ГУМАНИТАРНАЯ СУТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЕ

Валерий Николаевич Клепиков, *кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник «Института изучения детства, семьи и воспитания РАО», учитель математики и этики МБОУ, СШ №6 г. Обнинска, klepikovvn@mail.ru*

• живая математика • личность школьника • общечеловеческая культура • профилизация • гуманизация • гуманитаризация • культурно-исторический подход • математические идеи • ценности • метапредметность • диалог культур • цивилизационный код • целое • доля • часть

Когда перелистываешь очередной школьный учебник математики, то в очередной раз возникает гнетущее ощущение устремлённости предлагаемого учебного материала в «дурную бесконечность». По сути каждый учебник предлагает «энное» количество задач или примеров по мере возрастания сложности, чтобы научиться решать задачи или примеры определённого типа. Однако содержательная основа учебника не составляет органического единства и не имеет интригующей сюжетной канвы, близкой внутреннему миру ребёнка.

Высшим пилотажем считается, если школьники применят выработанные таким образом знания, умения, навыки или компетенции «на практике» или «в реальной жизни». Это совершенно верно, ценность математики очень значима в её практических воплощениях, но наличие практических приложений не должно препятствовать тому, чтобы она рассматривалась не только как наука, но и как органичная часть общечеловеческой культуры.

Только лишь формально-логическое, а значит, наукообразное и отчуждённое от человека преподавание математики чутко улавливают дети. В ходе подобных уроков не покидает ощущение чего-то незавершённого, откладываемого на неопределённую перспективу, которая в лучшем случае приоткроется лишь через месяцы и годы. Будут ли дети в восторге, если им объявят очередную цель: «научиться решать квадратные уравнения»? Ну и что? Ведь им мало просто прорешать тридцать-сорок уравнений… Современному ребёнку нужно обязательно разрешить какую-нибудь личностную или общечеловеческую проблему (или хотя бы соприкоснуться с ней). Поэтому в очередной раз и раздаётся: «А для чего всё это нужно?», «Ну сколько можно решать одно и то же»?», «И когда всё это кончится?» и т.п.

Замечательно то, что живая математика решает не только общечеловеческие, но и личностные проблемы, даже если на первых порах это и не очевидно. Вспомним лишь последние математические понятия, которые вошли в последнее время в социальный обиход: вектор, экспонента, вероятность, комбинаторика, дифференциал, интеграл, кластер, фрактал, параметр и т.п. Очевидно, что благодаря данным математическим понятиям человеческое мышление становится более масштабным, глубинным, дифференцированным.

Как представляется, согласно ФГОС второго поколения, именно интеграция личностных, предметных и метапредметных результатов и должна разрешить проблему отчуждения современного ребёнка от математики, ведь предметные результаты опираются на сущностные значения, личностные – на индивидуальные смыслы, а метапредметные – на общечеловеческие ценности. Именно достижение данных результатов даёт возможность учащемуся обнаружить новообразования и определённые вехи в своём личностном росте.

С личностными и предметными результатами более или менее понятно, а в связи с осмыслением метапредметных результатов, которые больше всего вызывают вопросы, обратимся к мысли А. Эйнштейна: «Невозможно решить проблему на том же уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень»[1]. Другими словами, в современном мире важно сформировать у учащихся не только узкопредметное, но и универсально-интегральное понимание явлений и процессов, способствовать философско-аксиологическому познанию законов и закономерностей окружающего мира с учётом всех значимых взаимосвязей и взаимозависимостей.

Симптоматично, что многие учёные (М.И. Башмаков, В.А. Успенский, А.В. Волошинов и *другме*) *правомерно видят математику органичной частью общечеловеческой культуры*. *В этой связи трудно удержаться и не процитировать и*звестнейшего учёного XX века Э. Шрёдингера: «Существует тенденция забывать, что все естественно-математические науки связаны с общечеловеческой культурой и что все научные открытия, даже кажущиеся в настоящий момент наиболее передовыми и доступными пониманию немногих избранных, всё же бессмысленны вне своего культурного контекста»[2]. При этом добавим: важно не только признавать математику частью общечеловеческой культуры, но и своими личностными усилиями встраивать математику в лоно Культуры. И как показывает практика, решение проблемы гуманитаризации возможно лишь на основе пересмотра математического образования, посредством насыщения его культурно-историческим содержанием.

Возможность осуществить культурно-исторический подход в преподавании математики в школе появилась не так давно. Этому в значительной степени способствовали изданные и переизданные в последние годы книги Г.И. Глейзера, А.В. Волошина, Б.В. Раушенбаха, А.Ф. Лосева, В.А. Успенского, Ю.В. Пухначёва, Ю.П. Попова, Ф.Ю. Зигеля, В.С. Библера, В.М. Розина и других авторов, которые интерпретируют математику не только в научном, но и культурологическом и философском аспектах. Именно эти авторы дают понять, что в XXI веке школьную математику можно и нужно рассматривать с точки зрения её гуманитарной сути.

