ФОРМИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА УУД ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Елена Николаевна Перевощикова,
декан факультета естественных, математических и компьютерных наук Нижегородского государственного педагогического университета имени Козьмы Минина, доктор педагогических наук, профессор

• **у***ниверсальные учебные действия и предметные умения • структура знаний • учебная деятельность • система заданий, адекватная структуре учебной деятельности • диагностические задания • рефлексивно-оценочная деятельность*

Ведущие целевые установки, выделенные в Федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС) основной школы, диктуют необходимость дальнейшего развития у учащихся личностных, регулятивных, коммуникативных и познавательных универсальных учебных действий (УУД) средствами всех предметов [6, 8]. Это означает, что в содержании, методах и технологиях обучения необходимо выделить потенциальные возможности каждого учебного предмета по формированию УУД в процессе освоения учениками предметных знаний и умений.

Учитывая, что основной единицей усвоения учебного материала является задание, а средством формирования УУД – учебная деятельность, выделим особенности построения процесса формирования этих действий при обучении математике.

Действие *целеполагание* в основной образовательной программе относится к регулятивным универсальным учебным действиям. Его освоение связано с формированием способности ставить новые учебные цели и задачи, планировать их реализацию, контролировать и оценивать свои действия как по результату, так и по способу действия, вносить соответствующие коррективы в их выполнение [1, 4, 9]. Поэтому с позиций деятельностного подхода основной педагогической задачей по формированию регулятивных умений в процессе обучения математике является задача включения ученика в учебную математическую деятельность. Однако чтобы ученик включился в учебную деятельность, он должен знать о средствах и способах выполнения математической деятельности, о самом процессе познания, иметь представление о том, как осуществляется поиск решения учебной задачи. Следовательно, успешность учебной деятельности во многом зависит не только от степени усвоения математических понятий, но и от степени усвоения метазнаний, то есть знания о знании.

Так, например, структуру знаний, связанных с изучением функции, до введения формально-логического определения функции определяют следующие компоненты: имя (термин); аналитическая и графическая модель, способы задания функции; реальные ситуации, моделью которых являются конкретные функции; свойства функции и типы задач.

После введения определения понятия функции в эту структуру следует добавить действие по определению понятия функции, что позволит расширить круг типовых задач, связанных с понятием функции. Знакомство учащихся с компонентами структуры знаний о функции, активное участие в построении дидактической модели изучения функции будут способствовать формированию таких познавательных универсальных действий, как систематизация, обобщение и конкретизация [5]. Поэтому важно, чтобы ученик перед изучением функции нового вида представлял себе весь спектр вопросов об изучаемой функции, мог сформулировать учебную задачу о необходимости выполнения действий, очерченных в структуре знаний о функции, и наметить пути её решения. По мере накопления знаний о функциях каждое действие может выполняться учеником с увеличением доли самостоятельности, раскрываться на разных уровнях полноты и глубины, обеспечивая предсказуемость действий ученика при изучении функции нового вида.

Приведём фрагмент урока, содержащий беседу учителя с учащимися и систему заданий по включению учеников в деятельность по формулировке учебных задач урока.

ФРАГМЕНТ УРОКА ПО ТЕМЕ «ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ», 9-Й КЛАСС

– В 7-х, 8-х классах и в начале 9-го класса мы изучали различные функции. У одних функций было имя, у других в качестве имени выступал вид, формула. Назовите имена или вид изученных функций. (Линейная функция, прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, квадратичная функция; функции вида $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{9 - x^2}$, и т. д.)

– Что значит изучить функцию? Что надо знать и на какие вопросы надо уметь отвечать при изучении функции? (Необходимо: знать имя функции или её вид (формулу); знать аналитическую и графическую модели функции и уметь их строить; знать реальные ситуации, которые можно описать с помощью функции; знать перечень свойств функции и уметь устанавливать свойства конкретной функции, уметь выделять типы задач, решаемых при изучении функции.)

Ответы на поставленные вопросы фиксируются в схеме 1, если она строится впервые. Если же подобная схема строилась ранее, то работа с ней на этом этапе урока позволяет актуализировать необходимые знания для изучения новых понятий.

