ФРЕЙМОВАЯ «ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА» УЧАЩИХСЯ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Даглар Мамедярович Мамедяров, *директор МКОУ «Митаги — Казмалярская СОШ», «Социально-педагогический институт», кандидат педагогических наук, г. Дербент*

• фрейм • аналогия • треугольные и пирамидальные числа

В современной школе первостепенное значение отводится задаче развития у учащихся творческого мышления. Одним из способов развития творческого мышления является исследовательская деятельность.

Исследовательская деятельность школьников — это совокупность действий поискового характера, ведущих к открытию неизвестных фактов, теоретических знаний и способов деятельности. Одним из эффективных способов развития исследовательских умений является фреймовая форма организации познавательной деятельности учащихся.

Фрейм (в переводе с английского — рама) означает консолидацию разнородной информации, имеющей центром то или иное реальное явление, действие, событие, ситуацию, воспринятую психикой в ограниченных рамках пространства и времени. Фреймовая «исследовательская работа» заключается в сборе и структурировании информации о центральном объекте и его окружении. Основной задачей фреймовой «исследовательской работы» является вовлечение учащихся в самостоятельный поиск по добыче нового знания. Важно, чтобы учащиеся сами научились ставить проблемы, выдвигать идеи и выбирать направление поиска. Фреймовую «исследовательскую работу» можно изобразить в виде схемы. Так, например, можно изобразить фрейм, центром которого являются треугольные числа (рис. 1), треугольник (рис. 2), арифметическая прогрессия (рис. 3).