Однако, несмотря на информационный прорыв, к сожалению, *многие важнейшие математические идеи так и не проявляются в выпускаемых учебниках математики, а те, которые ещё остались, сильно деформированы, заслонены ненужными деталями и громоздкими выкладками. В этой связи дети учебников математики почти не читают. Действительно, в погоне за ЕГЭ и ГИА* в *последних учебниках стала усиливаться тестовая начинка, возрастает количество обязательных для изучения тем и вопросов*, и тем самым *постепенно уходят занимательные задачи, эстетически выразительные доказательства*, *дидактическая наглядность*.

Вопрос об использовании культурно-исторического материала в процессе обучения математике, конечно же, не новый. Бесспорен тот факт, что каждый учитель в своей практике не раз использовал сведения из истории математики на уроках или внеклассных занятиях. Однако речь идёт не об эпизодических исторических экскурсах и сведениях, а о подключении ребёнка к траектории развития математических идей, значимых не только для человечества, но в первую очередь – для него самого. Ради интереса спросите у кого-нибудь из знакомых, какие математические идеи его более всего впечатлили за годы учёбы, и вы, скорее всего, в лучшем случае услышите то, какие задачи и примеры он научился решать.

В этой связи более плодотворным является изучение исторической линии развития математики в контексте общечеловеческой культуры, в ходе которой те или иные проблемы, противоречия и затруднения разрешаются в процессе решения соответствующих задач и примеров. Для этого и существуют классические задачи на выявление различных систем счисления, обнаружение иррациональных чисел, прояснение феномена несоизмеримости, квадратуру круга, решение золотой пропорции, трисекции угла, удвоения куба, доказательство теоремы Пифагора, подведение к операциям дифференциации и интеграциии т.п.

Детям важно осознать, что каждый блок задач или примеров ставит и решает не только ту или иную математическую, но и культур-

[1] *Кузнецов Б.Г.* Эйнштейн. Жизнь. Смерть. Бессмертие. М., 1979.

[2] *Шрёдингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М., 1976. С. 261.

но-историческую, гуманитарную проблему, которая была поставлена человечеством в явном или неявном виде на том или ином историческом отрезке времени и была решена или не решена на языке математики. Другими словами, учащийся должен решать языком математики свои индивидуальные проблемы развития! Ведь математика не только может, но и должна способствовать личностному развитию ребёнка! Иначе зачем 100% учащихся сдавать ГИА и ЕГЭ и долгие годы осваивать эту науку в школе?

В этой связи обозначим некоторые идеи, значимые для развития ребёнка. Например, осваивая число, человечество решало проблему меры и измеримости мира (Что можно измерить с помощью чисел, а что нельзя, и в чём состоит мера?); решая квадратные уравнения, человечество параллельно решало одновременно и культурную задачу на «золотое сечение» (Как разделить целое на наиболее гармоничные части?); столкнувшись с иррациональным числом (измерением), человечество решало проблему несоизмеримости (Какие объекты нашего мира являются соизмеримыми, а какие несоизмеримыми?); изучая пропорцию, человечество решало проблему сбалансированности окружающего мира (Как сбалансировать те или иные явления окружающего мира, чтобы человечество не потерпело катастрофу?) и т.д. Как нам представляется, именно такие общечеловеческие проблемы, пропущенные через сознание конкретного ребёнка, и выявляют гуманитарную суть современного математического образования.

Интересный факт: ученик А.Н. Колмогорова В.А. Успенский вспоминает, что в 50-х годах прошлого века, по возвращении с индийских научных конференций, московские математические коллеги с изумлением рассказывали ему, что в Индии математику — при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные — относят к наукам гуманитарным. И на этих конференциях им приходилось сидеть рядом не с физиками, как они привыкли, а с искусствоведами[3]. В контексте наших рассуждений здесь ничего удивительного нет: в основе и математики, и искусства лежат идеи-образы, с помощью которых человек постигает мир. В этой связи стоит вспомнить замечательную книгу А.В. Волошинова «Математика и искусство».

[3] *Успенский В.А.* Апология математики. СПб., 2009. С. 18.

Мы солидарны с В.А. Успенским и в том, что математика является органичной частью общечеловеческой культуры. Более того, на протяжении своей истории она решала как прикладные, так и духовные проблемы. Например, для классического образования Древней Греции математика была ничем другим, как нормой гуманитарной культуры, а сам предмет математики рассматривался как средство «делать душу прекрасней». Известно, что великий Платон под идеями сначала понимал математические образы и понятия и только потом экстраполировал их на другие явления и предметы мира. Он даже находит для них соответствующее место для обитания – «заоблачный мир идей». В «Государстве» он пишет: «При помощи математики очищается и получает новую жизненную силу орган души… ибо только им одним может быть обнаружена истина».

