого и прочного усвоения школьниками учебного материала, так как часто обеспечивает мысленный перенос определенной системы знаний и умений от известного объекта к неизвестному (что способствует также и актуализации знаний).

Важное значение для получения нового знания имеет научный метод – обобщение. При обобщении мысленно выделяют какое-нибудь свойство, принадлежащее множеству объектов и объединяющее эти объекты воедино.

Приведем примеры применения аналогии и обобщения. Учащиеся, варьируя числами сочетаний, обнаружили такие равенства:

$$C_2^1 + C_1^1 = 2-1 = 1,\ C_3^1 - C_2^1 = 1,\ C_4^1 - C_3^1 = 1.$$

Учащиеся думают, что получим, если поменяем разность между номерами чисел сочетаний? Проверяют:

$C_3^1 – C_1^1 = 2$, $C_4^1 – C_2^1 = 2$, $C_5^1 = C_3^1 = 2$, $C_6^1 – C_4^1 = 2$. и т. д. Учащиеся делают вывод: выполняется равенство $C_{n+d}^1 – C_n^1 = d$. И замечают, что коэффициенты перед числами сочетаний являются коэффициентами разложения бинома Ньютона $(a–b)^r$. По аналогии с полученными равенствами учащиеся получают следующие равенства для коэффициентов $(a–b)^2$ и так далее.

Для $n=2$ получают: $C_2^1 – 2C_1^1 + C_0^1 = 0$, $C_3^1 – 2C_2^1 + C_1^1 = 0$, $C_1^1 – 2C_3^1 – C_2^1 = 0$, $C_5^1 – 2C_4^1 + C_3^1 = 0$ и т.д. При $d=2$ получают: $C_5^1 – 2C_3^1 + C_1^1 = 0$: $C_6^1 – 2C_4^1 + C_2^1 = 0$. $C_7^1 – 2C_5^1 + C_3^1 = 0$ и т.д.

Для $d=3$ получают: $C_6^1 – 2C_3^1 + C_0^1 = 0$, $C_7^1 – 2C_4^1 + C_1^1 = 0$, $C_8^1 – 2C_5^1 + C_2^1$ и т.д.

В общем виде записывают равенство: $C_{n+2d}^1 – 2C_{n+d}^1 + C_n^1 = 0$.

Далее учащиеся проверяют справедливость этой закономерности для $r = 3, 4, 5$ и т. д. Получают: $C_4^1 – 3C_3^1 + 3C_2^1 – C_1^1 = 0$, $C_5^1 – 3C_4^1 + 3C_3^1 – C_2^1 = 0$, $C_6^1 – 3C_5^1 + 3C_4^1 – C_3^1 = 0$, $C_6^1 – 3C_5^1 + 3C_4^1 + C_3^1 = 0$ и т.д. $C_6^1 – 4C_5^1 + 6C_4^1 – 4C_3^1 + C_2^1 = 0$, $C_7^1 – 4C_6^1 + 6C_5^1 – 4C_4^1 + C_3^1 = 0$, $C_8^1 – 4C_7^1 + 6C_6^1 – 4C_5^1 + C_4^1 = 0$, $C_8^1 – 4C_4^1 – 4C_2^1 + C_0^1 = 0$, $C_{10}^1 – 5C_8^1 + 10C_6^1 – 10C_4^1 + 5C_2^1 – C_0^1 = 0$ и т. д .

Учащиеся в общем виде записывают равенства: $C_{n+2d}^1 – 2C_{n+d}^1 + C_n^1 = 0$, $C_{n+3d}^1 – 3C_{n+2d}^1 + 3C_{n+d}^1 – C_n^1 = 0$, $C_{n+4\mathrm{d}}^1 – 4C_{n+3d}^1 + 6C_{n+2d}^1 – 4C_{n+d}^1 + C_n^1 = 0$, $C_{n+5d}^1 – 5C_{n+4d}^1 + 10C_{n+2d}^1 + 5C_{n+d}^1 – C_{\mathrm{n}}^1 = 0$ и так далее.