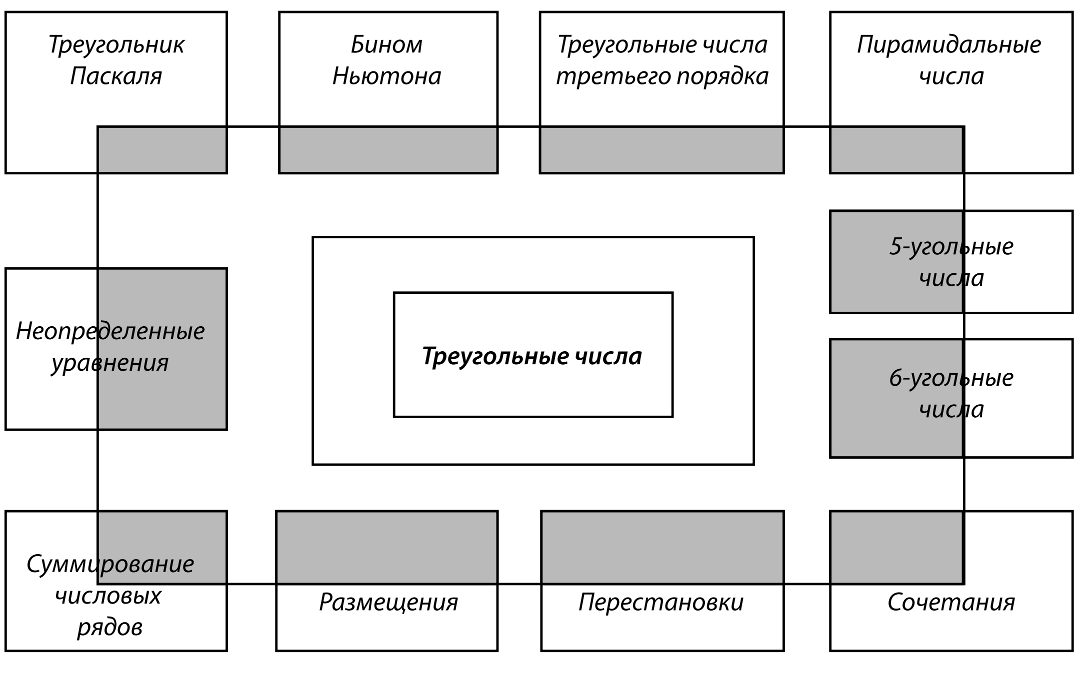


Рис. 1

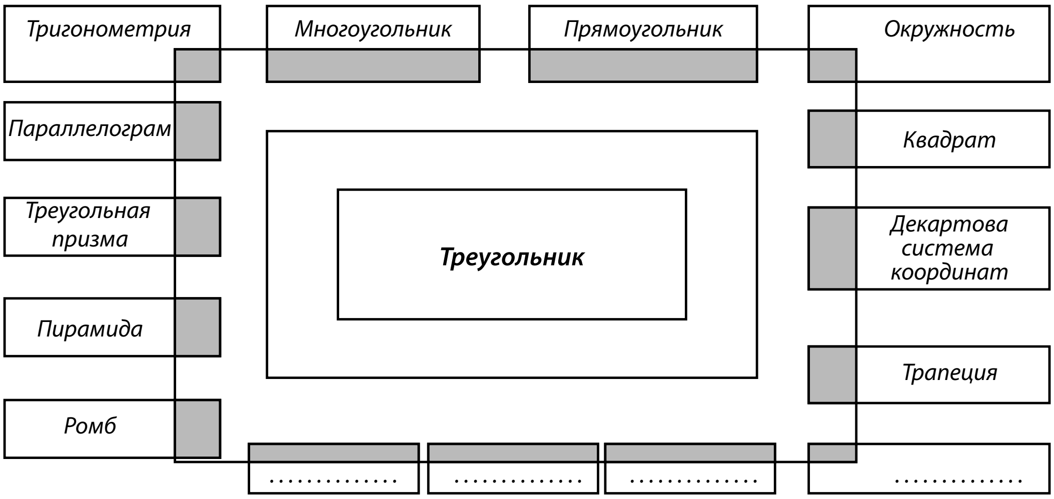


Рис. 2

Заштрихованная часть означает общность некоторых свойств, связывающая центр фрейма (в данном случае центральный объект — треугольник) с периферийными элементами фрейма (расширение и фон фрейма). Фреймовую «исследовательскую работу» можно проводить на любом другом материале, то есть центром может быть любой объект или теорема. Успех обучения во многом зависит от готовности учителя организовать и управлять познавательной деятельностью учащихся. То есть познавательная и творческая активность учащихся зависит от ряда факторов (субъективных и объективных), что во многом обусловлено методической и профессиональной подготовленностью педагога, его интеллектуальным и нравственным обликом, способностью быстро реагировать, адаптироваться к изменяющимся условиям, требованиям жизни и развивающейся науки сегодняшнего дня.

То есть учитель должен подходить к своей работе творчески, постоянно пополнять, совершенствовать свои знания и искусство преподавания, без которых невозможно рассчитывать на сколько-нибудь удовлетворительное обучение учащихся в современной школе. В противном случае, как утверждал Д. Пойа, учитель не сможет «…вдохновить, руководить, помочь или даже распознать творческую активность своих учеников».

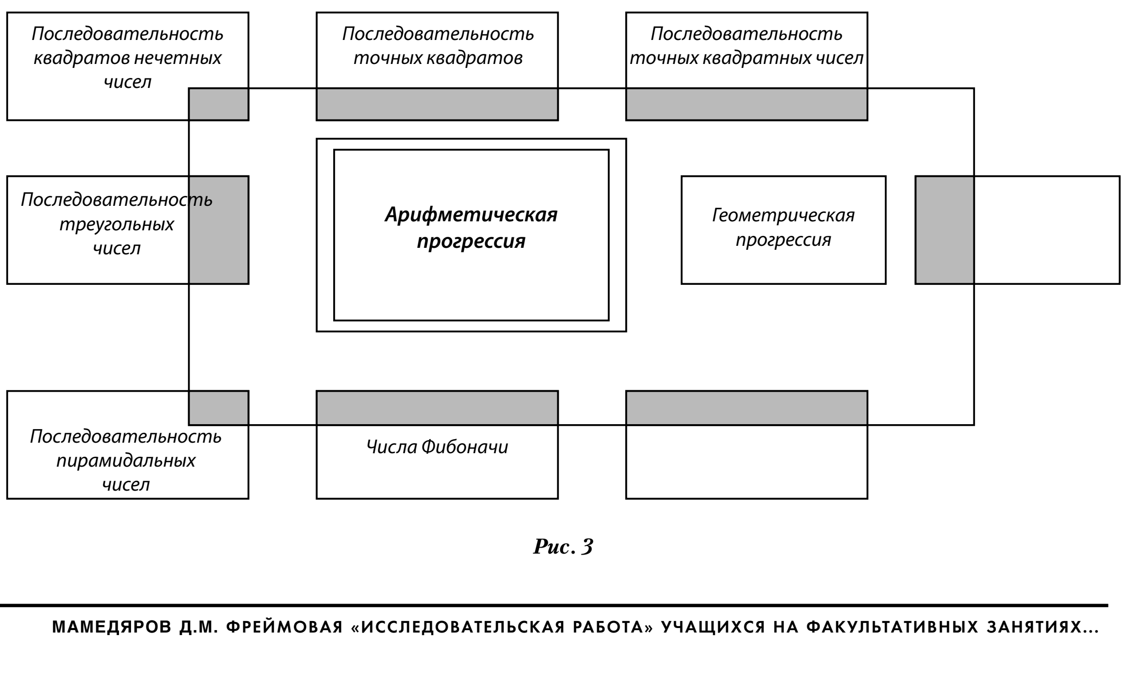


Рис. 3

Поэтому он должен:

1. Выбрать центральный объект фрейма для изучения, учитывая учебную программу данного класса, т.е. изученную программу на данный момент. Центром может быть объект, не изучаемый по программе. В этом случае учитель должен сообщить учащимся вспомогательные (базовые) сведения об объекте.

