Решение дифференциального уравнения. Задача Коши. Интегральные кривые

Для студентов технических вузов

Ирина Медведева,
Татьяна Черняева
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
chetn2005@yandex.ru

Решение дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения называют функцию $y = \varphi(x)$, определённую и непрерывную на интервале (a, b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно и обращающую это уравнение в тождество

$$F(x,\varphi(x), \varphi'(x),...,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Решение ДУ первого порядка

Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ (1) или (2) $y' = f(x, y)$ называют функцию $y = \varphi(x)$, определённую и непрерывную на интервале (a, b) вместе со своей производной y' и удовлетворяющую данному уравнению.

Интегральная кривая

График решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Задача Коши

Пусть при решении дифференциального уравнения заданы дополнительные *начальные условия*:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \ [y(x_0) = y_0] \ x = x_0 . \qquad (3)$$

Задача нахождения решения ДУ (1) – (2), удовлетворяющего начальному условию (3), называется *задачей Коши* для ДУ первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0, y(x_0) = y_0.$$

Общее решение ДУ первого порядка

Функция $y = \varphi(x,C)$ называется *общим решением* ДУ первого порядка (1), если она удовлетворяет условиям:

1) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной C;

2) при заданных начальных условиях можно подобрать такое значение произвольной постоянной C_0, при котором функция $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять этим условиям.

Общее решение дифференциального уравнения является результатом решения (интегрирования) данного уравнения.

Если при интегрировании уравнения явно выразить искомую функцию не удаётся, то выражение $\Phi(x, y) = C$ называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Частное решение ДУ первого порядка

Решение уравнения (1), полученное из общего при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$, называют *частным решением* этого уравнения.

Общее решение ДУ 1-го порядка — семейство (множество) интегральных кривых.

Частное решение — интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема Коши—Пикара (достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши)

Пусть правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) и имеет непрерывную в этой окрестности частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда уравнение $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, определённое в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Особое решение

Решение $y = \varphi(x)$, в каждой точке которого нарушается единственность задачи Коши, называется *особым* решением.

Особое решение не может быть получено из формулы общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном числовом значении произвольной постоянной C.

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большее число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:

1. ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ

1) интегрированием
2) дифференцированием

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

2. ЗАДАЧА КОШИ ЕСТЬ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО

1) начальным
2) граничным

УСЛОВИЯМ

3. РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ ОБЩЕГО ПРИ КОНКРЕТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ, ЕСТЬ РЕШЕНИЕ

1) задачи Коши
2) общее
3) частное

4. ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y' = \frac{1}{y^2}$ УСЛОВИЯ ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

1) нарушаются в каждой точке плоскости xOy
2) нарушаются на прямой $y = 0$
3) выполняются в любой точке плоскости xOy

5. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $y' = 2\sqrt{y}$

1) $y \geq 0$
2) $y > 0$
3) вся числовая ось

6. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ $y = \varphi(x)$, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ ДАННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) частным решением
2) общим решением
3) решением

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

7 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ИЗ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО

1) частного решения
2) общего решения
3) интеграла

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

8. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ЗАДАННОМУ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ, НАЗЫВАЮТ

1) интегрированием
2) задачей Коши
3) дифференцированием

9. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЕСТЬ

1) интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$
2) решение задачи Коши
3) семейство интегральных кривых
4) решение, полученное из общего при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$

10. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$ ЯВЛЯЕТСЯ РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1) $\frac{y^2}{2} = y'$

2) $\frac{2}{3}(xy' + y) = y$

3) $xy' + y = y^2$

11. РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $xy' - 2y = 6$ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $y = x^2 - 3$

2) $y = 2x + 1$

3) $y = 6x^2 + 1$

12. ФОРМУЛА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЛИНИИ ИЗ ЗАДАННОГО СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ $y = 3x + C$, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ $y(1) = 5$

1) $y = 3x - 2$
2) $y = 3x + 5$
3) $y = 3x + 2$

13. ФОРМУЛА, СООТВЕТСТВУЮШАЯ ЛИНИИ ИЗ ЗАДАННОГО СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ $y = x^2 + \frac{C}{x}$, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ $M_0(1;3)$

1) $y = x^2 + \frac{2}{x}$

2) $y = x^2 - \frac{2}{x}$

3) $y = x^2 + \frac{3}{x}$

Установите правильную последовательность

14. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

☐ — записать частное решение (частный интеграл)
☐ — используя начальное условие, найти значение C_0
☐ — найти общее решение (интеграл) уравнения