К ПРОБЛЕМЕ ПРИОБЩЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ К НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Сергей Рувимович Когаловский, *профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук, askogal@yandex.ru*

• фундаментальные математические понятия • процессы освоения • мета-модель • феноменологическая редукция • научная деятельность

Растёт число работ, посвящённых приобщению школьников к научно-исследовательской деятельности в области математики, физики, истории, биологии и т. д. При ознакомлении с рядом таких работ создаётся впечатление, что слова «научная работа школьников» используются в них как методический термин (хоть преамбулы в них говорят об ином), обозначающий методы и приёмы, направленные на совершенствование учебной деятельности, или разработки, посвящённые углублённому изучению тех или иных тем, входящих в программу, или приобщение школьников к тому или иному кругу вопросов, не входящих в программу соответствующего учебного предмета, но «примыкающих» к ней. Как отмечают многие учёные, в процессах научной и учебно-познавательной деятельности имеется много общего. А отнесение к этому общему очевидных общих условий, общих средств, общих компонентов научной и учебной деятельности приводит авторов ряда публикаций к пониманию этих форм деятельности как почти тождественных, тем более что образовательный план является необходимым компонентом самой научно-исследовательской деятельности. Ведь исследователь обучается, осваивая и развивая свои же достижения, изучая достижения коллег, исследуя возникающие гипотезы, и т. д.

Однако авторы этих работ едва ли согласятся, например, с тем, что мытьё колб и пробирок в химической лаборатории является научной работой, поскольку оно направлено на обеспечение чистоты химических экспериментов, и с тем, что работа сантехника, скажем, в Институте математики Российской Академии Наук является научной деятельностью в области математики, так как она обеспечивает работникам Института необходимые условия исследовательской деятельности (в здании Института)[1]. При всей полезности в методическом отношении многих из этих работ, знакомясь с ними, трудно не задаться вопросом: как при подобном приобщении школьников к научной деятельности избежать превращения их в антиподов одного из героев известной притчи, полагающих, что созидание храма – это всего лишь работа каменщика. Как способствовать их превращению из «каменщиков» в «архитекторов», из каменщиков своего интеллекта в его архитекторов?

Одна и та же математическая задача в одних контекстах может представать как относящаяся к текущему производственно-техническому вопросу, в других – как связанная со значимой научной проблемой. Приобщение учащихся к научной деятельности можно успешно осуществлять и посредством обращения к типичным школьным задачам, вызывая в них звучание научных «обертонов» посредством рассмотрения их в контексте тех *целостностей*, которые имеют значимые черты научной деятельности. Для формирования продуктивных средств приобщения к такой деятельности недостаточно исходить из того, что научная деятельность и учебная деятельность в школе имеют много общего, абстрагируясь от того, что у них ещё больше существенных различий. Для этого необходимо учитывать их особенности, особенности используемых ими средств и условий, в которых они осуществляются, учитывать их ведущие планы, их цели.

[1] Так же как они не согласятся с утверждением одного из героев М. Зощенко, что главный в театре – осветитель.

Говоря о приобщении школьников к научно-исследовательской деятельности, *например, в математике*, имеют в виду, как правило, тех из них, кто проявляет математические способности. Но (отнюдь не в противовес этой позиции) обратимся к следующему вопросу: в какой мере возможно и в какой целесообразно приобщение *всех* учащихся старших классов, в том числе учащихся гуманитарных классов, на уроках, например, математики к научно-исследовательской деятельности в области математики, такое, которое отвечало бы задачам и целям общего образования, а значит, способствовало бы общему интеллектуальному развитию учащихся, развитию их способностей к поисково-исследовательской деятельности в широком понимании? Какое содержание и какие формы поисково-исследовательской деятельности наилучшим образом отвечали бы этим задачам? Подчеркнём: поставленный вопрос связан с приобщением учащихся к научно-исследовательской деятельности в рамках школьного курса математики. Но каким для этого должен быть школьный курс математики? Какой характер обучения он должен предполагать? Какое содержание этого курса должно ему отвечать?

Впрочем, так ли уместно здесь слово «например», если сообразовываться с тем, что развиваясь и как «часть физики» (И.В. Арнольд), математика всё более становится областью знания, предметом которой являются общие формы, *мета-формы*, поисково-исследовательской деятельности, её стратегий, её общие способы, *мета-способы*, то есть *метапредметный* план[2], если этому должны отвечать содержание и дух школьного курса математики и если это делает особыми место и роль математического образования в рамках общего образования?

Фундаментальные математические понятия образуют несущий каркас математики. Исторические процессы их становления, укоренения и развития образуют несущий каркас процесса развития математики. Обучение математике только тогда несёт общее интеллектуальное развитие, только тогда развивает способности к поисково-исследовательской деятельности в широких рамках, когда оно ведёт к освоению фундаментальных математических понятий как орудий и «средств производства» поисково-исследовательской деятельности, к выявлению их метапредметной природы, а за осуществляемыми процессами их формирования, освоения и развития – общую логику процессов формирования, освоения и развития орудий и «средств производства» поисково-исследовательской деятельности. То есть когда это обучение воплощает онтогенетический подход к обучению[3], следующий принципу от неразвитого целого – к развиваемому и преображаемому целому, принципу, предполагающему рассматривать детали, частное в контексте развиваемых целого и общего.

Ведущим средством воплощения этого подхода является осуществление процессов формирования фундаментальных математических понятий как ***моделей*** представлений, протопонятий, являющихся их историческими или конструируемыми истоками и представляющих в интуитивной или полуинтуитивной форме первомеханизмы математической деятельности, участие школьников в этих процессах как исследователей и «открывателей».

Человеческое мировосприятие, человеческое мышление, человеческая деятельность пронизываются моделированиями. Ведь знания о вещах не имманентны им. Знания «не являются и результатом простой регистрации наблюдений. Процесс познания невозможен без структурации, осуществляемой благодаря активности субъекта»[4]. Знания о вещах формируются как их модели.

А значит, предмет познавательной деятельности, предмет всякой деятельности, не сам по себе, но вместе с ним и её субъект со своим инструментарием должны рассматриваться как образующие единую систему, развивающуюся вместе со своими компонентами. И потому *субъектный план* дол-

[2] *Когаловский С.Р.* Место и роль метапредметной деятельности в обучении математике // Школьные технологии. – 2014. — №3. — С. 71–77.

[3] *Когаловский С.Р.* О ведущих планах обучения математике // Педагогика. — №1. — 2006.— С. 39–48; *Когаловский С. Р.* К проблеме модернизации математического образования // Школьные технологии. — 2011. — №6. — С. 93–99.

[4] *Пиаже Ж.* Психогенез знаний и его эпистемологическое значение // Семиотика. — М.: Радуга, 1983. — С. 90.