2. Определить уровень готовности к поисковой работе (актуализация знаний). Учащиеся записывают в тетрадь № 1 «Знаю» всё, что известно им об изучаемом объекте и его окружении (формулы, теоремы, определения, свойства и т.д.).

3. Сформировать творческие группы (2 или 3 группы).

4. Планировать работу, т.е. определить и сформулировать вместе с учащимися задачу каждой группы для самостоятельной работы. Учащиеся сами могут выбрать или определить проблему для изучения. Проблема должна касаться данного центрального объекта и его окружения.

5. Оказывать учащимся нужную помощь в их поиске; помочь им на математическом языке точно и лаконично записать гипотезы, полученные доказательства, свойства, тождества, формулы и так далее; полученную новую структурированную информацию нужно записать в тетрадь «Узнал».

6. Организовать обсуждение результатов (обмен информацией). Учащиеся должны выступить с защитой своих «открытий». Для этого можно организовать семинарские занятия.

7. Организовать конкурсы на «лучший вопрос», на «составление лучшей задачи». Учащиеся могут продолжать свои творческие поиски и дома, сообщать результаты в любое время учителю.

При организации фреймовой «исследовательской работы» учащиеся учатся ставить вопросы и самостоятельно искать решения. Для получения нового знания они используют не только известные им базовые знания, но и плоды собственных поисков.

Существуют различные приёмы и способы развития творческого мышления. Во всех диссертационных работах, касающихся развития творческого мышления, в основном придерживаются одной и той же структуры:

- Ставится некоторая задача.
- Данная задача преобразуется в серию взаимосвязанных проблем (динамических задач).
- Решая каждую проблему, приходят к решению поставленной задачи.

После решения данной задачи (или нескольких задач, которые касаются одного и того же объекта) переходят к решению другой задачи, которая не касается предыдущего объекта. При таком подходе развитие творческого мышления, а также исследовательских умений происходит медленнее. Успех решения любой задачи зависит от запаса знаний учащихся, но мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда знания, приобретённые на одном уроке, не работают на других. **Чем же отличается предлагаемый нами способ?**

Во-первых, перед учащимися мы не ставим конкретной задачи. Задача одна, общая — сбор информации, касающийся центрального объекта фрейма или его окружения, т.е. выдвижение и реализация творческих идей, получение новой информации.

Во-вторых, все задачи касаются центрального объекта (его свойств, элементов и т.д.). Вся информация всё время актуализируется в мышлении учащегося, поэтому хорошо закрепляется в памяти, т.е. запас знаний для проведения поисковой работы (решение задачи) больше, естественно, развитие творческого мышления идёт эффективнее. Мы считаем, что поисковая деятельность учащихся старшей ступени (10-11-е классы), направленная на развитие творческого мышления, должна проходить на стадии проведения самостоятельных исследований и в продуктивной концепции. Деятельность старшеклассников должна соответствовать III уровню (эвристический) и IV уровню (творческий) знаний. Только в этом случае исследовательская деятельность учащихся будет максимально приближена к уровню учёного-исследователя.

При фреймовой «исследовательской работе» учащихся осуществляются все три этапа творческой деятельности:

1. Постановка вопроса — проблемы — желание ученика получить неизвестную, интересную информацию.

2. Решение поставленной проблемы — получение нового знания. Можно сказать, что при фреймовой форме организации познавательной деятельности существует одна общая проблема — получение новой, интересной, неизвестной информации.

3. Реализация принципиального решения проблемы — структурирование и лаконичная запись полученной информации: тождеств, теорем, формулировки задачи и т.д.

Анализ характера умственной деятельности учеников на различных уроках, в разных классах показал, что лишь 15–20% учебного времени тратится на самостоятельную работу, при этом чем старше класс, тем меньше занимаются учащиеся различными видами самостоятельных работ. Упражнения по самостоятельному составлению задач, уравнений и их систем исчезают вовсе из стабильных учебников математики для 5–11-х классов.