Далее записывают обобщенную формулу: $C_{n+rd}^1 – C_{\mathrm{r}}^1 C_{n+(r–1)d}^1 + C_r^2 C_{n+(r–2)d}^1 – \dots \pm C_k^k C_n^1 = 0$.

Учащихся интересует вопрос: выполняется ли эта закономерность для чисел? Получают: $C_3^2 – 2C_2^2 + C_1^2 = 1$, $C_4^2 – 2C_3^2 + C_2^2 = 1$, $C_5^2 – 2C_4^2 + C_3^2 = 1$, $C_6^2 – 2C_5^2 + C_4^2 = 1$ и т. д. Учащиеся выдвигают гипотезу: должно выполнятся равенство $C_{n+2}^2 – 2C_{n+1} + C_n^2 = 1$. Используя определение числа сочетаний, доказывают это тождество. У учащихся возникает мысль: что получим? Если заменим последовательности $n+2$, $n+1$, n на $n+4$, $n+2$, n? Получают следующие равенства: $C_5^2 – 2C_3^2 – C_1^2 = 4$, $C_6^2 – 2C_4^2 + C_2^2 = 4$, $C_7^2 – 2C_5^2 + C_3^2 = 4$ и т.д.

$C_7^2 – 2C_4^2 + C_1^2 = 9$, $C_8^2 – 2C_5^2 + C_2^2 = 9$, $C_9^2 – 2C_6^2 + C_3^2 = 9$ и т.д. Учащиеся замечают, что в правых частях получается квадрат разности номеров чисел сочетаний. Выдвигают гипотезу: должно выполнятся равенство $C_{n+2d}^2 – 2C_{n+d}^2 + C_n^2 = d^2$. Используя определение числа сочетаний, доказывают это. Учащиеся увидели в этих равенствах аналогию с коэффициентами разложения бинома Ньютона (, получим ли мы подобные закономерности, если заменим коэффициенты 1, 2, 3 на 1. 3, 3.1 и т.д.?). Проверяют при $d=1$, получают:

$C_4^3 – 3C_3^3 + 3C_2^3 – C_1^3 = 1$, $C_5^3 – 3C_4^3 + 3C_3^3 – C_2^3 = 1$, $C_6^3 – 3C_5^3 + 3C_4^3 – C_3^3 = 1$ и т.д.

При $d=2$ получают: $C_6^3 – 3C_4^3 + 3C_2^3 – C_0^3 = 4$, $C_7^3 – 3C_5^3 + 3C_3^3 – C_1^3 = 4$, $C_8^3 – 3C_6^3 + 3C_4^3 – C_2^3 = 4$ и т.д.

Учащиеся выдвигают гипотезу: выполняется равенство $C_{n+3d}^3 – 3C_{n+2d}^3 + 3C_{n+d}^3 – C_{n+d}^3 = d^3$, $C_{n+3d}^3 – 3C_{n+2d}^3 + 3C_{n+d}^3 = d^3$. Далее проверяют справедливость этих равенств для коэффициентов разложения бинома четвертой и пятой степеней и т. д. Получают и записывают в общем виде следующие тождества: $C_{n+4d}^4 – 4C_{n+3d}^4 + 6C_{n+2d}^4 + 4C_{n+d}^4 + C_n^4 = d^4$, $C_{n+5d}^5 – 5C_{n+4d}^5 + 10C_{n+3d}^5 – 10C_{n+2d}^5 + 5C_{n+d}^5 – C_n^5 = d^5$ и т.д. В более общем виде записывают тождество: $C_r^0 C_{n+rd}^r – C_r^1 C_{n+(r–1)d}^r – C_r^2 C_{n+(r–2)}^r + \dots \pm C_r^r C_n^r = d^r$. Учащиеся, варьируя числами сочетаний, получают следующие равенства: $C_5^3 – 2C_4^3 + C_3^3 = 3$, $C_6^3 – 2C_5^3 + C_4^3 = 4$, $C_7^3 – 2C_6^3 + C_5^3 = 5$, $C_8^3 – 2C_7^3 + C_6^3 = 6$, $C_9^3 – 2C_8^3 + C_7^3 = 7$, и т.д.