Вспомним: о чём идет речь в математике? О точках, линиях, прямоугольных треугольниках и т.д. Но существуют ли в природе точки, не имеющие размеров. Или абсолютно прямые и бесконечно тонкие линии? Или в точности равные отрезки, углы, площади? Ясно, что нет. Выходит, что математика изучает воображаемые вещи, это наука о чём-то идеальном. Объекты математики реально существуют, но не как материальные предметы, а как образы или идеи. Кстати, слово идея по-гречески и означает образ, вид. При этом математические конструкты создают свой особый идеальный мир. Софья Ковалевская писала: «В математических работах главное – идеи, а затем для их выражения у математиков существует свой язык». Таким образом, изначально математика транслирует уникальные и в то же время всеобщие идеи и методы осмысления мира, а потом всё остальное: символы, знаки, формулы и прочее.

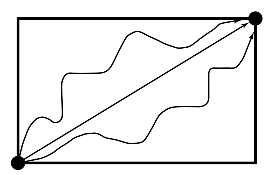
Но идея в школе – это не просто некое занимательное философское суждение, но своеобразная воронка, которая постепенно затягивает всю изучаемую тему, весь математический курс. Как показывает общечеловеческий опыт, в любой информации существуют особые «зоны уплотнения», «узловые точки» или «монады», которые как бы собирают, стягивают информацию в единое целое и в круге которых образуется силовое поле, наблюдается более интенсивная духовно-интеллектуальная жизнь. Такие точки П.А. Флоренский назвал «средоточия», М.К. Мамардашвили – «точки интенсивности», В.С. Библер – «точки удивления», В.И. Загвязинский – «горячие точки», А.В. Хуторской – «точки-проблемы», Г. Померанц – «узелки бытия», А.Н. Леонтьев – «смысловые единицы», а некоторые мыслители говорят о «точках роста». Расширяя смысловое значение точки до символа, можно говорить об «онтологической точке» (С.В. Гальперин), т.е. такой точке, в которой осуществляется со-бытие человека и мира.

Большую роль в этом случае играет диалог. В ходе диалога педагог сдвигает сознание ребёнка в некое загадочное первоначало, исток, где осуществляется зарождение любопытствующих вопросов. В дальнейшем хаотические вопросы перерастают в систему, оформляются в структуру, обретают вектор направленного движения и далее сопровождают, выстраивают индивидуальную траекторию развития ребёнка.

Межличностный диалог может перерастать и в так называемый диалог культур. Культурно-исторический контекст как раз и предполагает рассмотрение научного понятия с точки зрения диалога разнообразных культур. Как показывает анализ, в различных культурах одни и те же понятия имеют различную смысловую наполненность в соответствии с тем или иным менталитетом. Например, древние государства числа обожествляли и мифологизировали, античная культура в понятие числа вкладывала телесные и пластические интуиции, в Средние века число насыщалось религиозно-мистическими смыслами, в новое время число чаще всего рассматривалось как некая количественная абстракция и величина, в современной общечеловеческой культуре превалируют различные взаимодополняющие точки зрения. Вспомним также, как в различных странах относятся к тем или иным числам или цифрам в быту.

Как представляется, не нужно выделять специальных уроков по истории математики. Задача – пропитать весь учебный материал культурно-историческим духом с помощью ИКТ (фрагменты фильмов, опорные сигналы, высказывания, притчи и т.д.) и интерактивных технологий. На наш взгляд, хорошей формой объяснения нового материала может выступать интерактивный рассказ. В этом случае учитель не просто готовит логически выстроенную лекцию («для всех и на все времена»), но подготавливает рассказ, учитывающий потенциал конкретных ребят, который непрерывно выявляется и актуализируется в диалоге. Более того, ответы ребят не просто оцениваются со стороны учителя по схеме «верно неверно», но проектируют следующий поворот мысли педагога и учащихся. Поэтому движение мысли учителя – не прямая, а зигзагоподобная кривая, учитывающая траекторию мысли учащихся. Очевидно, что с годами у педагога накапливаются различные траектории движения урока и это, несомненно, его методическое богатство. Другими словами, педагог создаёт определённое культурно-историческое пространство, в котором, как в тигле, происходит зарождение и дальнейшее движение мысли педагога и учащихся.

Изобразим путь педагога и учащихся в образовательном пространстве с помощью прямых и кривых линий. Прямая линия – это «идеальная» модель движения образовательного процесса, которую учитель готовит в процессе подготовки к уроку, а кривая – это реальная линия движения в ходе урока.