Знания ученика будут прочными, если они не заучены механически, а являются продуктом собственных размышлений и проб и закрепились в результате его собственной творческой деятельности над учебным материалом.

Математический опыт учащегося нельзя считать полным, если он не имел случая решить задачу, изобретённую им самим, отмечал Д. Пойа. Эту важную роль самостоятельности мышления для дальнейшего приобретения и применения знаний отмечали многие известные учёные.

Так, академик С.Г. Сгрумилин в своих воспоминаниях писал, что сначала он решал содержавшиеся в журнале задачи, а затем сам стал корреспондентом журнала, отсылая туда самостоятельно составленные задачи и теоремы. «И хотя это было ещё весьма скромное творчество, – заключает он, – но всё же я считаю его началом научной самодеятельности». При организации такой работы мы на факультативных занятиях большое внимание уделяем поиску и обнаружению закономерностей, применению полученных знаний для получения новых, составлению задач.

Основными способами по приобретению нового знания и составлению задач выступают:

• Селективное кодирование (понимание того, что именно из множества имеющейся информации имеет ключевое значение).
• Селективное комбинирование (понимание того, как нужно соединить фрагменты информации, чтобы получить новое, неожиданное решение проблемы).
• Селективное сравнение (постижение взаимосвязей текущей проблемы с чем-то уже известным, решение по аналогии).
• Метод рекомбинации — представление в новых необычных сочетаниях уже известных элементов знания [1. с. 8].

Приведём пример «мини-исследовательской работы» на факультативных занятиях по математике, где центром фрейма являются треугольные числа.

Учащиеся, варьируя треугольными числами, обнаружили такой факт:

$$C_4^2 - 2C_3^2 + C_2^2 = 1, (6 - 2 \times 3 + 1).$$

Учащиеся думают: что получим, если 4, 2, 3 заменим на другую, аналогичную, последовательность. Проверяют:

$$C_5^2 - 2C_4^2 + C_3^2 = 1\ (10–2 \times 6+3);$$
$$C_7^2 - 2C_6^2 + C_5^2 = 1, (21–2 \times 15+10);$$
$$C_6^2 - 2C_5^2 + C_4^2 = 1, (15–2 \times 10+6);$$
$$C_8^2 - 2C_7^2 + C_6^2 = 1, (28–2 \times 21+15) \text{ и т.д.}$$

Учащиеся выдвигают гипотезу: должно выполняться равенство

$$C_{n+2}^2 - 2C_{n+1}^2 + C_n^2 = 1.$$

Используя определение числа сочетаний, т.е. формулу треугольных чисел:

$$\frac{n^2 - n}{2} = C_n^2,$$

в общем виде доказывают это равенство. Сравнивая правые и левые части этих равенств при различных переменных, учащиеся получают различные равенства.

У учащихся возникает мысль: что получим, если заменим наши последовательности на $n + 4$, $n + 2$, n? Получают следующие равенства:

$$C_6^2 - 2C_4^2 + C_2^2 = 4, (15–2 \times 6+1);$$
$$C_8^2 - 2C_6^2 + C_4^2 = 4, (28–2 \times 15+6);$$
$$C_7^2 - 2C_5^2 + C_3^2 = 4, (21–2 \times 10+3);$$

$C_9^2 - 2C_7^2 + C_5^2 = 4$, $(36–2 \times 21+10)$ и т.д.
$C_7^2 - 3C_4^2 + C_1^2 = 9$, $(21–2 \times 6+0)$;
$C_8^2 - 2C_5^2 + C_2^2 = 9$, $(28–2 \times 10+3)$;
$C_9^2 - 2C_6^2 + C_3^2 = 9$, $(36–2 \times 15+3)$;
$C_{10}^2 - 2C_7^2 + C_4^2 = 9$, $(45–2 \times 21+6)$ и т.д.

Учащиеся выдвигают следующую гипотезу: должно выполняться равенство

$$C_{n+2d}^2 - 2C_{n+d}^2 + C_n^2 = d^2.$$

И в общем виде доказывают это равенство.

По аналогии с предыдущими равенствами учащиеся вместо треугольных чисел вида C_n^2 применяют пирамидальные числа C_n^3. В ходе такой работы они получают:

$$C_5^3 - 2C_4^3 + C_3^3 = 3,\ C_6^3 - 2C_5^3 + C_4^3 = 4$$
$$C_7^3 - 2C_6^3 + C_5^3 = 5,\ C_8^3 - 2C_6^3 + C_4^3 = 20 \text{ и т.д.}$$

После проверки множества равенств учащиеся приходят к выводу, что должно выполняться равенство

$$C_{n+2d}^3 - 2C_{n+d}^3 + C_n^3 = d^2(n + d - 1).$$

Учащиеся в этих равенствах увидели аналогию с коэффициентами разложения бинома Ньютона. В данном случае с коэффициентами разложения $(a - b)^2$.