жен играть не вторичную, а ведущую роль и в дидактических исследованиях, посвящённых моделированию[5], и в посвящённых ему методических разработках. Это отвечает пониманию роли моделей и самого моделирования как всего того, что создаётся путём самопреобразований *деятеля* в процессе осуществляемой им деятельности[6]. Моделирование – это сложная рефлексивная деятельность, это взаимодействия субъекта и предмета деятельности, это опосредованное представление взаимоотношений между объектом и его моделью, это и языки, и «технологии» поисково-исследовательской деятельности, и навыки такой деятельности. Всё это говорит и о том, что всякая наука является гуманитарной, что традиционное разделение наук на естественные и гуманитарные основано не столько на различии стратегий научной деятельности, сколько на различии их предметов.

Анализ исторических процессов становления, укоренения и развития фундаментальных математических понятий приводит к формированию ***мета-модели****,* или *схемы,* этих процессов, выражающей их внутреннюю логику и развивающиеся средства с «внешних», метапредметных позиций.

Генезис культуры, или культурный филогенез, порождает изменение траектории культурного онтогенеза школьников, его логики. Чем дальше уходит первый, тем больше расходится с его логикой логика второго (в противоположность закону Геккеля), несущая возможность более многомерного, более далеко идущего развития его личности[7]. Но при всём различии характеров научной и учебной деятельности, при всём различии условий, в которых они протекают, при всём различии исторических процессов становления фундаментальных математических понятий как полифункциональных орудий поисково-исследовательской деятельности и процессов учебной деятельности при онтогенетическом подходе к обучению математике у этих процессов должна быть общая мета-модель. Выявление и «очищение» ретроспективным анализом внутренней логики названных исторических процессов несёт осознание природосообразности обучения математике, следующего ***мета-логике*** этих процессов, являющейся логикой процессов развития когнитивных механизмов поисково-исследовательской деятельности, выступающих как орудия математической деятельности и как её «средства производства». Общая мета-модель должна основываться на этой мета-логике. Процесс обучения математике должен строиться так, чтобы учебная деятельность учащегося не уподоблялась деятельности учёного, не имитировала её (к чему устремляются многие методисты), но следовала этой мета-логике, мета-логике научно-исследовательской деятельности, мета-логике учёного. И потому в обучении математике (и далеко не только математике) должен использоваться не генетический подход в традиционном понимании, следующий «предметным» логикам исторических процессов, а подход, следующий этой мета-логике. Таков онтогенетический подход.

Со сказанным естественно сопоставить тезис Дж. Брунера «Школьник, изучающий физику, является физиком, и для него легче изучать науку, действуя подобно учёному-физику»[8]. (Естественно полагать, что под лёгкостью изучения он понимал легче достижимую его эффективность.) Но поскольку речь идёт об общем образовании и общем интеллектуальном развитии учащихся, то отвечающее целям такого образования и такого развития продуктивное обучение, например, физике должно быть таким, чтобы школьник действовал не столько как физик, сколько как мета-физик. Такое обучение способствует приобщению школьника к общим формам и способам поисково-исследовательской деятельности, а тем самым и лучшему приобщению к физике. Такое обучение не может не предполагать ведущей роли метапредметного плана.

Исследования исторических процессов становления, укоренения и развития фундаментальных математических понятий явля-

[5] А это требует сплетения в таких исследованиях эпистемологического анализа с когнитивистским и психологическим.

[6] *Вартофский М.* Модели. Репрезентация и научное понимание. — М.: «Прогресс», 1988.

[7] *Когаловский С.Р.* Развивающее обучение математике как преображающее обучение. — Иваново: Изд-во «Иваново». — 2010.

[8] *Брунер Дж.* Процесс обучения. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.

ются отправной базой для решения задач проектирования учебной деятельности, направленной на освоение учащимися этих понятий как носителей множества функций, а в первую очередь – как носителей продуктивных стратегий поисково-исследовательской деятельности. Обращение к таким задачам, исследование природы трудностей освоения учащимися фундаментальных математических понятий способствуют выявлению скрытых планов, направлявших исторические процессы их становления и укоренения. Всё это делает продукты решения такого рода задач моделями этих исторических процессов, продуктивными в когнитивистском и эпистемологическом планах. Из таких моделей легче «экстрагировать» искомую мета-модель, несущую возможность в эпистемологическом анализе этих процессов видеть и исследование методологии обучения математике, а в последнем – и эпистемологический анализ этих исторических процессов.

Математические знания должны осваиваться как имеющие двуипостасное существо, как предметные и как метапредметные знания. В качестве объекта математики как учебного предмета естественно и продуктивно рассматривать саму математическую деятельность, а в качестве её предмета – фундаментальные математические понятия, выступающие как её идеальные орудия и «средства производства».

Сценарии занятий со школьниками должны представлять идеальные формы процессов становления и освоения этих понятий. Сама учебная их направленность, их ориентированность на формирование механизмов поисково-исследовательской деятельности с учётом тех контекстов, в рамках которых это формирование предполагается осуществлять, осознание и воплощение внутренней логики процессов восхождения учащихся к фундаментальным понятиям (чему способствует исследование природы трудностей их освоения), достижение максимально возможной свёрнутости проектируемых процессов восхождения и, конечно же, их соотнесение с основательно изучаемыми историческими процессами становления фундаментальных математических понятий делает такие сценарии-проекты эффективными моделями не только учебной деятельности, но и этих исторических процессов. Анализ таких моделей – это и осуществляемый «изнутри» анализ процессов *моделирования.* Это взаимодействие анализа таких процессов «изнутри» и анализа их «извне», несущее к тому же возможность углублённого исследования моделирования в математике.

Ядром задачи разработки продуктивного подхода к освоению фундаментальных математических понятий является задача разработки моделей процессов восхождения к ним от протопонятий, или «житейских понятий», являющихся их истоками, как перехода «в новый и высший план мысли» (Л.С. Выготский). Такие процессы не могут не быть многостадийными, сопровождающимися преображениями учебной деятельности, то есть коренными изменениями её содержания, формы, направлений и самих её целей. Это процессы, движимые развиваемым ими творческим пониманием. Освоение формируемых ими понятий сопровождается развитием культурного понимания[9] и, что ещё более важно, развитием культурного понимания на метапредметном уровне. Оно сопровождается и нарастанием потенции развития творческого понимания. Осуществление таких процессов предполагает многомерную и многоуровневую учебную деятельность, более сложную, чем бытующие сегодня её формы. Но это не значит, что такая деятельность более трудна для учащихся. Сложность той или иной формы деятельности и трудность её освоения – это не одно и то же.