Однако можно ли выявить так называемый математический пакет знаний, работающий для культурного человека как некий цивилизационный код, который должен знать каждый современный человек? На наш взгляд, можно и нужно. Локализуем образовательное пространство с помощью понятийных диад и триад: число – величина, плюс – минус, умножение – деление, возведение в степень – извлечение корня, конечное – бесконечное – предел, целое – доля – часть, скаляр – вектор, отношение – пропорция – «золотая пропорция», соответствие – равенство – подобие, рациональное – иррациональное, дифференциал – интеграл, логика – софистика, нульмерное – одномерное – трёхмерное (многомерное), случайное – вероятностное – закономерное, симметричное – асимметричное, система – матрица – кластер и т.д. Очевидно, что все перечисленные диады и триады имеют общекультурное значение. Все они выявляют гуманитарный потенциал современной математики.

Здесь важно отметить, что обновление современного математического образования мы связываем с идеями профилизации, гуманизации и гуманитаризации. Профилизация способствует профессиональному самоопределению школьника. Гуманизация создаёт благоприятные условия для его обучения, воспитания, развития, социализации, личностного роста. Гуманитаризация способствует становлению ребёнка в качестве «человека культуры». Все данные идеи в первую очередь подразумевают разработку не абстрактных или утилитарных для школьника тем и проблем по типу «математика ради математики» или «математика для сдачи ЕГЭ», а тех, которые, например, языком, средствами математики говорят что-то о его внутреннем мире, формируют, расширяют и углубляют этот мир. Все данные идеи направлены на формирование целостной картины мира учащегося, его общей культуры, научного мировоззрения. Они не исключают, а предполагают друг друга, содействуют становлению ребёнка в качестве будущего специалиста, личности, человека культуры.

С учётом вышесказанного, общий алгоритм освоения математического понятия как ценности состоит из следующих условных ступеней:

1. Выделение и усвоение блока взаимосвязанных понятий (например, окружность – круг – сфера – шар, рациональные числа – иррациональные числа – действительные числа, часть – доля – целое, дифференциация – интеграция и т.д.), которые обнаруживают друг друга с помощью противоречия, перехода в свою противоположность, через возникшую проблему и т.д.

2. Исследование понятий в единстве образных и ассоциативных взаимосвязей (как одно понятие порождает другое, например, точка – прямая – отрезок – ломаная – незамкнутая ломаная – замкнутая ломаная – многоугольник и т.д.; плоскость, секущая шар, порождает круг и т.д.), в соответствии со сквозной идеей (например, идея рационального и иррационального понимания мира, идея сохранения в мире пропорциональных отношений и т.д.).

3. Насыщение понятий объективными (научными) и субъективными (индивидуальными) смыслами в контексте научного, исторического, культурного и философского контекстов (в ходе диалога, сочинения сказок, проектов, моделирования и т.д.).

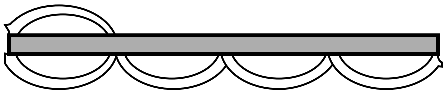
4. Вызревание «живого понятия», или ценности, значимого для внутреннего мира учащегося и органично вписывающегося в его мировоззрение (выстраивание «сети» взаимосвязанных мировоззренческих понятий-ценностей, написание математических эссе, притчевых миниатюр, создание блок-схем, таблиц, исследовательских работ и т.д.).

Покажем на примере реальной беседы, как можно проводить гуманитарно-ориентированные диалоги (направленные в первую очередь на человека). Приведённый ниже диалог начался с того, что однажды на уроке математики в 6-м классе на вопрос педагога: «В чём различие между частью и долей?» – один из учащихся ответил: «Доля, в отличие от части, всегда помнит о целом». Этот эвристический ответ и стал затравкой для будущего диалога, который был проведён на внеурочном мероприятии.

— Уважаемые ребята! Сегодня в процессе диалога мы попробуем осмыслить понятия «целое», «доля» и «часть» в контексте духовной и интеллектуальной жизни человека. Давайте вспомним, как найти *целое*, *долю* и *часть*?

— Как найти: 1/4 от 1 часа; 15 минут от 1 часа; неизвестную величину, если 15 минут есть 1/4 часа?
— Очевидно, что ответом являются уже известные числа: 15 минут, 1/4, 60 минут или 1 час.
— Какие понятия нам нужны, чтобы решить эти примеры?
— Понятия «целое», «доля» и «часть».
— Что в данных примерах является *целым*, *долей*, *частью*?
— 15 минут – *часть*, 1/4 – *доля*, 1 час – *целое*.
— Какое понятие связывает два других?
— Это доля, так как это единственное из данных чисел, которое связывает два дру-

гих – целое и часть. Доля 1/4 связывает числа 15 и 60 (1/4 = 15/60).
— Почему «единственное»? А разве число 15/60 не «помнит» о 1 и 4?
— Да, если числа 15 и 60 составляют отношение, то они также становятся *долей*.
— Здесь явно проявляется свойство пластичности пропорции: в ней мы можем менять местами крайние и средние члены.
— А как *доля* связывает другие два числа?
— Она их связывает в движении, ведь чтобы связать *целое* и *часть* их нужно сопоставить, соизмерить, сравнить. Например, чтобы показать 1/4 по отношению к части и целому, нужно проделать следующую процедуру.