По аналогии с этим они проверяют выполняемость закономерности для коэффициентов разложения $(a - b)^m$ для различных натуральных.

Учащиеся проверяют и получают следующие равенства:

$C_6^2 - 3C_5^2 + 3C_4^2 - C_3^2 = 0$ $(15–3 \times 10+3 \times 6–3)$.
$C_7^2 - 3C_6^2 + 3C_5^2 - C_4^2 = 0$ $(21–3 \times 15+3 \times 10–6)$
$C_8^2 - 3C_6^2 + 3C_4^2 - C_2^2 = 0$ $(28–3 \times 15+3 \times 6–1)$
$C_{10}^2 - 3C_7^2 + 3C_4^2 - C_1^2 = 0$ $(45–3 \times 21+3 \times 6–0)$

Учащиеся делают вывод: должно выполняться равенство

$$C_{n+3d}^2 - 3C_{n+2d}^2 + 3C_{n+d}^2 - C_n^2 = 0$$

Учащиеся думают, что получим, если вместо коэффициентов 1, 3, 3, 1 поставим 1, 4, 6, 4; 1 — коэффициенты разложения. Получают:

$$C_5^2 - 4C_4^2 + 6C_3^2 - 4C_2^2 + C_1^2 =$$
$$= 0\ (10 - 4 \times 6 + 6 \times 3 - 4 \times 1 + 0).$$

$$C_6^2 - 4C_5^2 + 6C_4^2 - 4C_3^2 + C_2^2 = 0$$
$$(15–4 \times 10+6 \times 6–4 \times 3+1).$$
$$C_8^2 - 4C_6^2 + 6C_4^2 - 4C_2^2 + C_0^2 = 0$$
$$(28–4 \times 15+6 \times 6–4 \times 1+0) \text{ и т.д.}$$

Учащиеся приходят к выводу, что выполняется равенство

$$C_m^0 C_{n+md}^2 - C_m^1 C_{n+(m-1)d}^2 + C_m^2 C_{n+(m-2)d}^2 -$$
$$- C_m^3 C_{n+(m-3)d}^2 \dots = 0$$

По аналогии с этими тождествами учащиеся проверяют выполнимость данных закономерностей для пирамидальных чисел. Получают:

$C_8^3 - 3C_7^3 + 3C_6^3 - C_5^3 = 1$ $(56–3 \times 35+3 \times 20–10)$
$C_9^3 - 3C_8^3 + 3C_7^3 - C_6^3 = 1$ $(84–3 \times 56+3 \times 35-20)$ и т.д.

$$C_7^3 - 4C_6^3 + 6C_5^3 - 4C_4^3 + C_3^3 = 0$$
$$(35–4 \times 20+6 \times 10–4 \times 4+1)$$

$$C_8^3 - 4C_7^3 + 6C_6^3 - 4C_5^3 + C_4^3 = 0$$
$$(56–4 \times 35+6 \times 20–4 \times 10+4) \text{ и т.д.}$$

Учащиеся, изучая свойства треугольных чисел и варьируя данными, получают:

$$C_{11}^2 = C_{8+3}^2 = C_8^2 + C_3^2 + 8 \times 3 = 55,$$
$$C_{11}^2 = C_{7+4}^2 = C_7^2 + C_4^2 + 7 \times 4 = 55$$
$$C_{10}^2 = C_{4+6}^2 = C_4^2 + C_6^2 + 4 \times 6 = 45$$

и выдвигают гипотезу: должно выполняться равенство $C_{a+R}^2 = C_a^2 + C_R^2 + aR$

Используя определение числа сочетаний, C_n^2 доказывают это равенство [1, с. 123].