Процессы освоения фундаментальных математических понятий должны выстраиваться и как процессы, направленные на своё «само»-постижение, на постижение логики своего развёртывания и тем самым как процессы восхождений на метапред-

[9] В смысле В.П. Зинченко. «Культурное понимание предполагает наряду с извлечением смысла из ситуации его знаковое оформление, означение и возможность трансляции. Его полнота и адекватность удостоверяются не столько … действием, но прежде всего сообщением, текстом, которые должны соответствовать… предмету понимания… Творческое понимание предполагает наряду с извлечением, означением и трансляцией смысла порождение и оформление нового смысла. Здесь речь идёт уже не столько об адекватности действия или воспроизведения оригиналу – предмету понимания, сколько о произведении смысла и нахождении новой текстовой, знаковой, иконической, символической формы». (*Зинченко В.П.* Психологические основы педагогики (психолого–педагогические основы построения системы развивающего обучения Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). — М. : Гардарики, 2002. — С. 280.)

метный уровень. Они должны быть направлены на постижение учащимися как субъектами такой деятельности своего познающего «Я». А значит, они должны быть процессами осуществления *феноменологической редукции*, близкой к феноменологической редукции в смысле Э. Гуссерля. Начальной стадией таких процессов должна быть *феноменолого-психологическая редукция*, близкая феноменолого-психологической редукции в смысле Гуссерля, осуществляющей поворот от восприятия мира «в естественной установке» к сосредоточению на самих переживаниях сознания. Она состоит в том, что объектами рассмотрения становятся не столько сами исходные объекты, сколько их *остраняемое* восприятие в смысле В.Б. Шкловского[10], то есть «не приближение значения к нашему пониманию, а создание особого восприятия предмета, выведение его из "автоматизма восприятия", позволяющее взглянуть на обычное необычным взглядом, увидеть в нём нечто странное, новое, заставляющее думать». Ведь «становясь привычными, действия делаются автоматическими. Так уходят, например, в среду бессознательно-автоматического все наши навыки… В результате «обавтоматизации» вещь проходит мимо нас как бы запакованной, мы знаем, что она есть, … но видим только её поверхность… При процессе алгебраизации, обавтоматизации вещи получается наибольшая экономия воспринимающих сил: вещи или даются одной только чертой своей …, или выполняются как бы по формуле, даже не появляясь в сознании». Понятие остранения, рассматриваемое единственно в искусствоведческих исследованиях, в действительности является далеко не только искусствоведческим понятием. Оно представляет общий метод познания.

Следующая стадия направлена на «уточнение» содержания протопонятия, приводящее к определению строгого понятия. Это стадия осуществления *эйдетической редукции*, близкой к эйдетической редукции в смысле Гуссерля, осуществляющей переход от рассмотрения переживаний в их индивидуальности к «усмотрению их сущностей«, или «переход от фактов к усмотрению сущностей». *Эйдетическая редукция,* активизируемая работой *феноменолого-психологической редукции*, «очищает» субъективность, приводит её к формированию определения строгого понятия как чёткой рациональной формы, направляющей сознание на «схватывание сущности», стоящей за исходными представлениями. Эта форма как форма знаковая способствует соответствующей настройке сознания, его «очищению». «Направленность знака извне внутрь, во-первых, и связанную с этим реконструкцию и объективацию «внутреннего», его вынесение вовне, во-вторых»[11] – вот раскрытый Выготским механизм, помогающий «очищению» субъективности. «Объективация» – вот ключевое слово, выражающее превращение субъективности в субъектность.

Использование формально-логических средств способствует «очищению» сознания и порождает метаморфозу продукта уточнения в продукт творческого акта, в понятие, имеющее иное содержание и предполагающее иную позицию рассмотрения, в понятие, относящееся к иному смысловому пространству. Тем самым завершается работа *эйдетической редукции* по «очищению» субъективности, то есть по восхождению на метапредметный уровень и построению метапредметной модели рассматриваемого протопонятия. Та чёткая рациональная форма, которая является продуктом *эйдетической редукции*, та знаковая форма, в которую она облекается, подготавливает прорыв в идеальный мир, в мир «сущностей», в котором субъективность, прошедшая «очищение», становится развитой *субъектностью,* и тем самым осуществляется *трансцедентальная редукция,* подобная трансцендентальной редукции в смысле Гуссерля. (То, что обычно понимают под сущностью фундаментального математического понятия, не есть сущность протопонятия, моделью которого оно является. Она формируется, развивается и преображается вместе с самим понятием. Последнее же выражает способ действий, представляющий эту сущность. *Эйдетическая редукция* является началом восхождения от прото-сущности протопонятия к одному из вариантов сущности, а именно к сущности формируемого строгого понятия, являющегося вариантом продуктивной модели про-

[10] *Шкловский В.Б.* Гамбургский счёт. — М.: Советский писатель, 1990.

[11] *Эльконин Б.Д.* Введение в психологию развития. — М., 1994. — С. 9.

топонятия. *Трансцендентальная редукция,* приводящая к построению такого варианта, а тем самым к началу качественно новой ситуации, закладывает начало процесса формирования и развития его сущности, происходящего вместе с укоренением сформированного понятия в практике математической деятельности, с развитием практики его использования и приводящего к преображению этого понятия, которое ведёт к преображению практики и формированию более высокой сущности преображённого понятия[12].)

Феноменологическая редукция является эффективным инструментом формирования фундаментального понятия как продуктивной модели протопонятия, являющегося его истоком, как «выразителя» его сущности, как его идеальной формы. Выступая как превращённая форма протопонятия, эта модель рождает преображение внутренней формы математической деятельности. Тем самым *феноменологическая редукция* является орудием формирования идеальных орудий математической деятельности, служащих одновременно средствами обоснования продуктов использования этих орудий и средствами развития этой деятельности, ведущего к её преображению. Впрочем, это орудие (как и феноменологическую редукцию в смысле Гуссерля) настолько же естественно называть редукцией, насколько и работу скульптора, «очищающего» глыбу мрамора от «посторонних» кусков.

Строгие понятия, являющиеся продуктами *феноменологической редукции*, участвуя в математической деятельности как её орудия, «очищая» и преображая её, не сводят эту деятельность к работе «чистого сознания». Включённость интуиции в работу мышления, участие в этой работе многих языков и многих логик, их синергия – это работа далеко не только «чистого сознания». Творческие продукты работы мышления, их «агенетичность» являются продуктами работы далеко не только «чистого сознания». Они являются продуктами взаимодействий «высших» и «низших» форм мышления, чистого созерцания и прагматики. Они несут новый материал, новую задачу для *феноменологической редукции*, подготавливающей прорывы на новые уровни математической деятельности.

В истории математики, в процессах становления и развития математических теорий усматривается стадиальность, близкая стадиям *феноменологической редукции*. Это говорит о том, что последняя является природосообразным инструментом[13].