— Действительно, когда мы нечто измеряем, то мысленно прокручиваем, прикидываем, сколько выбранных единиц измерения до намеченного места.
— Кстати, расстояние я могу измерять, например, карандашом, ручкой, указкой, своим шагом, ладонью и т.д. Тогда они выступают в роли меры, а не 1 метр!
— На Руси были такие единицы измерения, как ладонь, шаг, сажень, локоть, пядь и т.д. Другими словами, единицы измерения были как бы одушевлёнными, связанными с человеческим телом.
— Кстати, интересно, что на Руси данные математические понятия были замечательным образом связаны с повседневной культурой людей. Например, согласно народным представлениям, каждый человек, как органичная *часть* мира, при рождении наделялся своей, определённой *долей*. Она рассматривалась не сама по себе, а соотносилась с понятием чего-то *целого*. Этим целым в традиционном российском сознании представлялось всеобщее народное благо. В мифологических представлениях образу *Доли* как хорошей судьбы нередко противостоит *Недоля*, как олицетворение неудачной, плохой жизни. По некоторым поверьям, хорошая *доля* может оставить человека, если он всё время грешит.
— Если искать какое-либо число, символизирующее живую мысль, то это, конечно, *доля*. Именно живая мысль постоянно сравнивает, сопоставляет, анализирует, т.е. устанавливает соответствия, отношения.
— Д*оля* напоминает работу интеллекта, который также всё осмысливает и приводит в порядок, то есть наделяет всё соразмерной долей.
— А что такое *целое*?
— Это нечто самое большое.
— Это *всё*, то есть это то, что охватывает *всё*.
— Целое объединяет различные вещи.
— А всегда ли *целое* есть что-то самое большое?
— В математических задачах *целое* не всегда бывает самой большой величиной.
— Более того, часто в задачах фигурируют несколько целых. Например, в первый день продали 20% всего товара, во второй – 30% остатка, а в третий – 40% оставшегося товара. Здесь мы вычисляем относительно трёх целых
— Так что же такое *целое*?
— Это то, относительно чего мы вычисляем или измеряем.
— А может ли *часть* быть больше *целого*?
— Конечно, не может.
— В каком-то смысле может, если доля больше 1, например, находим 4/3 от 30. Получаем 40, а целое – 30.
— Да, но получившееся число 40 – это тоже уже целое.
— Получается так, что величины в задачах могут выступать одновременно и как часть, и как целое?
— Философы бы сказали: «Здесь мы обнаруживаем диалектику!»
— Другими словами, в математике очень важно относительно чего мы размышляем.
— В этом и состоит трудность решения задач на целое, долю и часть.
— Теперь можно отчасти понять загадочное высказывание Аристотеля о том, что целое предшествует частям.
— Почему загадочное? Ведь все живые организмы рождаются не по частям, а сразу целыми.
— Существует на эту тему забавная байка о Ходже Насреддине. Как-то ночью, когда Насреддин сладко спал, жена растолкала его и говорит: «Ребёнок целый час плачет, неужели ты не слышишь? Ведь он наполовину твой! Покачай его». А Насреддин отвечает: «Моя половина пусть плачет. Успокой свою половину». С этими словами он повернулся к стене и заснул.
— Да, половина ребёнка – это круто!
— То, что в математике можно делить, в жизни – категорически нельзя.
— А можно ли *частью* измерить *целое*?
— В начальной школе мы из частей составляли целое, поэтому с этой точки зрения можно.