Тут сразу возникает другая проблема: можно ли выразить через такое равенство число C_{a-R}^2. Учащиеся приходят к тождеству

$$C_{a-R}^2 = C_a^2 - C_R^2 - R(a - R)$$

Далее учащиеся пытаются найти аналогичные тождества для пирамидальных чисел C_n^3 и приходят к равенству

$$C_{a+b}^3 = C_a^3 + C_b^3 + \frac{a+b-2}{2}ab$$

Например:

$$C_{5+3}^3 = C_5^3 + C_3^3 + \frac{5+3-2}{2} 5 \times 3 = 56$$

Рассмотрев пятиугольные числа, то есть числа вида, $C_{n+1}^2 + 2C_n^2$, где $n \in N$, учащиеся получают такие равенства:

$$П_1 = 1,\ П_2 = 5 = 2 + 3,$$
$$П_3 = 12 = 3+4+5,\ \ П_4 = 22 = 4+5+6+7,$$
$$П_5 = 35 = 5+6+7+8+9 \text{ и т.д.}$$

Учащиеся выдвигают гипотезу, что любое пятиугольное число под номером n можно представить в виде суммы n первых членов арифметической прогрессии с первым членом равным n . После доказательства этого утверждения в общем виде учащиеся по аналогии выдвигают гипотезу о том, что любое фигурное число второго порядка можно представить в виде таких сумм. Например, для шестиугольных чисел получают: $Ш_1 = 1$

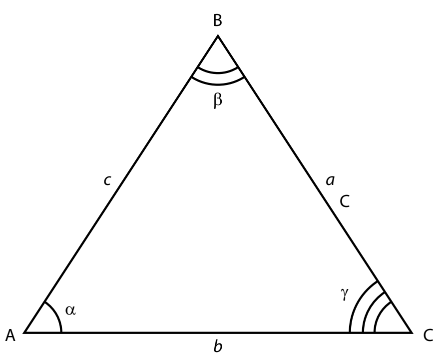
$$Ш_2=6=2+4,\ Ш_3=15=3+5+7,\ Ш_4=4+6+8+10=28$$
$$Ш_5 = 5+7+9+11+13 = 45 \text{ и т. д.}$$

Для семиугольных чисел получают:

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2 + 5 = 7$$
$$C_3 = 3+6+9 = 18,\ C_4 = 4+7+10+13 = 34$$
$$C_5 = 5+8+11+14+17 = 55 \text{ и т. д. [3, с. 128].}$$

Приведём пример фреймовой «исследовательской работы», где центром фрейма является треугольник.

Учитель: Вычислите площадь треугольника *A, B, C* по двум сторонам и углу между ними (черт. 4).



Черт.4

Учащиеся записывают:

$$S = {}^1/_2\ ac\ sin\ ß\ (1),\ S = {}^1/_2\ ab\ sin\ \gamma\ (2),$$
$$S = {}^1/_2\ bc\ sin\ \alpha\ (3).$$

Учитель: Выразите из этих формул синусы углов.

Учащиеся записывают:

$$sin\ ß = \frac{2S}{ac}\ (4),\ syn\ \gamma = \frac{2S}{2b}\ (5),\ sin\ \alpha = \frac{2S}{bc}\ (6).$$

Учитель: Найдите соотношение сторон треугольника к синусам противолежащих углов.

Учащиеся пишут:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\frac{2S}{bc}} = \frac{abc}{2S};\ \ \frac{b}{sin\ ß} = \frac{abc}{2S};\ \ \frac{c}{sin\ \gamma} = \frac{abc}{2S}.$$

Сравнивая правые части, учащиеся приходят к равенству

$$\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ ß} = \frac{c}{sin\ \gamma} = \frac{abc}{2S} \qquad (7)$$

и лаконично записывают результат в виде теоремы: **стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.**

Так как учащиеся знают, что,

$$\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ ß} = \frac{c}{sin\ \gamma} = 2R,$$

то сравнивая это с (7), получают: $\frac{abc}{2S} = 2R.$

Отсюда находят

$$R,\ R = \frac{abc}{4S} \qquad (8).$$

Полученный результат записывают в виде теоремы: **радиус описанной около треугольника окружности равен отношению произведения сторон учетверённой площади треугольника.**

Некоторые учащиеся из (8) могут выразить площадь треугольника: $S = \frac{abc}{4R}$ и записать результат в виде следующей теоремы: **площадь треугольника равна отношению произведения его сторон к учетверённому радиусу, описанного около него окружности.**

Учитель: Выразите из (1), (2), (3), стороны треугольника.

Учащиеся записывают:

$$a = \frac{2S}{c\ sin\ ß}\ (9),\ b = \frac{2S}{a\ sin\ \gamma}\ (10),\ c = \frac{2S}{b\ sin\ \alpha}\ \ (11)$$

Учитель: Что мы получим, если сложить эти равенства?