Описанная схема осуществления *феноменологической редукции* является общей мета-моделью исторических процессов восхождения к фундаментальным математическим понятиям от протопонятий, являющихся их истоками, и процессов восхождения учащихся к этим понятиям, отправляющихся от протопонятий, являющихся их историческими или конструируемыми истоками. В одной из наших статей[14] приводится сценарий процесса формирования строгого понятия предела последовательности. Он может служить примером использования этой мета-модели.

Использование в обучении этой мета-модели приближает деятельность учащихся к научно-исследовательской деятельности. Более того, оно приближает их учебную деятельность к научной деятельности многопоколенного коллектива выдающихся учёных по формированию орудийных оснований математики, по формированию её «средств производства». Оно приближает к постижению высокой эстетической и прагматической ценности продуктов этой деятельности и способствует формированию потребности в такой деятельности, а тем самым способствует и формированию способностей к ней. Ведь «для формирования любой … способности нужно прежде всего создать жизненную потребность в определённом виде деятельности…»[15]. Наконец, использование этой мета-модели отвечает за-

[12] Сказанное может быть выражено и так: «Сущность», облачённая в «чистую» форму, как бы становясь самой этой формой, обретает потенцию «само»-развития. При использующем механизм моделирования соотнесении с (соответствующим) предметным содержанием она обретает метапредметный характер по отношению к себе самой и посредством этого реализует потенцию «само»-развития. Это ведет к её преображению в более «высокую сущность».

[13] Использование этого инструмента и открывает возможность, и делает не просто целесообразным, но необходимым следование принципам, о которых говорится в нашей статье «К проблеме модернизации математического образования» // Школьные технологии. — 2011. — № 6. — С. 93–99.

[14] *Когаловский С.Р.* Понятие модели и математика. Ч. II // Школьные технологии. — 2013. — №5. — С. 65–74.

[15] *Рубинштейн С.Л.* Бытие и сознание. — М.: Изд. АН СССР. — 1957. — С. 294.

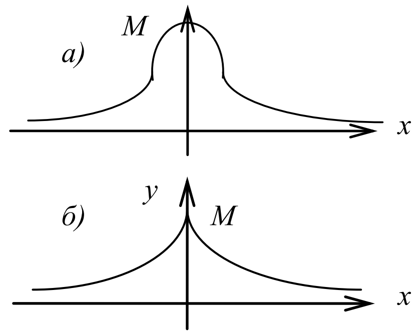
дачам и целям общего образования, способствуя общему интеллектуальному развитию учащихся, развитию их способностей к поисково-исследовательской деятельности в широком понимании. Ведь «знания, за которыми не стоит аналитико-синтетическая, обобщающая работа мысли <учащегося>, – это формальные знания. Когда говорят, что <учащийся> не открывает, а лишь усваивает уже добытые человечеством знания, то это значит лишь то, что он не открывает их для человечества, но лично для себя он всё же должен их открыть»[16]. А открывая их для себя, он развивает свои способности к поисково-исследовательской деятельности.

В одной из наших статей[17] приводится сценарий процесса формирования строгого понятия предела последовательности. Он может служить примером использования этой мета-модели. Далее будет приведён сценарий процесса формирования понятия касательной к кривой, который, как мы надеемся, может служить не менее выразительным тому примером. Обращения к этой мета-модели несут прояснение важных вопросов стратегического уровня, относящихся к обучению математике. Также далее будет осуществлено первичное рассмотрение вопросов о роли и месте использования компьютеров в обучении математике.

Приводимый конспект сценария занятий со школьниками, направленных на формирование строгого понятия касательной, демонстрирует способ восхождения от интуитивных представлений, от протопонятий к строгим математическим понятиям как носителям эффективных методов решения широкого круга задач. Схема осуществления феноменологической редукции служит мета-моделью описываемого в сценарии процесса.

1. Задача 1 поможет усмотреть естественность задачи восхождения к строгому понятию касательной к кривой.

Задача 1. *Гладким или заострённым является график функции* $y = \frac{1}{1+x^2}$ *в верхней его точке М, таким, как на рис. а), или таким, как на рис. б)?*



– Если найти значения функции в точках, например, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}$, и построить соответствующие точки графика, то это поможет уточнить его форму.

– Это поможет лишь несколько уточнить его форму, но не поможет разрешить обсуждаемый вопрос, потому что не позволит выяснить, какова форма той части графика, которая соответствует интервалу $(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$. А эта часть может быть и такой, как на рис. а), и такой, как на рис. б).

– Но тогда мы найдём значения функции в точках $\frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \ldots, \frac{1}{2000}$ (использование компьютера позволяет это осуществить достаточно быстро) и, пользуясь этим, уточним форму графика.

– Но это не позволит выяснить, какова форма той части графика, которая соответствует интервалу $(-\frac{1}{2000}, \frac{1}{2000})$. А эта часть может быть и такой, как на рис. а), и такой, как на рис. б). Как видим, для решения этого вопроса нужны такие средства, которые позволяли бы выявлять особенность формы графика функции в «бесконечной близости» к той или иной его точке, в «бесконечно малой» её окрестности. А такие средства нам не известны.

2. Обращение к задаче 2 будет способствовать осознанию необходимости прояснения интуитивных представлений о касательной.

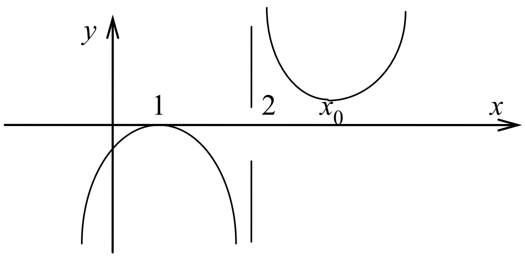
[16] *Рубинштейн С.Л.* Бытие и сознание. — М.: Изд. АН СССР. — 1957. — С. 294.

[17] Понятие модели и математика. Ч. II // Школьные технологии. — 2013. — № 5. — С. 65–74.

Задача 2. *Существуют ли корни уравнения* $\frac{(x-1)^4}{x-2}$*=0, 0012?*

– Задача будет решена, если будет решена следующая:

Задача 3. *Найти область значений функции* $f(x)=\frac{(x-1)^4}{x-2}$.



Множество всех значений этой функции, принимаемых в интервале (– ∞, 2), есть (– ∞, 0]. В некоторой точке x_0 интервала (2, +∞) функция принимает наименьшее в нём значение. Так как она непрерывна в нём и неограниченно возрастает, то множество всех её значений в этом интервале есть $[f(x_0), +\infty)$. Значит, областью значений функции является множество $(-\infty,0] \cup [f(x_0),+\infty)$.

– Но как найти $f(x_0)$?

– Этот вопрос сводится к следующему: как найти самую низкую точку $M(x_0, f(x_0))$ правой части графика?

– Надо попытаться выразить особенность положения этой точки на графике в такой форме, которая подсказывала бы путь её отыскания.

