МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУТИ ЭСТЕТИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Даглар Мамедярович Мамедяров,
директор МКОУ «Митаги – Казмалярская СОШ» Дербентского района Республики Дагестан, кандидат педагогических наук, г. Дербент

• *эстетическое воспитание* • *треугольные числа* • *селективное комбинирование*
• *селективное кодирование* • *селективное сравнение*

Весьма существенным компонентом педагогического процесса является эстетическое воспитание. Оно наиболее ярко осуществляется в таких предметах, как литература, музыка, изобразительное искусство. Эстетический потенциал математики в практике обучения часто недооценивается. Однако на протяжении веков пути математики и различных видов искусства нередко переплетались. Поэтому исторические сведения представляют благодатный материал для развития эстетического вкуса школьников.

Для эстетического воспитания на уроках математики обычно рекомендуют:
• показывать ученикам замечательную стройность формул, доказательств, красоту различных фигур, изящество связей между величинами;
• решать задачи и доказывать теоремы разными методами и сравнивать эти методы по оригинальности приемов.

К перечисленным рекомендациям необходимо добавить, что их выполнение облегчается, если привлекать исторические сведения. [4. с. 69].

В истории математики заложен не меньший эстетический потенциал, чем в самой науке. Приведем некоторые возможные пути его реализации. Сильное впечатление производит на ребят использование оригинальных формулировок задач, теорем, доказательств, известных из истории. Приведем задачу, решение которой доставит школьнику большое удовольствие.

Древнеиндийская задача

Есть кадамба-цветок.
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла
Вся в цвету сименгда,
И на ней пятая часть поместилась.
Разность их ты найди,
Её трижды сложи,
На кутай этих пчел посади.
Лишь одна не нашла
Себе места нигде,
Все летала то взад, то вперёд и везде
Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне, подсчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здесь собралось?

Ответ: 15 пчел.

Эстетическое воздействие на учащихся оказывает и привлечение сведений об истории создания некоторых терминов и символов. Школьникам будет интересно узнать, какие названия давали раньше теореме Пифагора, или о том, как именовали арифметические действия. В некоторых списках «Начал» Евклида теорема Пифагора называлась теоремой нимфы, по видимому, из-за сходства чертежа с бабочкой, поскольку словом «нимфа» греки называли бабочек. Нимфами греки называли еще и невест, а также некоторых богинь. При переводе с греческого арабский переводчик, вероятно, не обратил внимания на чертеж и перевел слово «нимфа» как «невеста», а не «бабочка». Так появилось название знаменитой теоремы – «теорема невесты». [4. с. 71].

Итальянский математик конца XV – начала XVI века Лука Пачиоли в трактате об арифметике приводит 8 различных способов умножения. Первый носит название «маленький замок». Второй способ носит не менее романтическое название «ревность» или «решетчатое умножение». Эти способы описаны в [5. с. 33]. «Такая решетка, — пишет Лука Пачиоли, — напоминает решетчатые ставни-жалюзи, которые вещались на венецианские окна, мешая прохожим видеть сидящих у окон дам и монахинь». Не менее привлекательны названия некоторых кривых. Например, кривая, уравнение которой в декартовых координатах имеет вид $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$, вошла в учебники под поэтическим названием «локон Аньези». Такое название было дано в честь замечательной женщины-математика Мария Аньези (1718–1799), изучавшей эту кривую в 1748 году. Очень большое значение для эстетического восприятия школьников имеет привлечение биографических сведений о математиках, об их разносторонних интересах и дарованиях. Известно, что многие известные математики сочиняли стихи. В эстетическом восприятии весьма популярен прием использования эстетических сведений межпредметного характера. Например, учителя часто рассказывают о том, как математика влияла на различные виды искусства: музыку, живопись, архитектуру. Сама природа математики представляет богатые возможности для воспитания у учащихся чувства красоты в широком значении этого слова. Такие свойства математических объектов, как симметрия, свойства правильных многоугольников, соотношение размеров фигуры, свойства натуральных чисел и т.п., способны пробудить у учащихся врожденное эстетическое чувство; и дело любого учителя математики там, где возможно, обращать на это внимание учащихся [3, с. 34]. Не менее важным в эстетическом отношении являются так называемые изящные решения какой-либо задачи, а также возможность проявления школьником собственного творчества в процессе изучения математики, в частности в процессе решения задачи [3. с. 35].