— Да, но часть тоже ведь с помощью чего-то измеряется. А для этого опять же нужно целое, например, 1 метр.
— Конечно нельзя, так как не *часть*, а именно *целое* задаёт всему меру. Например, если я скажу, что проехал некоторое расстояние, то без *меры-целого* невозможно определить, какое это расстояние по величине. Таким образом, без *целого часть* есть нечто неопределённое.
— Недаром, когда хотят о чём-то сказать негативное, то говорят, что это нечто частное, то есть малозначащее, ущербное, неопределённое.
— Лучше сказать не частное, а осколочное, ведь из частей мы можем составить целое, а из осколков уже никогда.
— Вспоминается мультфильм-притча «Тридцать восемь попугаев». Мартышка пытается сначала измерить удава с помощью самого же удава. Удав протестует, когда мартышка говорит, что он составляет две половины, и заявляет, что он целый.
— Удав понимает, что живое существо нельзя составить из частей.
— Да, затем приходит попугай и подсказывает, что измерить удава можно лишь с помощью того, что находится вне его, например, с помощью его самого – попугая. И тут у героев наступает прозрение: удава измеряют с помощью мартышки, потом с помощью слонёнка.
— Кстати, когда попугай измерил удава, то получилось не ровно тридцать восемь попугаев, а тридцать восемь попугаев и одно крылышко.
— Другими словами, дробь. Точнее – смешанное число.
— А к чему вы вспомнили этот мультфильм?
— Здесь, кажется, возникает ещё один вопрос. Может ли целое-удав измерить самого себя?
— Нет, если требуется что-то измерить, нужно взять за целое нечто другое. Поэтому целым выступает уже не сам удав, а попугай, мартышка или слонёнок.
— Значит, получается так: то, что нам нужно измерить, как бы приобщается к идеальной мере, эталону, в частности, к 1 метру?
— Да, поэтому *часть* – это то, что приобщается к *целому* и благодаря этому соответствию приобретает размерность.
— Кстати, *часть* сама по себе не помнит о *целом*, как, впрочем, и *целое* – о *части*. Например, если у меня в кармане 5 конфет, то по данной части невозможно сказать, сколько у меня всего конфет. Однако если я скажу, что это половина всех конфет, то сразу же станет ясно, сколько я имею конфет.
— Поэтому приобщение к *целому* возможно только через посредство *доли*.
— Получается так, что без посредства *доли часть* и *целое* обречены на вечное одиночество.
— Это действительно так, если не называть *целым*, например, простую сумму частей-отрезков его составляющих.
— Да, но в таком случае *целое* разбивается на бесконечную сумму отрезков, которые не играют по отношению к *целому* существенной роли, так как в этом случае *целое* однозначно всегда больше любого из отрезков.
— Делением отрезка на *части* мы занимались в младшей школе, а сейчас нам более интересно то, что отрезки можно измерять не только с помощью сантиметров, но и с помощью *долей*.
— Странная эта *доля*: она как бы живая, без неё невозможна никакая связь.
— А разве *целое* менее загадочно? Ведь оно может быть по размерам каким угодно, и, несмотря на это, именно оно даёт всему меру!
— Действительно, даже если *целое* очень маленькое, например, 1 миллиметр, то оно и тогда есть *целое*.
— Вспоминается поговорка: «Мал золотник, да дорог».
— А что в духовной жизни человека выступает в качестве меры, эталона или *целого*?
— Это идеалы, ценности, принципы. Приобщаясь к ним, человек самосовершенствуется.
— Более того, *целое* лишний раз напоминает, что целостные явления жизни нельзя делить на части. Например, нельзя любить на четверть или дружить на треть.
— Что же касается *части*, то она также может быть какой угодно по величине.
— Однако безмерная *часть* может только озадачить или даже напугать своей неопределённостью. Представьте себе геометрическую фигуру, которая не имеет измерений.
— Или человека, живущего без идеалов и принципов, такой человек воплощает собой некий первобытный хаос.
— А где *часть* и *доля* совпадают по числовому значению?
— Там, где *целое* и *часть* совпадают по размерам. Например, мы выбрали *целое-меру*, а оно совпало, например, с эталоном длины – 1 метром. Тогда 1/2 от целого и 1/2 от метра совпадут.