– Имена функций вспомнили, давайте вспомним модели некоторых функций. Запишите, например, аналитическую модель линейной функции ($y = кx + в$, где $к \neq 0$). Что представляет собой графическая модель линейной функции $y = кx + в$, где $к \neq 0$? (Прямая, не параллельная осям координат.) Зная модель, мы можем указать реальный процесс, который она описывает, или, зная реальный процесс (ситуацию), можем построить её математическую модель.

Схема 1

Опишите, например, ситуации, если они представлены следующими математическими моделями. Какими могут быть значения y? Предполагаемые ответы приведены в следующей таблице.

Математическая модель	Ситуация	Некоторые значения переменной y
$y = 4x+2,\ x \in N$	Эта модель может, например, описывать ситуацию об отправлении телеграммы, где число 2 показывает стоимость бланка, число 4 – цена одного слова, y – стоимость телеграммы	6, 10, 14, 18, …
$y = 4x+2,\ x \in [0;3]$	Речь может идти о движении пешехода со скоростью 4 км/ч от заданной точки, находящейся от некоторого пункта на расстоянии 2 км, за указанный промежуток времени	[2; 14]
$y = 4x+2,\ x \in Z$	С помощью этой модели можно описать множество целых чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 2	… – 6, – 2, 2, 6, 10, …

– Что общего у этих функций? (Формула.) Чем отличаются функции, заданные одной и той же формулой? (Числовым промежутком, из которого берутся все значения независимой переменной, и множеством, которому принадлежат значения зависимой переменной.) Какой вывод можно сформулировать? Вывод: если функция задана некоторым правилом (формулой) $y = f(x)$, то важно знать, из какого множества берутся значения переменной x, какому множеству принадлежат значения зависимой переменной y.

– Как найти эти множества, как их называют? Остаются открытыми те же вопросы, если функция задана графиком. Следовательно, указывая имя функции, её модель для описания различных ситуаций, надо уметь находить множества X, откуда берутся значения независимой переменной, и множество Y, которому принадлежат все значения зависимой переменной. Значит, чтобы изучить функцию, надо знать не только правило (формулу, график), но и множества X и Y. Множество X называют областью определения функции, а множество Y – областью значений функции.

– Сформулируйте учебную задачу, которую нам предстоит решить. Учебная задача: установить, как найти область определения и область значений функции, если она задана формулой (несколькими формулами на разных промежутках) или графиком. Как записывают эти множества?

– Следовательно, сегодня на уроке мы конкретизируем и дополним некоторые пункты общей схемы изучения функции, в частности укажем новый тип задач – на нахождение области определения и области значений функции с учётом способа её задания.

Из приведённого фрагмента урока видно, что составленная ранее схема знаний о функции может служить основой для включения учащихся в учебную деятельность по конкретизации знаний, полученных ранее, а также для мотивации учащихся к изучению ключевых понятий, связанных с функцией, к выделению новых типов задач.

Далее приведём фрагменты урока, содержащие беседу учителя с учащимися и систему заданий по включению учеников в деятельность по открытию нового на основе использования структуры знаний о функции к изучению числовой последовательности, по формулировке учебных задач и поиску их решения.

ФРАГМЕНТЫ УРОКА ПО ТЕМЕ «ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ», 9-Й КЛАСС

– Проверим результаты выполнения следующих заданий из домашней работы.

1. В системе координат постройте графики функций:
1) $y = -0{,}5x + 3$, $0 \le x \le 8$;
2) $y = -0{,}5x + 3$, $x \in [0; +\infty)$;
3) $y = -0{,}5x + 3$, x – любое число;
4) $y = -0{,}5x + 3$, $x \in N$.

2. Назовите геометрическую фигуру, которую задаёт каждая из функций в задании № 1.

3. Что общего у функции $y = -0{,}5x + 3$, $x \in N$ с остальными функциями и чем она отличается от функций 1) – 3)?

В процессе проверки и обсуждения результатов выполнения первых трёх заданий из домашней работы необходимо проанализировать аналитическую и графическую модели каждой функции и выделить особенности функции $y = -0{,}5x + 3$, $x \in N$.