– Касательная к графику в точке M параллельна оси Ox.

Это отнюдь не «логичное» утверждение, это всего лишь кажимость, эти наивные интуитивные представления, следование им сыграют существенную продуктивную роль. И это также покажет, насколько далёк от истины тезис «Математика – это логика», насколько механистичным, насколько заскорузлым является представление о математической деятельности (и о её продуктах), приведшее к рождению этого тезиса.

А так как касательная к графику в точке M параллельна оси Ox, то задача сводится к следующей:

Задача 4. *На правой части графика найти точку, в которой угловой коэффициент касательной равен 0.*

– А эту задачу мы сможем решить, если сможем решить следующую:

Задача 5. *Для произвольно взятой точки M графика функции найти угловой коэффициент касательной к графику в этой точке.*

Казалось бы, переход к задаче 5 усложняет дело. В действительности обращение к задаче 5 как к задаче более общего характера несёт продуктивное начало – приведение учащихся к осознанию необходимости уточнения представлений о касательной. А уточнение откроет путь решения задачи 4.

3. В этой части сценария осуществляется столкновение с пограничными ситуациями, приводящее к осознанию размытости представлений о касательной и необходимости их уточнения.

– *Через точку M графика проходит бесконечно много прямых. Как найти угловой коэффициент той из этих прямых, которая является касательной к графику функции в точке M?*

Так поставленный вопрос рождается представлением, что такая касательная единственна. И следование этой всего лишь кажимости, этим наивным интуитивным представлениям сыграет существенную продуктивную роль. Впереди – ещё не одна такая продуктивная «кажимость».

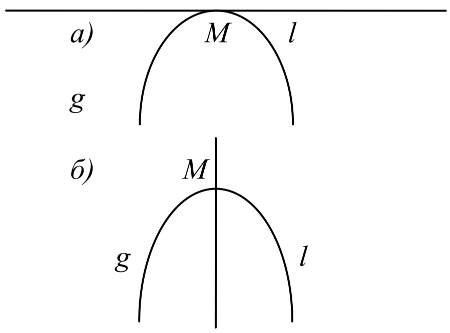
– *Для этого условие, что рассматриваемая прямая есть касательная к графику в точке M, надо попытаться выразить в такой форме, которая подсказывала бы путь отыскания её углового коэффициента.*

– А для этого необходимо прежде всего уметь чётко объяснить, что такое касательная к линии в данной точке.

– Касательная к линии в данной её точке M – это прямая, имеющая с этой линией одну общую точку – точку M.

Далее начинается использование *психолого-феноменологической* редукции.

– На каком из следующих рисунков прямая l является касательной к линии g? Может быть, на обоих?



– Нет, только на первом.

Откуда эти знания о касательных у детей, которые до этого знали разве лишь о касательных к окружностям? Эти знания непроизвольно создаются особенно ярко проявляющейся у детей способностью человеческого интеллекта экстраполировать представления, образы за пределы того «эпицентра», того круга рассмотрений, в котором они возникли. Конечно, в результате таких экстраполирований возникают представления, образы, которые тем более размыты, чем «дальше» они от «эпицентра». (И весьма важным средством развивающего обучения является создание ситуаций, помогающих учащимся осознавать такую размытость.) Но такие представления, образы несут в себе креативное начало. Часто они являются источниками идей, вырастающих в важные математические понятия и мощные методы.

К сожалению, эта способность почти не используется в обучении математике. А её использование позволяло бы естественным образом создавать необходимую содержательную базу, формировать первичные интуитивные представления и, отправляясь от осознания учащимися их размытости и необходимости их уточнения, осуществлять процессы формирования строгих понятий как продуктивных моделей таких представлений. Этому следует онтогенетический подход.

– Но ведь на обоих рисунках прямая l имеет единственную общую точку с линией g. А это говорит о том, что предложенное разъяснение того, что такое касательная к прямой в данной точке, неудовлетворительно. Единственность общей точки не является достаточным условием для того, чтобы прямая была касательной к линии.

– Но единственность общей точки необходима, не правда ли?

– Возвратимся к рисунку $a)$. Продолжим линию g, например, так, чтобы у неё с прямой l стало более одной общей точки. Перестаёт ли из-за этого l быть касательной к g в точке M? Ведь нет же! А значит, вопрос о том, сколько общих точек у прямой с данной линией, никак не связан с вопросом о том, будет ли эта прямая касательной к линии в данной точке.

– Почему же многим из нас эта сторона дела показалась существенной?

– Потому, что мы рассматривали линии, похожие на части окружности.

– Так что же такое касательная к линии?

4. *– А не стоит ли рассмотреть линии, не похожие ни на окружности, ни на их части? Рассмотрим, например, график функции $y{=}x^3$. Какая прямая является касательной к нему в точке 0?*

– Ось Ox.

– Но ведь она пересекает эту линию!

– Так какая же прямая является касательной к этой линии в точке 0?

– Не знаю.

– И я не знаю. Как видно, мы не случайно не могли выразить наше понимание того, что такое касательная. У нас нет понимания этого, а есть лишь нечёткие, расплывчатые представления о касательной. И эти представления тем более расплывчаты, чем больше не похожа линия на дугу окружности. Рассмотрим более простую линию – двузвенную ломаную. Кто может провести касательную к этой линии в вершине M образованного ею угла?

– Касательной к этой линии в точке M является всякая прямая, проходящая через M и не пересекающая эту линию.

– Сколько же всего таких касательных?

– Бесконечно много.

– Неужели к какой-то линии в данной её точке можно провести бесконечно много касательных?

– Раз есть сомнения, надо осуществить строгую проверку.

– Но как её осуществить, не располагая чётким пониманием того, что такое касательная?

Столкновение с пограничными ситуациями приводит к осознанию размытости представлений о касательных и необходимости их уточнения.

Сами пограничные ситуации выстраиваются здесь посредством расширения имеющегося нашего опыта привлечением к рассмотрению привычных для нас линий, но таких, которые не имелись нами в виду, *не ассоциировались* с исследуемым вопросом.

5. Осуществляется эйдетическая редукция, ведущая к уточнению представлений о касательной и завершающаяся формированием строгого понятия касательной как средства решения задач 2–5, не решаемых на уровне обыденных представлений о касательных.

– Как, на каких путях искать уточнение наших, как оказывается, весьма нечётких представлений о том, что такое касательная к линии в данной точке?

– Может быть, следует более пристально всмотреться в ситуации, с которыми мы столкнулись? Мы заметили, что прямая, являющаяся касательной к линии в данной точке, будет касательной в этой точке к любому её продолжению. Очевидно и то, что прямая, не являющаяся касательной к линии в данной точке, не будет касательной в этой точке ни к какому её продолжению. А значит, вопрос о том, будет ли прямая касательной к продолжению линии в данной точке, равносилен вопросу о том, будет ли она касательной к самой этой линии в данной точке.