— А могут ли совпасть *доля* и *целое*?
— Вряд ли, ведь не могут же, например, совпасть 1/2 и 20 см.
— Я думаю, могут, если доля будет равна единице, например, две вторых, три третьих и т.д.
— А могут ли совпасть и *доля*, и *целое*, и *часть*?
— С точки зрения математики не могут, так как тогда они станут чем-то единым.
— Наверное, могут, но только тогда, когда они будут равны нулю, то есть в точке.
— Да, точка – таинственная фигура: из неё как бы всё разворачивается и в неё же всё сворачивается.
— А можно ли связать целое, долю и часть?
— Конечно можно, с помощью пропорции. Пропорция есть органичная связь доли, части и целого. Например, 1/4 = 15 мин/60 мин.
— Не зря великий Платон говорил: «Однако два предмета сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их *связь*. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое. И задачу эту наилучшим образом выполняет *пропорция*…».
— Значит, мы в процессе рассуждений осмыслили пять понятий «всё», «целое», «доля», «часть» и «пропорция».
— Давайте попробуем дать им определения.
— С помощью слова «всё» мы можем попытаться «объять необъятное», то есть нечто самое большое.
— Целое – это то, с помощью чего мы измеряем, и то, к чему приобщаются части. При этом целое – не всегда самое большое.
— Часть – это то, что приобщается к целому и тем самым обретает размерность, соизмеримость, определённость.
— Доля – это то, что связывает целое и часть; она всегда «помнит» о части и целом.
— Именно, целое, доля и часть составляют пропорцию: часть / целое = доля.
— Итак, давайте лаконично отрефлексируем самое важное, к чему мы пришли в ходе нашего диалога.
— Есть число, которое осмысливается в движении – это доля.
— Часть и целое в задачах относительные величины. Целое может выступать в роли части, а часть в роли целого.
— Поэтому математика не такая уж статичная или даже застывшая наука, как её представляют. В какой-то момент числа оживают.
— Понятия целое, доля и часть важны не только в математике, но и в культуре, духовной жизни человека.
— Вот почему древние греки и другие древние народы считали математику магической наукой, а числа обожествляли.
— Данные понятия как бы моделируют мышление человека: ведь мышление есть постоянное нахождение меры, соответствия, пропорции.
— Это действительно метапредметные понятия, работу которых мы можем обнаружить на всех предметах, даже если мы их и не озвучиваем.
— Уважаемые ребята! Сегодня мы плодотворно поразмышляли, пришли к очевидным и неожиданным мыслям. Оказалось, что математические понятия далеко выходят за её границы – в жизнь и культуру, помогают человеку упорядочивать окружающий мир, духовную сферу. С вашего согласия на следующем занятии мы поразмышляем о пропорции. Кто возьмётся за подготовку следующего заседания? До следующей встречи!

Очень продуктивно можно проводить обобщающие и интегрированные уроки, когда изученный материал выстраивается не в логике его изучения по стандартной программе, а в логике культурно-исторического развития человечества, в логике его высочайших культурно-математических достижений. Под достижениями в данном случае понимается освоение человечеством таких феноменов, как размерность, рациональность, иррациональность, целостность, дробность, бесконечность, гармоничность, пропорциональность, интегральность, симметричность, фрактальность, и т.п. Собственно данные понятия могут выступать и в роли метапонятий.

Все перечисленные понятия являются не только математическими, но и общекультурными. Таким образом, с помощью математики мы погружаемся в Культуру, восходим к её общечеловеческим свершениям, где в одном ряду стоят и математики, и физики, и лирики, и другие достойные представители человечества, между которыми не существует так называемых предметных барьеров.

Итак, урок математики, созданный на культурно-исторической основе, должен иметь:

1) культурно-историческую проблематику, возникающую на основе комплекса противоречий, существенную для общекультурного развития человека, поддержанную идеями и взглядами конкретных мыслителей;

2) интригующую сюжетную канву, обеспеченную занимательными вопросами и вовлечённостью всех детей в общую работу;

3) внутрипредметные и межпредметные связи, которые обеспечивают органическую целостность образовательного материала на базе интегративных и интерактивных технологий;

4) анимационную поддержку на основе информационно-компьютерных технологий.

Представим основные математические и общекультурные идеи, которые были выработаны вместе с детьми и на которые мы опираемся в своей работе.

1. Идея числа. Числовое разнообразие в математике отражает (выражает) смысловое богатство мира. Числовые закономерности позволяют понять явления окружающего мира и раскрыть глубины духовного мира человека. Древние мудрецы пришли к выводу, что вещи суть копии чисел, а числа – начала вещей.

2. Идея взаимосвязи целого, доли и части. Между понятиями «целое», «доля» и «часть» существует глубинная взаимосвязь, которую можно найти как в математике, так и в жизни. Целое – это то, относительно чего мы измеряем. Часть – это то, что приобщается к «целому», и тем самым приобретает размерность. Доля – это то, что связывает «часть» и «целое». Пропорция – это гармоническое соотношение «целого», «доли» и «части».

3. Идея пропорции. Различные виды пропорций («обычная», «геометрическая», «золотая» и т.д.) помогают обнаружить разнообразие зависимостей явлений окружающего мира, выразить гармонию мира на языке математики, выявить закономерности духовно-нравственной жизни человека.

4. Идея симметрии. Идея симметрии (асимметрии, диссимметрии) характеризует визуально-пространственное и чувственное равновесие или его отсутствие во внешнем и во внутреннем мире человека, и тем самым помогает на эмоционально-физиологическом уровне почувствовать гармонию мира.

5. Идея подлинного и мнимого. Мнимые или софистические доказательства возникают тогда, когда «мерой» всего выступает только человек. Для сохранения объективного взгляда на мир человеку помогают такие структуры, как аксиомы математики, принципы логики, законы мироздания, общечеловеческая культура, абсолютные ценности и т.д.