Учащиеся замечают, что выполняется равенство $C_{n+2}^3 – 2C_{n+1}^3 + C_n^3 = n$ (при $d=1$), $C_7^3 – 2C_5^3 + C_3^3 = 16$, $C_8^3 – 2C_6^3 + C_4^3 = 20$, $C_9^3 – 2C_6^3 + C_3^3 = 45$, $C_{10}^3 – 2C_6^3 + C_2^3 = 80$ и т.д.

Учащиеся приходят к выводу, что выполняется равенство: $C_{n+2d}^3 – 2C_{n+d}^3 + C_n^3 = d^2(n+d–1)d$. В общем виде доказывают это. Далее учащиеся проверяют равенство для чисел C_n^4, C_n^5 и т.д. Получают: $C_6^4 – 2C_5^4 + C_4^4 = 6(\mathrm{C}_n^2)$, $C_7^4 – 2C_6^4 + C_5^4 = 10(C_5^2)$, $C_7^5 – 2C_6^5 + C_5^5 = 10(C_5^3)$, $C_8^5 – 2C_7^5 + C_6^5 = 20(C_6^3)$ и т.д.

Учащиеся замечают интересный факт: во всех равенствах в правой части получают числа $C_n^{\mathrm{r}–2}$.

Учащиеся составляют следующие равенства: $C_7^4 – 3C_6^4 + 3C_5^4 – C_4^4 = 4$, $C_8^4 – 3C_7^4 + 3C_6^4 – C_5^4 = 5$, $C_9^4 – 3C_8^4 + 3C_7^4 – C_6^4 = 6$ и т.д.

Учащиеся замечают, что выполняется равенство: $C^4_{n+3}-3C^4_{n+2}+3C^4_{n+1}-C^4_n = n$ ... , $C^4_{n+3}-3C^4_{n+2}+3C^4_{n+1}-C^4_n = n$ …

Учащиеся, таким образом, получают множество интересных тождеств. Приведем еще пример обобщения. Учащиеся комбинируют числами, получают: $C^2_5+2C^1_5+C^0_5 = C^2_7$, $C^3_5+2C^2_5+C^1_5 = C^3_7$, $C^4_5+2C^3_5+C^2_5 = C^4_7$ ... и т.д.

$C^4_7-3C^3_7+3C^2_7-C^1_7 = C^4_{10}$, $C^4_8-3C^3_8+3C^2_8-C^1_8 = C^4_{11}$, $C^3_5+3C^2_5+3C^1_5+3C^0_5 =C^3_8$, $C^3_6+3C^2_6+3C^1_6+C^0_6 = C^3_9$ и т.д.

Учащиеся записывают в общем виде тождества: $C^m_n+2C^{m-1}_n+C^{m-2}_n = C^m_{n+2}$, $C^m_n+3C^{m-1}_n+3C^{m-2}_n+C^{m-3}_n = C^m_{n+3}$ [с. 98] и т. д.

Далее учащиеся записывают обобщенную формулу для биномиальных коэффициентов. Можно привести много примеров. При организации такой познавательной деятельности у учащихся развиваются не только исследовательские умения и навыки, но и повышается интерес к предмету. ❑

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мамедяров Д.М., Вакилов Ш.М.* Как научить учащихся «маленьким открытиям» Модернизация системы непрерывного образования. III Международная научно–практическая конференция. Дербент, 2011. – 263 с.
2. *Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Саннинский, В.Я.* Методика преподавания математики в средней школе. Просвещение, 1980. – 368 с.