Цель этих заданий состоит в том, чтобы ученики приняли активное участие в «открытии» определения нового понятия «функция натурального аргумента», то есть выделили родовое понятие – функция, и указали видовое отличие – областью определения этой функции являются натуральные числа. После выполнения этих заданий можно ввести термин «функция натурального аргумента» и предложить ученикам дать определение этого понятия, перечислить вопросы, на которые надо ответить при изучении функции натурального аргумента (схема 1).

4. Осуществите перевод следующих ситуаций на математический язык:

4.1. Чтобы отправить поздравительную телеграмму, надо заплатить 10 рублей за бланк и по 2 рубля за каждое слово.

Сколько стоит телеграмма из одного, двух, трёх и более слов?

4.2. На счёт в банке положили А руб. под 2% годовых. Сколько денег будет на счету через год, через два, …., через $к$ полных лет?

Цель выполнения задания № 4 состоит в том, чтобы ещё раз обратить внимание учащихся на существование реальных ситуаций, моделью которых является функция натурального аргумента. В ходе выполнения этого задания важно установить: вид построенной модели и способы задания функций.

5. Используя результаты предыдущих заданий, представьте рассмотренные выше функции как функции натурального аргумента и запишите последовательно их значения в следующем виде: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$,….., $f(n)$, ….

1) $y = f(x)$, где $f(x) = – 0{,}5x + 3$, $x \in N$;
2) $y = f(x)$, где $f(x) = 10 + 2^x$, $x \in N$;
3) $y = f(x)$, где $f(x) = A{\cdot}1{,}02^x$, $x \in N$.

6. Что означает запись $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, ….., $y_n = f(n)$ в примере по отправлению телеграммы?

В заданиях № 5, 6 акцент сделан на записи значений функции натурального аргумента, на выяснении смысла таких записей, что позволяет ввести термин «последовательность» и уточнить, что речь идёт о числовой последовательности.

– С какими новыми понятиями мы познакомились на уроке? (Функция натурального аргумента; числовая последовательность.)

– Как они между собой связаны? (Члены последовательности являются значениями функции натурального аргумента.)

– Почему последовательность называют числовой последовательностью? (Функция натурального аргумента определена на числовом множестве, и её значения также являются числами.)

– Как можно назвать функцию натурального аргумента $y = f(x)$, $x \in N$? (Числовой последовательностью.)

– Сформулируйте определение нового понятия «числовая последовательность».

– Итак, нам предстоит изучить понятие **«Числовая последовательность».**

– Что значит изучить новое понятие, если оно определено как функция натурального аргумента? На какие вопросы надо уметь отвечать при изучении функции? Какова общая схема изучения функции? (Схема 1) Дополните схему так, чтобы показать связь новых понятий и учесть способ записи членов последовательности.

В ходе обсуждения схем, предложенных учащимися, может быть построена следующая дидактическая модель, анализ которой позволит сформулировать учебные задачи