Решение задач становится доступным почти каждому школьнику, если учитель поощряет усилия учащегося в поисках оригинального или рационального решения задачи и если учитель постоянно оценивает найденные учащимися решения с эстетических позиций. В математике господствуют две стихии – числа и фигуры с их бесконечным многообразием свойств и взаимосвязей. Задача – это всегда поиск, раскрытие каких-то свойств и отношений. Внутренняя красота разнообразных свойств натуральных чисел всегда привлекает к ним многих любителей математики. Много интересных, красивых, полезных числовых соотношений, связей, результатов таится на тропинке наблюдений над натуральными числами, в том числе над фигурными числами. Например, учащимся не может не доставать эстетического удовольствия решение следующих уравнений в натуральных числах.

1. $abc = a^3+b^3+c^3$	10. $ab = a{\cdot}b+a+b$
2. $abc = (a+b+c)^3$	11. $abb{\cdot}cdd = bba{\cdot}dcc$
3. $ab = a^3+ a+b$	12. $aac{\cdot}bb=bbb{\cdot}a{\cdot}a$
4. $aa = a+a+a^3$	13. $ab–cd = a+b+c+d$
5. $ab = a^2+b^2+b$	14. $a{\cdot}b^3 = a^3{\cdot}b$
6. $ab = a{\cdot}b+b^2$	15. $ab–c = a{\cdot}b{\cdot}c$
7. $abc = ab^2–c^2$	16. $abc = ab^2+c$
8. $ab = a^2+b^2– (a+b)$	17. $ab = a^2+a+b$
9. $ab+ba = cd+dc$	18. $ab = a+b+b^2$

и т.д. [1, с. 354].

Поэтому считаем, что работа по изучению и обнаружению свойств натуральных (фигурных) чисел является одним из эффективных приемов по развитию эстетического восприятия учащихся. Такую работу можно организовать на факультативных и кружковых занятиях по математике. Мы в статье «Фреймовая исследовательская работа» приводим основные методы по получению «нового» знания. Это:

- селективное кодирование – умение выделять, что именно из имеющейся информации имеет ключевое значение;
- селективное комбинирование – умение соединять фрагменты информации, чтобы получить новые, неожиданное решение проблемы знаний;
- селективное сравнение – умение находить взаимосвязи текущей проблемы с чем-то уже известным, решение по аналогии;
- рекомбинации – умение представлять в новых, необычных сочетаниях уже известные элементы знания, образов.

Немаловажное значение при организации такой работы имеет структурирование полученной информации. То есть полученную информацию нужно грамотно, лаконично сформулировать на математическом языке. Полученную информацию можно сформулировать в виде красивой теоремы или записать в виде интересной задачи на доказательство, или же представить в виде интригующих уравнений, систем, записать алгоритм доказательств решений предложенных уравнений и систем.

Приведем примеры организации такой работы.

1. Варьируя треугольными числами учащиеся получают такие равенства:

$C^2_{n+1}+C^2_n$ (1) и $C^2_{n2+1}-C^2_{n2} = n^2$ (2). Складывая левые части, получают: $C^2_{n+1}+C^2_n+C^2_{n^2} = C^2_{n2+1}$ (3). Используя определение числа сочетаний, получают: $(n+1)^2+n^2-(n^2+1)^2+(n^2)^2 = n+1+n-(n^2+1)+n^2$. Введя новые обозначения $n+1 = x,\ n = y,\ n^2 = z,\ n^2+1 = d$ получают $x^2+y^2+z^2- d^2 = x+y+z-d$. Учащиеся полученную информацию структурируют в виде уравнения $x^2+y^2+z^2- d^2 = x+y+z-d$ в натуральных числах. Учитывая, что равенство (3) выполняется для любых натуральных чисел, некоторые учащиеся задачу на доказательство: докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2-d^2 = x+y+z-d$ в натуральных числах имеет бесконечное множество решений. Из конструкции этой задачи ясен алгоритм ее решения. Учащиеся грамотно, лаконично записывают алгоритм решения данного уравнения.