– Что же это даёт?

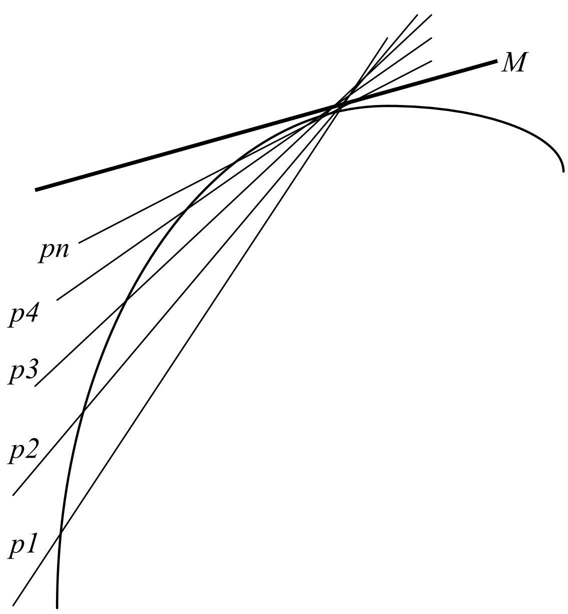
– А вот что: линия g может рассматриваться как продолжение её маленького кусочка g_1, содержащего внутри себя точку M, и поэтому вопрос о том, будет ли прямая l касательной к g в точке M, равносилен вопросу о том, будет ли l касательной к g_1 в точке M. Линия g_1 может рассматриваться как продолжение её маленького кусочка g_2, содержащего M, и потому вопрос о том, будет ли l касательной к g в точке M, сводится к вопросу о том, как взаимно расположены l и g «бесконечно близко» от точки M.

– И в результате мы оказались в том же тупике, в который завёл нас поиск решения задачи 1.

– Обратим внимание на то, что чем меньше, чем короче линия, тем ближе положение прямой MP, рассекающей эту линию, к положению касательной к ней в точке M. Если линия «бесконечно короткая», то положение PM «бесконечно близко» к положению касательной к этой линии в точке M.

– А значит, чем короче дуга дуга $\overset{\smile}{PM}$*, тем она «прямее», тем меньше она отличается от отрезка PM и тем ближе положение прямой PM к положению касательной к точке M. Давайте для краткости такие прямые PM называть секущими (для данной линии).*

– Итак, чем ближе точка P к M, тем ближе положение секущей PM к положению касательной к нашей линии в точке M.



– Иначе говоря, при приближении P к M положение секущей PM приближается к положению касательной в точке M.

– А значит, касательная к линии в точке M – это прямая, к которой приближается положение секущей PM при приближении точки P к M.

– Иначе говоря, касательная к линии в точке M – это предельное положение секущей PM при приближении P к M.

– Такое уточнение наших представлений о касательных чётко, однозначно. Его естественно принять в качестве определения понятия касательной.

Апеллируя к соответствующему рисунку, сосредоточиваясь на нём, мы сосредоточиваемся тем самым на рассмотрении, на «принятии во внимание» единственно гладких линий. Мы сужаем поле рассмотрения, осуществляем «зашоривание». Тем самым происходит настраивание учащихся на ту наивность рассмотрения, которая создаёт благоприятные условия для прорыва на понятийный уровень рассмотрения. «Зашоривание» способствует сосредоточению на ведущем аспекте. Оно «уводит» от того, что важно знать, но целесообразно «забыть» в данной ситуации, забыть с тем, чтобы вернуться к рассмотрению этого «забытого», неучтённого, с «высоты» сформированного строгого понятия. Короче говоря, мы формируем посредством обращения к рисунку такую тактику внимания, которая более прямым образом направляет движение мысли учащихся к тому рубежу, переход через который приводит учащихся к понятийному уровню мышления.

6. Осуществляется первичное испытание преображённого понятия на работоспособность и одновременно на первичное его освоение, на первичное усмотрение качественно новых возможностей, которые оно несёт; на осознание того, что преображённое понятие является продуктивной моделью исследуемого объекта.

Прежде всего, сформированное понятие используется для решения задачи 5. А затем решаются задачи, подобные следующей:

Задача 6. *Найти угловой коэффициент k касательной к графику функции $f(x)=x^2+px+q$ в точках с абсциссами 1, 2, – 1, x_0.*

Решение задачи 5 несёт решение и задачи 6, и задачи 4, а значит, и задачи 3. Тем самым решается и задача 2: так как число, стоящее в правой части уравнения, не входит в область значений функции, стоящей в левой части, то уравнение не имеет корней.

Задача 2 вместе с порождаемыми её обсуждением задачами 3, 4 и 5 послужила не только побудительным средством для формирования строгого понятия касательной как модели обыденных представлений о касательной к кривой. Но она задала и прагматическое требование, которому должна удовлетворять искомая модель: она должна нести метод решения подобных ей задач.

Задача 7. *Пусть функция f, непрерывная в рассматриваемом интервале, принимает в его точке x_0 наибольшее или наименьшее значение. Доказать, что если в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику f, то её угловой коэффициент равен 0.*

Задача 8. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+6$ на отрезке $[0, 2]$.*

7. Здесь и далее осуществляется трансцендентальная редукция. С помощью формально-логических средств осуществляется преображение сформированного понятия. Происходит осознание того, что преображённое понятие обрело новое качество, новую природу.

Возвращаемся к вопросам, которые не могли быть решены без уточнения представлений о касательной. Это вопросы о том, как проходит касательная к графику функции $y=x^3$ в начале координат, и о том, сколько имеется касательных к графику функции $y=|x|$ в начале координат. Использование сформированного строгого понятия касательной даёт на них ответы. Но ответы приводят к выявлению «неадекватности» этого определения исходным представлениям о касательной. Тем самым они побуждают к прояснению природы механизмов, направлявших процесс формирования понятия касательной.

– К строгому понятию касательной мы пришли, исходя из следующего наблюдения: чем короче дуга $\overset{\frown}{PM}$ линии, тем она «прямее», тем меньше она отличается от отрезка PM и тем ближе положение прямой PM к положению касательной к точке M. Но ведь это верно не всегда, и график функции $y=|x|$ пример тому. Строгое понятие касательной сформировано, по сути, на базе представлений о касательной к гладкой дуге и для случая гладких дуг вполне адекватно этим представлениям. Оно есть модель этих представлений.

– Таким образом, сформированное понятие относится только к гладким дугам? Но коли так, то прежде чем применять это понятие при рассмотрении, например, графика какой-либо функции, надо узнать, является ли он гладкой линией. А такие вопросы мы решать не умеем.

8. Эта часть сценария посвящена отысканию критерия гладкости графика функции.