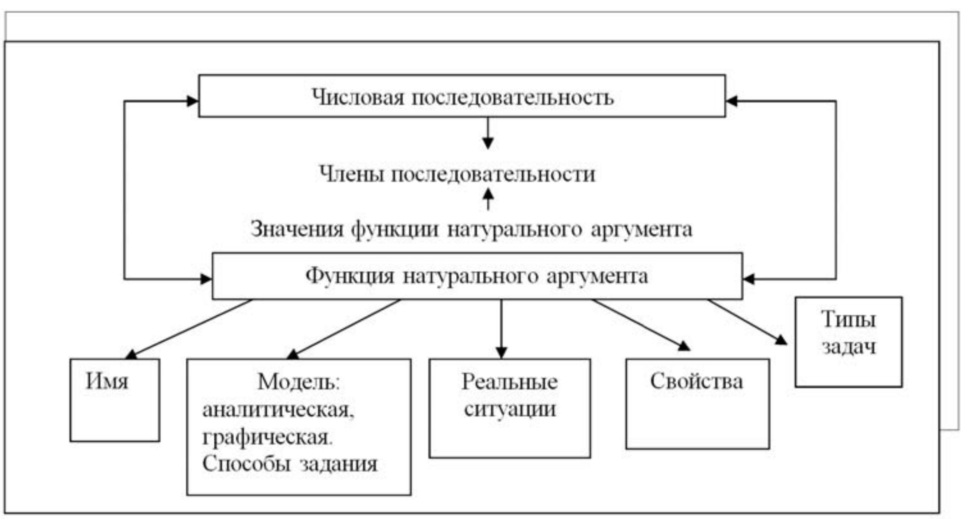

Схема 2. Дидактическая модель изучения темы «Числовые последовательности»

урока (схема 2). Ожидается, что ученики могут сами сформулировать учебную задачу урока.

Учебная задача: установить способы задания, реальные ситуации, типы задач и свойства числовых последовательностей, научиться работать с числовыми последовательностями.

В процессе решения учебной задачи, в частности по выделению типов задач, полезно использовать групповую форму работы или работу в парах. Организация такой работы способствует формированию коммуникативных универсальных учебных действий посредством приобретения опыта действовать с учётом позиции другого и согласовывать свои действия и позволит включить учащихся в поисковую исследовательскую деятельность. Основой для успешности такой работы по составлению типов задач является степень освоенности действия по выбору условия и соответствующего требования конкретного типа задачи. Если эта работа проводится впервые, то необходима инструкция по организации такой работы.

Приведём пример инструкции по составлению типов задач.

Инструкция. Тип задачи по теме определяется следующей структурой:

У – Б – С – Т, где У – условие задачи, Б – базис задачи (теоретическая основа для решения), С – способ решения, Т – требование задачи. Поскольку нам требуется определить только тип задачи по конкретной теме, то достаточно указать только условие и требование задачи.

Пример. Тип 1. Последовательность задана ……, требуется …

Ученикам предлагается сформулировать другие типы задач по теме «Числовая последовательность». Фактически по данной теме можно выделить ещё два типа задач:

– Тип 2. Дано описание некой ситуации, требуется установить …

– Тип 3. Даны две последовательности, требуется установить …

Все остальные задачи сводятся к выделенным трём типам.

В ходе обсуждения предложенных вариантов важно обратить внимание учащихся на то, что на основе задачи первого типа можно составить довольно много конкретно-практических задач. Их количество определяется как выбором условия – способом задания последовательности, так и конкретизацией требований. Например, если последовательность задана аналитически, то можно потребовать:
а) записать несколько членов последовательности;
б) построить график;
в) установить свойства (монотонность, ограниченность);
г) установить, является ли данное число членом последовательности; найти номер, под которым стоит заданное число в последовательности;
д) определить вид линии, на которой лежат все точки, соответствующие членам последовательности;
е) перейти от одного способа задания последовательности к другому;
ж) записать формулу n-го члена;
з) найти закономерность в построении членов последовательности и выразить последующий член через предыдущий.

После формулировки каждой конкретно-практической задачи полезно предлагать учащимся найти похожую задачу в задачнике. Таким образом, в результате подобной работы у учащихся останутся записи типа задачи, её конкретизация и соответствующие номера упражнений из задачника. Организация подобной работы по составлению типов задач является непременным условием формирования умения учиться, которое с позиции ФГОС является важным метапредметным результатом обучения.

Выделенные выше универсальные учебные действия (формулировка определения понятия, учебных задач, составление типов задач по теме и их конкретизация) служат основой для эффективного освоения собственно предметных умений по работе с последовательностями в процессе выполнения конкретно-практических заданий, приведённых в учебнике и задачнике. Ученикам предлагается вновь вернуться к инструкции по составлению типов задач и с учётом базиса начать поиск способа решения для выделенных типов и конкретно-практических задач. Этот этап, как правило, носит репродуктивный характер. Однако и здесь можно предусмотреть задания, способствующие поддержанию интереса к изучаемой теме и решаемой на уроке проблеме. После выполнения каждой группы конкретно-практических задач ученикам можно предложить сформулировать выводы (эвристики), в которых отражаются новые способы деятельности [2, 4, 7].