2. Учащиеся обнаружили, что для треугольных чисел выполняются равенства $C^2_{6n}-4C^2_{3n} = C^2_{3n}-9C^2_n$ (4).
Отсюда получают $C^2_{6n}+9C^2_n = 5C^2_{3n}$.
Или $(6n)^2-5(3n)^2+(9n)^2 = 6n-5\cdot(3n)+9n$. Введя новые обозначения $6n = x,\ 3n = y,\ n = z$, получают уравнение $x^2-5y^2+9z^2 = x-5y+9z$.

Учащиеся аккуратно записывают алгоритм решения данного уравнения. Сформулируют полученную информацию в виде следующей задачи.

Докажите, что существуют бесконечное множество натуральных чисел x, y, z, таких, что выполняется равенство $x^2-5y^2+9z^2 = x-5y+9z$.

3. Из чисел: a, $2a$, $4a$ составляют два выражения: $a^2-2(2a)^2+4(a)^2$ и $a+2(a)^2+4a$. Разделив первое выражение на второе, получаем $\dfrac{a^2-2(2a)^2+(4a)^2}{a+2(2a)^2+4a} = \dfrac{9a^2}{9a} = a$. Введя новые обозначения $a = x$, $2a = y$, $4a = z$ получают уравнение $\dfrac{x^2-2y^2+z^2}{x+2y+z} = a$, где a – любое целое число.

Учащиеся сформулируют следующую задачу: $\dfrac{x^2-2y^2+z^2}{x+2y+z} = a$ докажите, что любое натуральное число представимо в виде .

Учащиеся из чисел: α, 2α, 3α, 4α, составляют выражение:
$\dfrac{\alpha^2-(2\alpha)^2+(3\alpha)^2-(4\alpha)^2}{a-2a+3\alpha-4a} = \dfrac{-10\alpha^2}{-2a} = 5\alpha$. Введя новые обозначения $\alpha = x$, $2\alpha = y$, получают уравнение $\dfrac{x^2-y^2+z^2-d^2}{x-y+z-d} = 5\alpha$.

Из чисел: 2α, 3α, 4α, 5α составляют аналогичное выражение и введя новые обозначения x = 2α, $3\alpha = y$, $4\alpha = z$, $5\alpha = d$ получают:
$\dfrac{x^2-y^2+z^2-d^2}{x-y+z-d} = 7\alpha,$ а с помощью чисел таким же образом получают уравнение
$\dfrac{x^2-y^2+z^2-d^2}{x-y+z-d} = 9\alpha$.

Таким образом, они получают уравнения, где в правой части будут числа вида $(2n+1)\alpha$, то есть получают в общем виде уравнение
$\dfrac{x^2-y^2+z^2-d^2}{-y+z-d} = (2n+1)\alpha = A$ [2, с. 82].

Учащиеся лаконично записывают алгоритм решения данного вида уравнений.

1. Находим все нечетные делители числа A.
2. Находим n.
3. Находим α.
4. Находим x, y, z по формулам $x = (n-1)\alpha$, $y = na$, $z = (n+1)\alpha$, $d= (n+2)\alpha$.
5. Учащиеся обнаружили самостоятельно или с помощью учителя равенство $C^2_{n+4}- 2C^2_{n+1}+C^2_n = 4$. Это равенство верно для любых n.
Например: $C^2_6-2C^2_4+C^2_2 = 4$, $C^2_7-2C^2_5+C^2_3 = 4$, $C^2_8-2C^2_6+C^2_4 = 4$, $C^2_9-2C^{7}2+C_52 = 4$, и т.д.

Сравнивая левые части и используя определение числа сочетаний, учащиеся получают различные равенства.

Например: $C^2_6-2C^2_4+C^2_2 = C^2_8-2C^2_6+C^2_4$. Отсюда получают $C^2_6+2C^2_6+C^2_2 = C^2_6+2C^2_4+C^2_4$ или $3C^2_6+C^2_2 = 3C^2_4+C^2_4$. Используя определение числа сочетаний, получают: $3\cdot6^2+2^2-(3\cdot6+2) = 3\cdot4^2+8^2-(3\cdot4+8)$.