Учащиеся получают:

$$a+b+c = \frac{2S}{c\ sinß} + \frac{2S}{a\ sin\gamma} + \frac{2S}{b\ sin\alpha} = 2S\left(\frac{1}{c\ sinß} + \frac{1}{a\ sin\gamma} + \frac{1}{b\ syn\alpha}\right).$$

Отсюда

$$\frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{c\ sinß} + \frac{1}{a\ syn\gamma} + \frac{1}{b\ sin\alpha} \qquad (12).$$

Заметив, что $2S = r(a+b+c)$, где радиус вписанной окружности и поставив в (12) вместо $2S$ выражение $r(a+b+c)$, ученики получают:

$$\frac{P}{r(a+b+c)} = \frac{1}{c\,sin\beta} + \frac{1}{a\,sin\gamma} + \frac{1}{b\,sin\alpha} = \frac{1}{r} \quad (13)$$

Результат учащиеся записывают в виде теоремы: **для любой окружности, вписанной в треугольник со сторонами** a, b, c выполняется равенство

$$\frac{1}{c\,sin\beta} + \frac{1}{a\,sin\gamma} + \frac{1}{b\,sin\alpha} = \frac{1}{r}.$$

Один из учеников, заметив, что $R > r$ составит следующее неравенство:

$$\frac{1}{a\,sin\gamma} + \frac{1}{c\,sin\beta} + \frac{1}{b\,sin\alpha} > \frac{1}{R} \quad (14).$$

и записывает свою теорему: **для любого треугольника со сторонами** a, b, c **справедливо неравенство,**

$$\frac{1}{a\,sin\gamma} + \frac{1}{c\,sin\beta} + \frac{1}{b\,sin\alpha} > \frac{1}{R}$$

где радиус описанной около этого треугольника окружности.

Некоторые учащиеся перемножают (9), (10) и (11) и получают:

$$abc = \frac{2S}{c\,sin\beta} \times \frac{2S}{a\,sin\gamma} \times \frac{2S}{b\,sin\alpha} = \frac{8S^3}{abc \times sin\alpha \times sin\beta \cdot sin\gamma}$$

Далее

$$a^2b^2c^2 = \frac{8S^3}{sin\alpha \times sin\beta \times sin\gamma};$$

Отсюда находят произведение синусов внутренних углов треугольника:

$$sin\alpha \times sin\beta \times syn\gamma = \frac{8S^3}{a^2b^2c^2} \quad (15).$$

Формулируют и записывают теорему: **произведение синусов внутренних углов треугольника равно отношению увосьмиренного куба площади и к квадрату произведения его сторон.**

Учитель: Что получим, если предположим, что в (15) один из углов прямой?

Учащиеся: Пусть, к примеру α = 90°. Тогда равенство (15) будет иметь вид:

$$sin\beta \times sin\gamma = \frac{8S^3}{a^2b^2(a^2 + b^2)},$$

так как $sin 90° = 1$. Учитывая, что $S = {}^1/_2 ab$, получаем

$$sin\beta \times sin\gamma = \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{ab}{c^2}.$$

Учащиеся формулируют и записывают новую теорему: **в прямоугольном треугольнике отношение произведение катетов к квадрату гипотенузы равно произведению синусов его острых углов.**

Из (15) учащиеся выражают площадь ***S.***

$$S = {}^1/_2 \sqrt[3]{a^2b^2c^2\,sin\alpha \times sin\beta \times sin\gamma} = {}^1/_2 \sqrt[3]{(abc)^2} \times$$
$$\times \sqrt[3]{sin\alpha \times sin\beta \times sin\gamma} \quad (16).$$

Учащиеся формулируют и записывают новую теорему: **площадь треугольника равна половине произведения кубических корней от квадрата произведения сторон и произведения синусов внутренних углов.**

Вспомнив, что $\|sinx\| \leq 1$, и что $sin\alpha, sin\beta, sin\gamma$ не могут равняться 1 одновременно, учащиеся пишут:

$$\frac{8S^3}{a^2b^2c^2} < 1 \text{ или}$$

$$8S^3 < a^2b^2c^2 \quad (17).$$

Учащиеся формулируют и записывают теорему: **для любого треугольника выполняется неравенство** $8S^3 < a^2b^2c^2$.

Выражая из (17) $S < {}^1/_2 \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ учащиеся формулируют теорему: **площадь треугольника меньше половины кубического корня из квадрата произведения его сторон.**

Учитель: Из равенств (1) и (3) выразите a и b.

Учащиеся получают:

$$a = \frac{2S}{c\,sin\beta};\ b = \frac{2S}{c\,sin\alpha}.$$

Учитель: Найдите сумму и разность a и b.