Для включения учащихся в деятельность по подведению итогов урока полезно использовать работу диагностического характера. Её содержание определяется целями и задачами урока [9, 10]. Она должна, с одной стороны, позволить учителю выявить проблемы в усвоении учебного материала, оценить достигнутые результаты, а с другой стороны – помочь ученику оценить свои достижения, установить знания и умения, которых ему недостаёт, чтобы выполнить конкретные задания в работе.

Приведём пример такой работы, состоящей из трёх частей. После выполнения каждой части следует проверить результаты, исправить ошибки и подвести соответствующие итоги урока.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

Часть 1. В заданиях 1–5 заполните пропуски.

1. Числовой последовательностью по определению называется …….

2. Чтобы изучить понятие числовой последовательности, необходимо знать, что называют числовой последовательностью; уметь выделять реальные ситуации, математическими моделями которых являются последовательности; и научиться выполнять следующие действия: …

3. Перечислите свойства, которыми могут обладать последовательности …

4. Можно ли соединять точки, построенные на координатной плоскости, если аналитическая модель последовательности имеет вид:

$$y = -0{,}5x + 3,\ x \in N?$$

5. Если последовательность задана формулой, то можно найти …

Часть 2. Оцените свою готовность к решению задач, выполнив следующее задание. Ниже приведены пять задач по теме «Числовые последовательности». Прочитайте их внимательно и поставьте в листе самооценки напротив номера задачи знак «+», если знаете, как её решать. Если сомневаетесь или не знаете способ решения задачи, то поставьте напротив соответствующего номера знак «–».

1. Последовательность задана перечислением первых её четырёх членов: 1, –1, –3, –5, … Установите закономерность в построении последовательности и запишите следующий член последовательности.

2. Первый член последовательности равен 8. Запишите следующие четыре члена последовательности, если каждый её член, начиная со второго, в 2 раза меньше предыдущего.

3. Последовательность задана формулой $y_n = n^2 - 2$. Является ли число 3 членом этой последовательности?

4. Что надо добавить к условию $a_{n+1} = 3a_n$, чтобы однозначно задать последовательность?

5. Выберите рисунок, на котором изображён эскиз графика функции натурального аргумента, все значения которой, начиная со второго, на 3 больше предыдущего. Обоснуйте кратко свой выбор, указывая выполнимость названных условий, по каждому рисунку.

Часть 3. Решите любые три задачи из второй части работы, напротив номера которых поставили знак «+» в листе самооценки.

Охарактеризуем выделенные части работы и дадим краткие комментарии по её оцениванию. Для оценки выполнения каждого задания в первой и третьей частях можно использовать дихотомическую шкалу: 1 балл выставляется за верный ответ, а 0 баллов – за неверный ответ. Для фиксации результатов контрольно-оценочной деятельности полезно использовать лист самооценки, который ученики оформляют в своих тетрадях (блокнотах для проверочных работ) через копировальную бумагу. Это позволит учителю быстро просмотреть результаты выполнения второй части работы, пока ученики решают выбранные задачи. Ниже приведён пример листа самооценки, в котором представлен один из вариантов его заполнения.

ЛИСТ САМООЦЕНКИ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

Первая часть работы направлена на проверку знаний по ключевым моментам темы. Анализ результатов можно провести фронтально, предлагая ученикам назвать ответы. Заметим, что по этой части, как и по всей работе, важно не только оценить результаты, но и обсудить ответы учеников, выделить задания, вызвавшие у них затруднения. Максимально за эту часть работы ученик может получить 5 баллов, то есть по баллу за каждое верно выполненное задание.