Получают систему $\begin{cases} 3\cdot 6^2+2^2 = 3\cdot 4^2+8^2 \\ 3\cdot 6+2 = 3\cdot 4+8 \end{cases}$

Так как, таким образом, можно получить бесконечное множество таких систем, учащиеся, введя переменные, получают систему вида $\begin{cases} 3x_1^2+x_2^2 = 3y_1^2+y_2^2 \\ 3x_1+x_2 = 3y_1+y_2 \end{cases}$.

Используя равенство $C_{n+2d}^2–2C_{n+d}^2+C_n^2 = d^2$ учащиеся получают $C_6^2–2C_4^2+C_2^2 = C_9^2––2C_7^2+C_5^2$. Отсюда $C_6^2+2C_7^2+C_2^2 = C_9^2+2C_4^2++C_5^2 = 4$. Далее $6^2+2\cdot 7^2+2^2–(6+2\cdot 7+2) == 9^2+2\cdot 4^2+5^2–(9+2\cdot 4+5)$.

Получают «числовое созвездие»:

$$\begin{cases} 6^2+2\cdot 7^2+2^2 = 9^2+2\cdot 4^2+5^2 \\ 6+2\cdot 7+2 = 9+2\cdot 4+5 \end{cases}.$$

Так как такие равенства можно получить бесконечное множество, учащиеся составляют систему:

$$\begin{cases} x_1^2+2x_2^2+x_3^2 = y_1^2+2y_2^2+y_3^2 \\ x_1+2x_2+x_3 = y_1+2y_2+y_3 \end{cases}.$$

7. Учащиеся для «конструкции» следующего «числового созвездия» воспользовались равенством $C_{n+3}^3–3C_{n+2}^3+3C_{n+1}^3–C_n^2 = 1$.

Это равенство верно для любого натурального n. Учащиеся сравнивают левые части этого тождества при различных n приходят, например:

$C_6^3–3C_7^3+3C_6^3–C_6^3 = C_9^3–3C_6^3+3C_7^3–C_6^3$.

Отсюда $C_8^3+3C_6^3+3C_8^3 = C_9^3+3C_7^3+3C_7^3+C_5^3$ или $4C_6^3+4C_6^3 = C_9^3+3C_7^3+6C_7{}^3+C53$. Используя формулу $n^3 = C_{n+1}^3+n,$ получают $4\cdot 7^3+4\cdot 5^3––(4\cdot 7+4\cdot 5) = 8^3+6\cdot 6^3+4^3–(8+6\cdot 6+4)$. Получают систему $\begin{cases} 4\cdot 73+4\cdot 53 = 8^3+6\cdot 6^3+4^3 \\ 4\cdot 7+4\cdot 5 = 8+6\cdot 6+4 \end{cases}$. Учащиеся выяснят, что эти числа удовлетворяют и уравнению $4\cdot 7^2+4\cdot 5^2 = 8^2+6\cdot 6^2+4^2$.

Учащиеся записывают задачу: решите систему уравнений:
$\begin{cases} 4x_1^3+4x_2^3 = y_1^3+6y_2^3+y_3^3 \\ 4x_1^2+4x_2^2 = y_1^2+6y_2^2+y_3^2 \\ 4x_1+4x_2 = y_1+6y_2+y_3 \end{cases}$ и т.д. [2, с. 256].

Важное значение при организации такой работы имеет научный метод-обобщение. При обобщении мысленно выявляют какое-нибудь свойство, принадлежащее множеству объектов и объединяющее эти объекты воедино. Приведем пример применения обобщения. Учащиеся на частных примерах обнаружили следующий факт $C_3^2–2C_2^2+C_1^2=1$. Думают, что получим, если номера чисел сочетаний 3, 2, 1 заменим на другую аналогичную последовательность. Проверяют $C_4^2–2C_3^2+C_2^2 = 1$, $C_5^2–2C_4^2+C_3^2 = 1$, $C_6^2–2C_5^2+C_4^2 == 1$ и т.д.

Учащиеся выдвигают гипотезу: должно выполнятся равенство $C_{n+2}^2–2C_{n+1}^2+C_n^2 = 1$. Используя определение числа сочетаний, доказывают это тождество. У учащихся возникает мысль, что получим, если заменим последовательности $n+2$, $n+1$, n на $n+4$, $n+2$, n? Получают следующие равенства $C_5^2–2C_3^2+C_1^2 = 4$, $C_6^2–2C_4^2 = 4$, $C_7^2–2C_2^5+C_3^2 = 4$ и т.д.