Учащиеся получают:

$$a + b = \frac{2S}{c\,sin\beta} + \frac{2S}{c\,sin\alpha} = \frac{2S(sin\alpha + sin\beta)}{c(sin\alpha \times sin\beta)}$$

$$a - b = \frac{2S}{c\,sin\beta} - \frac{2S}{c\,sin\alpha} = \frac{2S(sin\alpha - sin\beta)}{c(sin\alpha \times sin\beta)}$$

Учитель: Найдите произведение $(a+b)(a–b)$.

Учащиеся получают:

$$a^2 - b^2 = \frac{4S^2(\sin^2\alpha - sin^2\beta)}{c^2(sin^2\alpha \times sin^2\beta)} \quad (18)$$

Учитель: Выразите из полученного равенства (18) площадь треугольника.

Учащиеся:

$$(a^2c^2 - b^2c^2)sin^2\alpha \times sin^2\beta = 4S^2(sin^2\alpha - sin^2\beta),$$

$$(2S)^2 = \frac{(a^2c^2 - b^2c^2)sin^2\alpha \times sin^2\beta}{sin^2\alpha - sin^2\beta}.$$

Отсюда

$$S = {}^1/_2\sqrt{\frac{c^2(a^2–b^2)(sin\alpha\cdot sin\beta)^2}{sin^2\alpha–sin^2\beta}} =$$

$$= {}^1/_2 c\ sin\alpha\cdot sin\beta\sqrt{\frac{a^2–b^2}{sin^2\alpha–sin^2\beta}} \quad (19).$$

Учащиеся формулируют «свою» теорему: **площадь треугольника равна половине произведения стороны и синусов прилежащих углов, умноженное на квадратный корень из частного разности квадратов двух других сторон и разности квадратов синусов противолежащих им углов.**

Учитель: Из прямоугольника А, В, С (рис. 1) найдите площадь.

Учащиеся получают следующие результаты.

$${}^1/_2 ah_a = {}^1/_2 ab\ sin\gamma = {}^1/_2 bc\ sin\alpha = {}^1/_2 ac\ sin\beta \quad (20)$$

$${}^1/_2 ch_c = {}^1/_2 ab\ sin\gamma = {}^1/_2 bc\ sin\alpha = {}^1/_2 ac\ sin\beta \quad (21)$$

$${}^1/_2 bh_b = {}^1/_2 ab\ sin\gamma = {}^1/_2 bc\ sin\alpha = {}^1/_2 ac\ sin\beta \quad (22)$$

[2. с. 174]

Учитель: Перемножьте левые и правые части этих равенств.

Перемножив их, учащиеся получают следующие равенства:

$$sin^3\gamma = \frac{ch_ah_bh_c}{a^2b^2} \quad (23)$$

$$sin^3\alpha = \frac{ah_ch_bh_c}{b^2c^2} \quad (24)$$

$$sin^3\beta = \frac{bh_ah_bh_c}{a^2c^2} \quad (25)$$

Учащиеся формулируют и записывают теорему: **куб синуса внутреннего угла треугольника равен произведению стороны и всех высот, деленное на квадрат произведения двух других его сторон.**

Далее, учитель просит сложит равенства 23, 24, 25. Сложив их, учащиеся получают:

$$sin^3\gamma + sin^3\alpha + sin^3\beta =$$

$$= h_ah_bh_c\left(\frac{c}{a^2b^2} + \frac{b}{a^2c^2} + \frac{a}{b^2c^2}\right) \quad (26).$$

Тут учащиеся формулируют и записывают теорему: **сумма кубов синусов внутренних углов треугольника равна произведению его высот на сумму отношений стороны к квадрату произведения двух других сторон.**

Некоторые учащиеся, заметив, что $sin\ x \leq 1$ могут сформулировать другую теорему: **отношение произведения любой стороны треугольника и его высот к квадрату произведения двух других сторон не больше 1.** [3. стр.8]

При организации такой работы, учащиеся могут «открыть» для себя очень много интересной информации.

Как видно, такая форма организации познавательный деятельности, является мощным средством для получения нового знания, для развития исследовательских умений и навыков учащихся. ❑

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Мамедяров, Д.М.* Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата педагогических наук. Астрахань 2010 г. – 21 стр.
2. *Мамедяров, Д.М., Вакилов, Ш.М.* Некоторые свойства соединений и фигурных чисел и их применение при решении задач. Дербент, 2006. — 228 с.
3. *Мамедяров, Д.М., Вакилов, Ш.М.* Как «открыть» свою теорему. Сборник статей по материалам LII Международной научно-практической конференции. Личность, семья и общество. // Вопросы педагогики и психологии. — № 5 (51). — СибАк, Новосибирск, 2015. — 166 с.