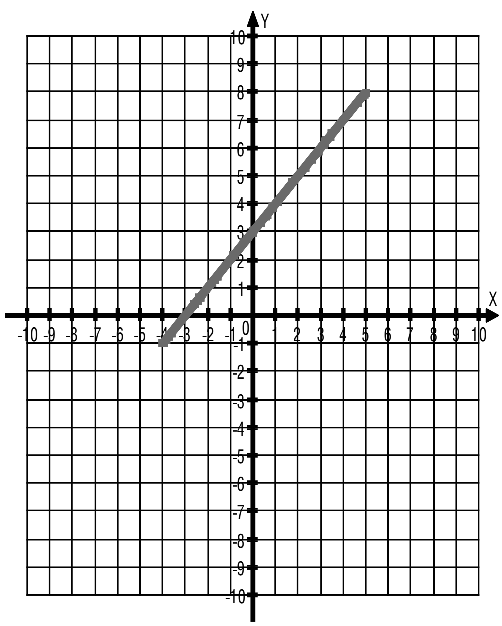

Рис. 1а

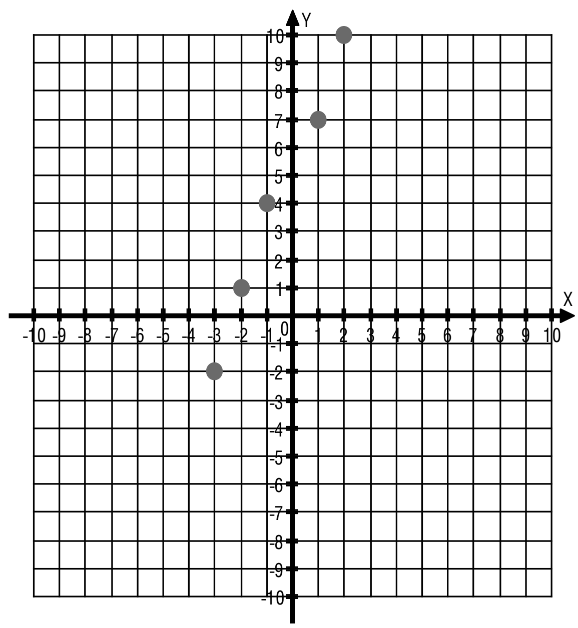

Рис. 1б

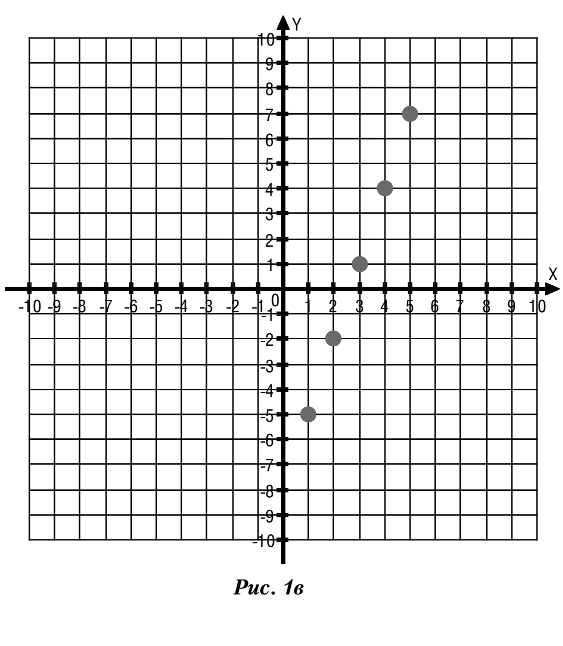

Рис. 1в

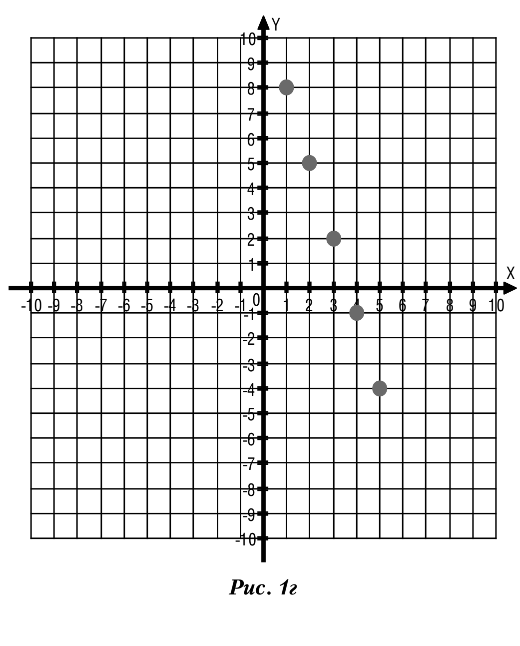

Рис. 1г

Лист самооценки «Проверь себя»