– Как мы теперь знаем, не во всякой точке графика непрерывной функции может существовать касательная. Но верно ли, например, то, что для всякой квадратичной функции во всякой точке её графика существует касательная?

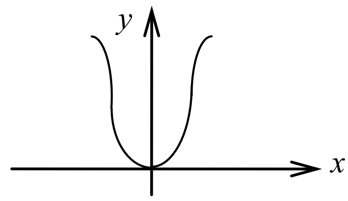
– Решение задачи 6 даёт положительный ответ на этот вопрос.

– Теперь ясно, как узнать, является ли график функции гладким. Он гладкий тогда и только тогда, когда во всякой его точке существует касательная. Так, если $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\dfrac{2x_0}{(1+x_0^2)^2}$ для всякой точки x_0. Таким образом, во всякой точке графика нашей функции существует касательная. В точке $M(0,1)$ угловой коэффициент касательной к нему равен 0. Значит, этот график всюду гладкий. Теперь ясно и то, какой он – такой, как на приведённом выше рисунке а), или такой, как на рисунке б)?

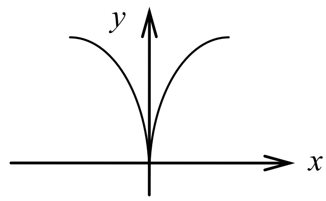
– Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Во всякой точке $P(x_0, f(x_0))$ её графика, такой, что $x_0 \neq 0$, существует касательная:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x_0}}.$$

– Гладкий или заострённый её график в начале координат



такой:



или такой:

– Пусть $P\left(\Delta x, \sqrt[3]{(\Delta x)^2}\right)$ – какая-нибудь точка на графике. Найдём угловой коэффициент $k_{сек}$ секущей PO:

$k_{сек}=\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$. При приближении P к O угловой коэффициент PO неограниченно возрастает по модулю, то есть положение секущей приближается к вертикальному. Ось Oy – предельное положение секущей при приближении P к O, то есть касательная к графику в точке O. Значит, график в точке O заострён.

– Хотя касательная существует в каждой точке графика нашей функции, но график не является гладким. Значит, неверно, что существование касательной в каждой точке графика функции является достаточным условием его гладкости.

– Но это условие необходимо.

– Пусть это условие выполняется. Если график функции f гладкий, то в близких его точках $P(x_0, f(x_0))$ и $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ угловые коэффициенты касательных $k(x_0)$ и $k(x_0+\Delta x)$ близки. Это значит, что функция $y=k(x)$ непрерывна. Если же график в какой-то точке $P(x_0, f(x_0))$ заострён, то при переходе через неё угловой коэффициент касательной резко изменяется. Иначе говоря, функция $y=k(x)$ в этой точке разрывна. Отсюда ясно, что непрерывность функции $y=k(x)$ является достаточным условием гладкости графика.

9. Ставится вопрос настолько же неожиданный, насколько и наивный: имеет ли смысл говорить о *касательной* ***к прямой*** в какой-нибудь её точке M?

– Вопрос о том, имеет ли смысл говорить о касательной к прямой в какой-нибудь её точке M, естественно уточнить так: существует ли касательная к прямой в смысле нашего определения в какой-нибудь её точке M?

– Какую бы точку P на прямой мы ни взяли, секущая PM совпадает с этой прямой. А значит, предельное положение PM при приближении P к M совпадает с этой прямой. Это означает, что сама эта прямая является касательной к ней в любой её точке M.

– Неожиданный вывод! Как могло произойти то, что осуществлённый процесс уточнения наших представлений о касательных, происходивший под неустанным контролем смысла, привёл к понятию, имеющему иной смысл? И почему неадекватность сформированного понятия этим представлениям не усматривалась сразу, а обнаружилась лишь в результате его применения?

– Причина и кроется в применении этого понятия, точнее говоря, в формальном, буквалистском применении его определения, «отключающем» контроль смысла и тем самым приводящем к абстрагированию от того, что «имелось в виду», но явно не высказывалось. Более того, оно приводит к размежеванию с этим «имевшимся в виду», неизменно присутствовавшим в нашем опыте, и тем самым выводит нас за его пределы, за пределы рождённых им представлений и смыслов. Оно навязывает иной способ рассмотрения. Оно делает предметом нашего внимания иные, формальные стороны дела. Оно рождает новый контекст и тем самым раскрывает новый смысл сформированного понятия.

Оправдание строгого понятия не в «адекватности» представлениям, послужившим его истоком, а в его продуктивности. Исторический опыт развития математики даёт оправдание строгому понятию касательной.

Особо отметим, что задача 1 вместе с порождаемыми её первичным обсуждением задачами 2 и 3 послужила не только побудительным средством для формирования строгого понятия касательной как модели начальных представлений о касательной к кривой. Возможных вариантов такой модели бесконечно много. Но задача 1 задала и прагматическое требование, которому должна удовлетворять искомая модель: она должна нести метод решения задач, подобных задаче 1.

Обращения к рассматриваемой мета-модели несут прояснение важных вопросов стратегического уровня, относящихся к обучению математике, в частности, вопросов о роли и месте использования компьютеров в обучении математике.

В математике, в её результатах вместе с их обоснованиями, выступающими в одеяниях, освящённых веками укоренявшейся парадигмой, даже в результатах, демонстрирующих принципиальную ограниченность формально-логических средств, видят мощь и торжество классической, жёсткой рациональности.

В рамках математики появляются результаты, свидетельствующие о сближении её методологии с методологией естественных наук. Таковы новые теоремы «чистой» математики, компьютерные доказательства которых не доступны проверке традиционными, «человеческими» средствами. Проверка их корректности осуществима посредством многократных компьютерных *экспериментов.* С другой стороны, развитие программного обеспечения компьютерной техники приводит к появлению продуктов математической деятельности, имеющих зримо гуманитарный характер в традиционном понимании. Всё это вновь и вновь обращает к попыткам прояснения природы математики, которое невозможно на базе рассмотрения лишь её продуктов. Математика – это *деятельность,* венчающаяся своими продуктами. Это развивающаяся поисково-исследовательская деятельность, характеризуемая нарастанием многомерности и многоуровневости, многообразными взаимодействиями разных форм рациональности, существенным участием внерациональных форм мышления.

Это должно быть воплощено в обучении математике. И это воплощается в онтогенетическом подходе, в отвечающем ему характере процессов формирования фундаментальных математических понятий. Использование в учебной деятельности компьютеров помогает его полнокровному воплощению. Оно несёт экономию времени, избавляя от выполнения ряда рутинных операций, и тем самым позволяет более широко осуществлять эксперименты, помогающие испытанию гипотез и отысканию закономерностей. Оно расширяет возможности визуального представления исследуемых ситуаций. Оно несёт бóльшие возможности удерживать в сознании и целое, являющееся предметом освоения, и его детали, а значит, исследовать детали в контексте целого, в постоянном соотнесении с целым. Оно несёт существенную экономию времени без жертвования теми или иными содержательными сторонами дела, основательностью обсуждений, глубиной освоения материала. Оно несёт развитие алгоритмического мышления. Оно несёт развитие способности к математическому моделированию.