Учащиеся заметили, что в правых частях получается квадрат разности арифметической прогрессии. Они выдвигают гипотеза: должно выполняться равенство $C_{n+2\mathrm{d}}^2––2C_{n+\mathrm{d}}^2+C_n^2 = d^2$ и в общем виде доказывают это.

Учащиеся заметили в равенстве аналогию с биноминальными коэффициентами разложения $(a–b)^2$. Думают, получим ли мы подобные закономерности, если заменим коэффициенты 1, 2, 3 на 1, 3, 3, 1 (коэффициенты разложения $(a–b)^3$ и т.д. Проверяют при $d = 1$. Получают такие равенства $C_4^3–3C_3^3+3C_2^3–C_1^3 = 1$, $C_3^5–3C_4^3+3C_3^3–C_2^3 = 1$, $C_6^3–3C_5^3+3C_4^3–C_3^3 = 1$ и т.д.

Учащиеся выдвигают гипотезу: выполняется равенство $C_{n+3d}^3–3C_{n+\mathrm{d}}^3+3C_{n+\mathrm{d}}^3–C_n^3 = d^3$. В общем виде доказывают эти равенства. Далее проверяют справедливость этих равенств для коэффициентов разложения бинома для четвертой и пятой степеней. Получают и записывают в общем виде следующие тождества $C_{n+4d}^4–4C_{n+3d}^4+6C_{n+2d}^4––4C_{n+d}^4+C_n^4 = d^4$, $C_{n+5d}^5–5C_{n+4d}^5+10C_{n+3d}^5––10C_{n+2d}^5+5C_{n+d}^5–C_n^5 = d^5$ и т.д.

Само по себе разложение бинома очень красивая формула. Известно, что на надгробном камне могилы Ньютона высечена эта формула, в знак признания его заслуг. Большое значение в школьном курсе обучения математике имеет такой вид деятельности, как самостоятельное составление тех или иных математических задач. Работа по составлению задач представляет для учащихся особый интерес, так она является новой и сильно побуждающей их к самостоятельным исследованиям. В методической литературе известны работы, посвященные этому вопросу (например, у М.Б. Балка, С.Т. Берколайко, Э.Г. Готмана, Ю.М. Колягина, З.Ф. Сконеца, Н.М. Яглома и др.). Умение школьников составлять свои задачи является весьма ценным. На это справедливо указывает П.М. Эрдниев.

Успешная организация такой познавательной деятельности учащихся, как и любой, зависит от подготовленности самого учителя. Ему нужно организовать обсуждение работ учащихся. Учащиеся могут предложить для решения своих задач товарищам. Проводить конкурсы на лучшую задачу, красивую теорему, оригинальное доказательство и т.д.

Итак, к вышеперечисленным рекомендациям мы добавляем еще две:
• получение новой, неизвестной ему, то есть ученику информации (знания);
• структурирование полученной информации в виде красивой теоремы, интригующего уравнения или систем уравнений, составление задачи на доказательство.

«Конструирование» и решение задач развивают не только эстетическое восприятие, но и фантазию и воображение, самостоятельность и, конечно же, интуицию. Организация такой познавательной деятельности учащегося не только развивает чувство красоты, но и помогает создавать нечто красивое, оригинальное. ❑

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Балаян Э.Н.,* 1001 олимпиадная занимательная задачи по математике. Ростов – на – Дону: Феникс, 2008, 364 стр.
2. *Мамедяров Д.М.,* Неопределенные уравнения и их системы. Материал для внеклассной работы в общеобразовательной школе. Дербент 2013, 261 стр. Типография № 3.
3. *Огенесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Саннинский В.Я.* Методика преподавания математики в школе. Просвещение, 1980 г. 368 стр.
4. *Саввина О.А.* Эстетический потенциал математики // Математике в школе. – 2001. – № 3. – 90 с.
5. *Савин А.П., В.В. Станцо, А.Ю. Котова.* Я познаю мир. Детская энциклопедия: Математика. М.: ООО «Издательство АСТ-ЛТД». 1998, 480 стр.