Часть	1	2	3	4	5	Итого
1	1	1	0	1	1	4
2	+	-	+	-	+	3 (+)
3	+		-		+	2
Сопоставление результатов	+		⊗		+	

Вторая часть содержит задание, направленное на осуществление каждым учеником рефлексии выполненных действий. Результаты этой части ученики отмечают соответствующими знаками в листе самооценки, и они не обсуждаются, а сдаются учителю на проверку. Это позволит оперативно получить информацию о задачах, с которыми предполагает справиться большая часть учащихся, а также выделить задачи, вызвавшие затруднения.

К проверке результатов выполнения третьей части работы полезно привлечь учеников, предложив им обменяться тетрадями. Для организации этой работы важно подготовить образцы выполнения заданий и сообщить ученикам правило оценивания. За выполнение этой части работы максимальный балл равен 3. После заполнения листа самооценки можно предложить ученикам выявить имеющиеся расхождения между самооценкой и оценкой результатов. Так, из приведённого выше примера заполнения бланка следует, что самооценка завышена в задании № 3 из второй части работы. Это означает, что ученик не умеет устанавливать, что заданное число не является членом последовательности, ни одним из рассмотренных на уроке способов, а это значит, что соответствующая цель урока не достигнута.

Рассмотренный выше этап оценки результатов важен тем, что именно здесь ученики могут убедиться в том, что субъективная оценка, которую они выставили, характеризуя свои возможности, может не совпадать с оценкой их реальной подготовки. Поэтому анализ результатов на этом этапе диагностики предполагает дополнительные разъяснения и уточнения новых элементов содержания, в том числе при подведении итогов урока. Кроме того, анализ заданий, в которых были допущены ошибки, может служить основой для включения в домашнюю работу индивидуальных заданий похожего типа.

Более детальный анализ результатов диагностической работы учитель проводит после урока, проверяя вторую и третью части работы. Полученные данные полезно фиксировать в специальном журнале, в котором выписаны формируемые в теме универсальные учебные действия и предметные знания и умения. Регулярное заполнение такого журнала позволит отслеживать динамику формирования ключевых компетенций учащихся, проектировать следующие уроки, опираясь на реальный уровень подготовки учащихся, своевременно корректировать учебно-воспитательный процесс.

Таким образом, можно сформулировать следующие условия по формированию УУД при обучении математике в основной школе:

- построение системы знаний об изучаемом математическом объекте и выявление её структуры;
- включение учащихся в деятельность в процессе решения специально подобранной системы заданий, адекватной учебной деятельности по изучению математических объектов;
- построение системы диагностических заданий, обеспечивающих включение учащихся в рефлексивно-оценочную деятельность и позволяющих учителю отслеживать динамику формирования УУД и предметных умений. ❑

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асмолов А.Г.* Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / [А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская, Н.Г. Салмина, С.В. Молчанов]; под ред. А.Г. Асмолова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 159 с.
2. *Боженкова Л.И.* Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии / Л.И. Боженкова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 205 с.

3. *Епишева О.Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя / О.Б. Епишева. – М.: Просвещение, 2003. – 223с.
4. *Иванова Т.А.* Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.
5. *Перевощикова Е.Н.* Диагностика в процессе обучения математике: Монография / Е.Н. Перевощикова – Н. Новгород: НГПУ, 2010. – 172 с.
6. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа / [сост. Е.С. Савинова]. – М.: Просвещение, 2011.
7. *Саранцев Г.И.* Методология методики обучения математике / Г.И. Саранцев. – Саранск: Красный октябрь, 2001. – 144 с.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. [Электронный ресурс: http://base.garant.ru/55170507/.]
9. *Фридман Л.М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 2000.
10. *Якиманская И.С.* Технология личностно-ориентированного образования в современной школе / И.С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 2000. – 176 с.