Понятия бифуркации, фрактала, хаоса и другие математические понятия, являющиеся продуктами достижений XX века, начинают обретать статус общекультурных понятий. Всё острее заявляет о себе проблема приобщения школьников к этим понятиям[18]. Использование в обучении компьютеров не просто целесообразно, но необходимо для её решения.

С другой стороны, вместе с нарастающим использованием компьютеров в обучении математике, вместе с нарастанием достижений в этом направлении приходит нарастание гипертрофии в использовании компьютеров. И всё более актуальными становятся вопросы о том, в каких планах использование компьютеров не просто нецелесообразно, но блокирует развитие теоретического уровня мышления учащихся, блокирует развивающее начало в обучении математике; о том, какое содержание школьного курса математики и какие системопорождающие механизмы в обучении математике могли бы служить препятствием для такой гипертрофии[19]. Решение этих вопросов предполагает радикальный пересмотр содержания школьного курса математики, методов обучения математике и самих принципов дидактики математики, а прежде всего – пересмотр ценностной позиции, которая стоит за этими принципами, пересмотр традиционных представлений о месте и роли формальной логики в обучении математике[20].

Применительно к разным системам обучения математике и к разным программам школьного курса математики эти вопросы будут иметь разные степени остроты и разные решения. Здесь эти вопросы мы подвергнем первичному обсуждению с позиций онтогенетического подхода. И потому центральным вопросом становится вопрос о том, как могут и как не могут быть использованы компьютеры в учебной деятельности, направленной на формирование фундаментальных математических понятий.

Использование компьютеров существенно расширяет возможности осуществления начальной стадии такого процесса, направленной на формирование и первичное освоение протопонятия, являющегося истоком формируемого понятия. Оно несёт возможность в рамках ограниченного времени рассмотреть широкое разнообразие ситуаций, представляемых этим протопонятием, и тем способствовать не только его формированию, но и более далеко идущему его развитию и осуществлению на более богатой содержательной базе *психолого-феноменологической редукции*. Важность начальной стадии (которую обычно вырождают в краткие предварительные пояснения) и ограниченность бюджета времени делают использование компьютеров эффективным средством обучения.

Что же касается стадий *эйдетической* и *трансцендентальной редукции*, то на этих стадиях использование компьютеров если в какой-то степени и возможно, то такая возможность крайне ограничена. Так, в про-

[18] *Розов Н.Х.* Курс математики общеобразовательной школы: сегодня и послезавтра // Задачи в обучении математике: материалы всерос. научно-практ. конф. – Вологда: Изд-во «Русь», 2007. — С. 6–12.

[19] В число этих вопросов входят вопросы предотвращения гипертрофии в направленности обучения на техническую выучку учащихся, несущей ущерб развивающему началу. Эта старая проблема сегодня стала ещё более актуальной в связи с возможностью использования компьютеров в обучении.

[20] Попутно отметим естественность вопроса о месте и роли алгоритмических процедур в обучении математике, о том, всегда ли там, где такие процедуры возможны, они целесообразны.

цессе восхождения от протопонятия предела последовательности к строгому понятию предела последовательности переход от стадии *феноменолого-психологической редукции* к стадии *эйдетической редукции* осуществим посредством столкновения с пограничными ситуациями[21], для чего требуется работа воображения учащихся. Возможность использования компьютеров в таких ситуациях, сама возможность визуального представления таких ситуаций становится весьма проблематичной. Предельные ситуации обычно выстраиваются с помощью радикальных трансцендирований или обращениями к предельно простым случаям, но таким, которые не имелись в виду, не ассоциировались с рассматриваемым прото-понятием (см., например, части 4 и 9 приведённого сценария). Использование компьютера в первом случае невозможно, а во втором не нужно.

А главное – использование компьютеров на этих стадиях *противопоказано,* так как деятельность на этих стадиях направлена на преображение формы мышления, на переход от натуральной его формы к идеальной, на работу *эйдетической редукции* по «очищению» субъективности как на подготовку к осуществлению *трансцендентальной редукции*, то есть на прорыв в идеальный мир, в мир «сущностей» и на его первичное «обживание».

Уже сказанное, уже сугубо первичное рассмотрение показывает разрушительность воплощения в обучении представления о сугубо логическом характере математического мышления. Оно показывает и то, что при всей очевидности, при всей весомости достижений в использовании компьютеров в обучении математике очевидно и существование границ, за которыми использование компьютеров не просто нецелесообразно, но блокирует развитие теоретического мышления, а тем самым и развитие таких способностей к научно-исследовательской деятельности в области математики, которое сопрягается с общим развитием интеллекта, с развитием общей культуры мышления, и что за этими границами находится самая значимая, самая сокровенная, самая существенная – а именно «чисто» гуманитарная – «часть» математики.

Сказанное относится даже к элементарным формам математической деятельности. Обратимся, например, к задаче вычисления выражения

<2>201520152015^2–<2>201520152014
<2>201520152016,

где <2> обозначает $10^{10000000000}$ раз повторённую цифру 2. Работать непосредственно с этим арифметическим выражением, строящимся из столь огромных чисел, невозможно, даже используя компьютер. Но возможность его радикального «свёртывания» несёт алгебраическая знаковая система: структура=модель данного выражения представляется выражением $a^2-(a-1)(a+1)$, тождественно равным 1. Следовательно, данное выражение равно 1.

Пусть теперь <2> обозначает всего лишь 10 раз повторённую цифру 2. В этом случае рассматриваемое выражение вычислить на компьютере несложно. Но насколько проще, насколько быстрее осуществимо рассмотренное решение! И это помогает видеть, что граница, о которой сказано выше, проходит всюду.

Обращение к самой идее компьютера может и должно помочь учащимся осознать глубинное гуманитарное существо математики, проявляющееся прежде всего в неожиданных ассоциированиях, в далеко идущих трансцендированиях, в «одомашнивании» математикой идеи бесконечности, рождающем такие методы исследования, такие методы решения сложных задач, которые принципиально «непосильны» для компьютеров и за которыми стоит сокровенная креативная природа человеческого интеллекта.

Обучение математике должно раскрывать её гуманитарное существо и приводить к пониманию того, что математика является не только необходимым *средством* развития материальной культуры и не только важным средством развития гуманитарной культуры, но и важным её *компонентом*. ❑

[21] См. *Когаловский С.Р.* Понятие модели и математика. Ч. II // Школьные технологии. — 2013. — №5. — С. 65–74.