Методика

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений

Квантованный учебный текст с заданиями в тестовой форме для студентов технических вузов

Нина Банина,
Татьяна Черняева
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
chetn2005@yandex.ru

Линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,$$

где $y=y(x)$ — искомая функция, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — производные функции y, $a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_{n-1}(x),\ a_n(x)$ — известные непрерывные на интервале (a, b) функции.

Коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения

Функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_{n-1}(x),\ a_n(x)$ в левой части линейного однородного дифференциального уравнения называются *коэффициентами* этого уравнения.

Свойство решений линейного однородного дифференциального уравнения

Если функции $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_m = \varphi_m(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то любая линейная комбинация этих функций с произвольными постоянными $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$ также является решением этого уравнения.

Линейно зависимые решения линейного однородного дифференциального уравнения

Решения линейного однородного дифференциального уравнения $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_m = \varphi_m(x)$ называются *линейно зависимыми* на интервале (a, b), если существуют числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, причём хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$, для которых справедливо равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0$, $x \in (a, b)$.

Линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения

Решения $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_m = \varphi_m(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения называются *линейно независимыми* на интервале (a, b), если равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0$, $x \in (a, b)$, выполняется только тогда, когда $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_m = 0$.

Определитель Вронского

Определителем Вронского для функций $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots, y_m = \varphi_m(x)$ называется определитель вида

$$W(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения

Для того чтобы решения $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_m = \varphi_m(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения были линейно независимыми на интервале, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского для этих решений не был равен нулю ни в одной точке интервала (a, b).

Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения

Совокупность линейно независимых на интервале (a, b) решений $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения на интервале (a, b).

Замечание. Число решений, образующих фундаментальную систему решений, должно быть равно порядку линейного однородного дифференциального уравнения.

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых могут быть один, два, три и большее число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:

1. ФУНКЦИИ $a_1(x), a_2(x), ..., a_{n-1}(x), a_n(x)$ В ЛЕВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ НАЗЫВАЮТСЯ

1) коэффициентами
2) производными
3) искомыми функциями
4) решениями

2. ЛИНЕЙНОЕ ОДНОРОДНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ n-ГО ПОРЯДКА

1) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = b(x), \quad b(x) \neq 0$
2) $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$
3) $y''' - 2y'' + 5y' - y = 0$
4) $x^2 y'' + 2xy' - y = 0$
5) $y''' + y'' - 3y' = \sin x$

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА ОПРЕДЕЛЯЕТ СОВОКУПНОСТЬ

1) линейно независимых
2) линейно зависимых
3) определённых
4) неопределённых

РЕШЕНИЙ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ

4. ДЛЯ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ (a, b) РЕШЕНИЙ $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_m = \varphi_m(x)$ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО В КАЖДОЙ ТОЧКЕ ИНТЕРВАЛА (a, b)

1) равен нулю
2) не равен нулю
3) больше нуля
4) меньше нуля

5. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО ДЛЯ ФУНКЦИЙ
$y_1 = \varphi_1(x),\ \ y_2 = \varphi_2(x),\ \ ..., y_m = \varphi_m(x)$

1) $$W(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

2) $$W(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_m'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \cdots & y_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

3) $$W(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \cdots & y_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

6. РАВЕНСТВО $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m = 0$ СПРАВЕДЛИВО ТОЛЬКО ПРИ $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ ...,\ \alpha_m = 0$, ЕСЛИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ ...,\ y_m = \varphi_m(x)$ ЛИНЕЙНО
1) независимые
2) зависимые

7. РАВЕНСТВО $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m = 0$ СПРАВЕДЛИВО ХОТЯ БЫ ПРИ ОДНОМ α_i НЕ РАВНОМ НУЛЮ, ЕСЛИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ ...,\ y_m = \varphi_m(x)$ ЛИНЕЙНО
1) независимые
2) зависимые

8. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА СОДЕРЖИТ
1) больше n
2) меньше n
3) ровно n

ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ
РЕШЕНИЙ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ

9. СОВОКУПНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОБРАЗУЮЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ
1) $y_1 = 1,\ \ y_2 = e^{5x}$
2) $y_1 = \cos x,\ \ y_2 = 6\cos x$
3) $y_1 = e^{2x}\cos 3x,\ \ y_2 = e^{2x}\sin 3x$

Дополните:

10. ПУСТЬ ФУНКЦИИ $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_m = \varphi_m(x)$ ЯВЛЯЮТСЯ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ТОГДА ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$ ЯВЛЯЕТСЯ ________________ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ.

11. ЧИСЛО РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОБРАЗУЮЩИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ СИСТЕМУ РЕШЕНИЙ, РАВНО __________ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ.