Методика

Дифференциальные уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными. Уравнение в полных дифференциалах

Квантованный учебный текст с заданиями в тестовой форме.

Для студентов технических вузов

Татьяна Черняева,
Ирина Медведева
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
chetn2005@yandex.ru

Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными

Общий вид ДУ с разделёнными переменными

ДУ первого порядка называется уравнением с разделенными переменными, если его можно представить в виде

$$y' = f(x) \tag{1}$$

или

$$f(x)dx+g(y)dy=0, \qquad (2)$$

в котором коэффициент при dx является функцией только от x, а коэффициент при dy — только от y.

Метод решения уравнения с разделёнными переменными

Интегрируя уравнение (1), получим $y=\int f(x)dx+C$, т.е. $y=\varphi(x,C)$ — общее решение.

Для решения уравнения (2) его достаточно почленно проинтегрировать, получив общий интеграл уравнения:

$$\int f(x)dx+\int g(y)dy=C;$$

$$F(x)+G(y)=C,$$

где $F(x)$, $G(y)$ — первообразные функций $f(x)$, $g(y)$ соответственно.

Если последнее уравнение разрешить относительно y, то получим общее решение $y=\varphi(x,C)$ исходного уравнения.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид ДУ с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\cdot g_1(y)dx+f_2(x)\cdot g_2(y)dx=0 \qquad (3)$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Коэффициенты при dx и dy являются произведениями двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая — только от y.

Метод решения

Разделив почленно уравнение (3) на $f_2(x)\cdot g_1(y)$, при условии, что $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0. \qquad (4)$$

Общий интеграл ДУ

Взяв неопределённые интегралы от обеих частей ДУ (4), получим общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C;$$

или:

$$\Phi(x,y)=C.$$

Замечание

При разделении переменных предполагалось, что $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$.
Рассмотрим уравнения $f_2(x)=0$ и $g_1(y)=0$.

Решения этих уравнений могут оказаться особыми.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{5}$$

где левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u=u(x,y)$:

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \tag{6}$$

Общий интеграл

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид

$$u(x,y)=C. \tag{7}$$

Полный дифференциал функции $u=u(x,y)$ выражается формулой:

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{8}$$

Сравнивая (6) и (8), имеем:

$$P(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ Q(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{9}$$

Необходимое и достаточное условие для полного дифференциала

Необходимым и достаточным условием того, что левая часть уравнения (5) является полным дифференциалом некоторой функции, является выполнение равенства:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{10}$$

Порядок нахождения общего интеграла уравнения в полных дифференциалах

- Проверяем выполнение равенства (10).
- Интегрируем одно из равенств (9) по одной из переменных, например, первое равенство по x. Находим функцию $u=u(x,y)$ с точностью до функции, зависящей от другой переменной y.
- Дифференцируем полученную функцию $u=u(x,y)$ по второй переменной y.

• Подставляем полученное выражение во второе из равенств (9).
• Находим искомую функцию $u = u(x, y)$ для записи общего интеграла (7).

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большее число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАЗДЕЛЁННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $x^2 dx + y\,dy = 0$
2) $dx + xy\,dy = 0$
3) $\frac{x^2}{y-1}dx - ydy = 0$
4) $xdx + dy = 0$
5) $y\,dx + dy = 0$

2. ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $xdx + dy = 0$

1) $\frac{x^2}{2} + y = 0$
2) $\frac{x^2}{2} + y = C$
3) $x + y = C$
4) $x^2 + y = C$

3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $(x-2)dx + y\,dy = 0$

1) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$
2) $y^2 = C - (x-2)^2$
3) $y = \sqrt{C - (x-2)^2}$
4) $(x-2)^2 + y^2 = C$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $(x-y)dx + xdy = 0$
2) $y'\sin x - y\cos x = 0$
3) $xy' = y(\ln y - \ln x)$
4) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

5. ВЫРАЖЕНИЕ $(y^2+1)dx + xydy = 0$ ЯВЛЯЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С
1) разделёнными
2) разделяющимися
3) однородными

ПЕРЕМЕННЫМИ

6. ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $2xydx + dy = 0$

1) $x^2 + \ln|y| = C$
2) $x^2 + y = C$
3) $\ln x + y = C$
4) $\ln x + \ln y = C$
5) $y = Ce^{-x^2}$
6) $y = C + e^{-x^2}$

7. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y' + 2xy^2 = 0$

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - C}$
2) $x = \dfrac{C}{y^2 - 1}$
3) $x^2 = \dfrac{C}{y^2 + 1}$
4) $y = \dfrac{C}{x^2 + 1}$
5) $y = \dfrac{Cx - 1}{x}$

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $(x - y)dx + xdy = 0$
2) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$
3) $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3ydy = 0$
4) $y' + x^2y = x^2$

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ ЯВЛЯЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ

1) Бернулли
2) в полных дифференциалах
3) линейным
4) однородным

10. ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

1) $u(x,y) = C$
2) $u(x,y) = 0$
3) $u(x,y) + C = 0$
4) $xe^y - y^2 = C$

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ЯВЛЯЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ

1) $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$
2) $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$
3) $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$

Установите правильную последовательность:

12. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЁННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

□ — проинтегрировать дифференциальное уравнение

□ — записать общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения

13. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
$f_1(x)\cdot g_1(y)dx+f_2(x)\cdot g_2(y)dy=0$

□ — проинтегрировать дифференциальное уравнение

□ — получено ДУ с разделенными переменными

□ — разделить почленно уравнение на $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$

□ — получен общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения

14. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

□ — проверяется выполнение равенства $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

□ — интегрируется одно из равенств $P(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ или $Q(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ по одной из переменных, например, первое равенство по x. Находим функцию $u = u\ (x,y)$, с точностью до функции, зависящей от другой переменной y

□ — дифференцируем полученную функцию $u = u\ (x,y)$ по второй переменной y

□ — подставляем полученное выражение во второе из равенств

□ — находим искомую функцию $u = u\ (x,y)$ для записи общего интеграла

15. ВЫРАЖЕНИЕ $f_1(x)\cdot f_2(y)dx+g_1(x)\cdot g_2(y)dy=0$ ЯВЛЯЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С

1) разделёнными
2) разделяющимися
3) однородными

ПЕРЕМЕННЫМИ

16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ПРИВОДИТСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ С

1) разделёнными 2) однородными 3) разделяющимися

ПЕРЕМЕННЫМИ

17. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ ЯВЛЯЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ

1) однородным
2) в полных дифференциалах
3) с разделёнными переменными
4) Бернулли