6. Идея закономерного и строго логического познания мира. Для понимания мира и человека очень важно овладеть законами правильного мышления, правилами логики, основами культуры мышления; только тогда человек вправе надеяться на постижение истины.

7. Идея единства рационального и иррационального. Проблема несоизмеримости открыла для человечества новый взгляд на мир, с учётом как его рациональной составляющей, так и иррациональной. Гармония и красота мира есть синтез рационального и иррационального.

8. Идея угловатой формы, устремлённой ввысь. Угловатую форму мы в первую очередь связываем с треугольником и теми фигурами, в которых треугольник является образующим элементом (тетраэдр, пирамида и т.д.). С давних времён с данной формой связывали человеческую устремлённость к идеалам, духовное восхождение. Обнаружить данную тенденцию можно, созерцая великие памятники архитектуры.

9. Идея совершеннейшей формы. Совершеннейшая из форм, различные модификации которой выражаются окружностью, кругом, сферой и шаром, благодаря своим свойствам и признакам, является символом идеальной гармонии и полноты, надёжным ориентиром в человеческих отношениях и переживаниях.

10. Идея скалярно-векторного понимания процессов мира. Каждое мега-, макро- или микроявление обладает внутренним потенциалом и имеет определённую направлен-

ность на какие-либо объекты мира. Это касается и образовательных феноменов: естественно-математических, культурно-исторических, духовно-нравственных. Выявить этот потенциал и установить его направленность – одна из важнейших исследовательских задач человека и человечества в целом. Более того, лично для человека скалярно-векторное понимание мира символизирует его безграничные внутренние возможности, а также целый спектр свободного выбора и целеполагания.

11. Идея парадоксальной бесконечности. Изучая различные виды математической бесконечности (актуальная, потенциальная и др.), человек параллельно осваивал и звёздные просторы Вселенной, и окружающий мир, и глубины своего внутреннего мира.

12. Идея правильных многогранников. Правильные многогранники являют нам идеальные модели наиболее компактного, совершенного и гармоничного существования объектов мира. Теория многогранников тесно связана с топологией, теорией графов, линейным программированием и т.д. Недаром многогранник является символом многосторонней одарённости человека.

13. Идея вероятностного мира. Вероятность – количественная мера возможности осуществления события при наличии неопределенности, т.е. в ситуации, когда это событие характеризуется как возможное. Идея вероятности — одна из основополагающих и интригующих идей, лежащих в фундаменте современной науки. Вероятностные идеи и методы исследований интенсивно входят практически в каждую из наук о природе и обществе. Везде, где наука сталкивается со сложностью, с исследованием сложноорганизованных систем, вероятность приобретает важнейшее значение. Вероятностные методы породили представления о новом классе закономерностей в природе — о статистических закономерностях.

14. Идея евклидовой и неевклидовой геометрии. В XIX веке, благодаря работам Я. Боия, К. Гаусса, Н. Лобачевского и Г. Римана, оказалось, что евклидова геометрия не является единственно возможной. Вслед за ними математики создали и исследовали многие различные «геометрии», которые оказались столь же логичными, стройными и непротиворечивыми. И только в XX веке учёные доказали, что геометрия Н. Лобачевского нашла применение в специальной теории относительности А. Эйнштейна, а геометрия Г. Римана служит фундаментом для общей теории относительности. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени имеет непосредственное отношение к неевклидовой геометрии. Мир предстал перед человеком не столь «плоским» и «прямолинейным», как в геометрии великого Евклида.

15. Идея интегрально-дифференциального понимания мира. Для понимания мира человеку приходится постоянно производить операции интегрирования и дифференцирования (в широком смысле). Интегрирование позволяет осмыслить и сохранить полноту мира (удержать его целое), дифференцирование – обнаружить ценность составляющих его частей и мгновений. Взаимообусловленность этих процессов выражается в принципах «Всё во всём», «Часть подобна целому», «Максимум и минимум тождественны» и т.д.

В заключение отметим, что к идее культурно-исторического освоения математики мы подходили постепенно. Это не было нечто умозрительное, требовалось актуализировать и реинтерпретировать большие содержательные пласты из истории математики, рассмотреть их в контексте Культуры. Сначала на уроках мы использовали исторические сведения, креативно-опорные сигналы, затем создавали с ребятами математические притчи с философским содержанием, делали интересные сообщения, писали доклады, рефераты, исследовательские работы и проекты, проводили многочисленные заседания НОУ и школьные конференции, участвовали в различных региональных и всероссийских конференциях, творческих олимпиадах. Многие ребята стали лауреатами данных конференций и олимпиад, так как предлагали обновлённый (несколько необычный) взгляд на историю математики. Тем самым в своей кропотливой работе мы шаг за шагом выявляли гуманитарную суть математического образования в современной школе. ❑