



Фракталы: геометрия красоты

Выполнила:

Полина Щепаккина, ученица 9 «А» класса

Руководитель:

Элла Анатольевна Чирва, учитель математики,
НЧОУ «Лицей «ИСТЭК», г. Краснодар

Актуальность работы: Фракталы и фрактальные алгоритмы имеют огромное практическое применение на сегодняшний день. Появление фрактальной геометрии есть свидетельство продолжающейся эволюции человека и расширения его способов познания мира. Фракталы касаются хаоса и порядка, их конкуренции или сосуществования. Они показывают переход от одного к другому и то, какой изумительно сложной является область перехода вообще. И восхищение, вызываемое красотой изображённых на картинах областей, не может отвлечь нас от центрального вопроса о том, как структура границ зависит от параметров. Это приводит нас к границам другого уровня и открывает закономерности, о существовании которых несколько лет назад никто и не подозревал.

Объект: фрактал и фрактальная геометрия.

Предмет изучения: алгебраические, геометрические и стохастические фракталы.

Целью данной проектной работы является изучение многообразия фракталов.

На основе поставленной цели решались следующие задачи:

1. Определение значения терминов «фрактал» и «фрактальная геометрия», ознакомление с историей появления фракталов и их классификации.
2. Изучение применения фракталов в разных сферах
3. Создание модели фрактала

Новизна: Роль фракталов в машинной графике сегодня достаточно велика. Они приходят на помощь, например, когда требуется, с помощью нескольких коэффициентов, задать линии и поверхности очень сложной формы.

Методы исследования: анализ, исследование и создание фракталов.

Гипотеза исследования: фрактальная структура существует не только в геометрии, но и в природе, литературе, медицине и архитектуре. Если бы Бенуа Мандельброт не открыл фракталы, мы бы не узнали о принципе самоподобия, который в приближённом виде имеется в природе (в ли-



ниях берегов морей и рек, в очертаниях облаков и деревьев, в турбулентном потоке жидкости и в иерархической организации живых систем), литературе, медицине и архитектуре.

1. Теоретическая часть

1.1. Определение фрактала

Морозные узоры на окне, замысловатая и неповторимая форма снежинок, сверкающие молнии в ночном небе завораживают и пленяют своей необыкновенной красотой. Однако мало кто знает, что всё это является сложными фрактальными структурами.

Бесконечно самоподобные фигуры, каждый фрагмент которых повторяется при уменьшении масштаба, называются фракталами. Сосудистая система человека, система альвеол животного, извилины морских берегов, облака в небе, контуры деревьев, антенны на крышах домов, клеточная мембрана и звёздные галактики — всё это удивительное порождение хаотического движения мира есть фракталы.

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского *fractus* и в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature». В его работах использованы научные результаты других учёных, работавших в период 1875–1925 годов в той же области (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф). Но только в наше время удалось объединить их работы в единую систему ([1], с. 32).

Роль фракталов в машинной графике сегодня достаточно велика. Они приходят на помощь, например, когда требуется, с помощью нескольких коэффициентов, задать линии и поверхности очень сложной формы. С точки зрения машинной графики, фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. Фактически найден способ лёгкого представления сложных неевклидовых объектов, образы которых весьма похожи на природные.

1.2. Классификация фракталов

Для того, чтобы представить всё многообразие фракталов удобно прибегнуть к их общепринятой классификации. Существует три класса фракталов.

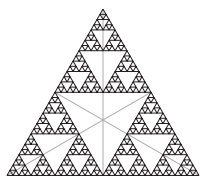
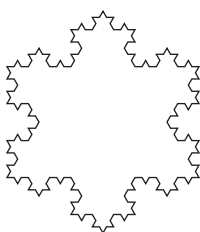
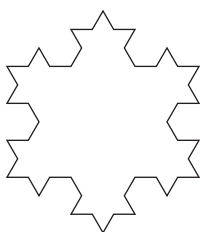
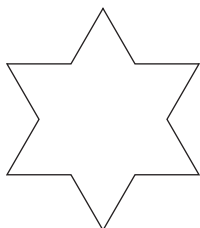
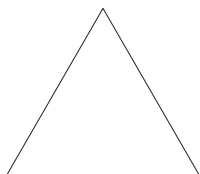
1.2.1. Геометрические фракталы

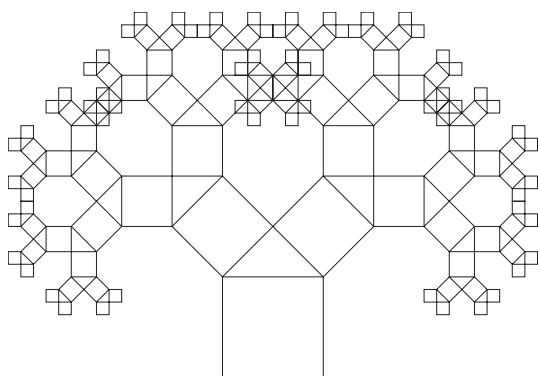
Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью ломаной (или поверхности в трёхмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

Снежинка Коха — эта фигура — один из первых исследованных учёными фракталов. Она получается из трёх копий кривой Коха, которая впервые появилась в статье шведского математика Хельге фон Коха в 1904 году. Эта кривая была придумана как пример непрерывной линии, к которой нельзя провести касательную ни в одной точке.

Треугольник Серпинского — этот фрактал описал в 1915 году польский математик Вацлав Серпинский. Чтобы его получить, нужно взять (равносторонний) треугольник, провести в нём средние линии и выкинуть центральный из четырёх образовавшихся маленьких треугольников. Дальше эти же действия нужно повторить с каждым из оставшихся трёх треугольников, и т.д.

Дерево Пифагора — называется так потому, что каждая тройка попарно соприкасающихся квадратов ограничивает прямоугольный треугольник и получается картинка, которой часто иллюстрируют теорему Пифагора, «пифагоровы штаны во все стороны равны». (Хорошо видно, что всё дерево ограничено. Если самый большой квадрат единичный, то дерево поместится в прямоугольник 6×4 . Значит, его площадь не превосходит 24. Но с другой стороны, каждый раз добавляется в два раза больше троек квадратов, чем в предыдущий, а их линейные размеры в $\sqrt{2}$ раз меньше. Поэтому на каждом шаге добавляется одна и та же площадь, которая равна площади начальной конфигурации, то есть 2. Казалось бы, тогда площадь дерева должна быть бесконечна! Но на самом деле противоречия здесь нет, потому что





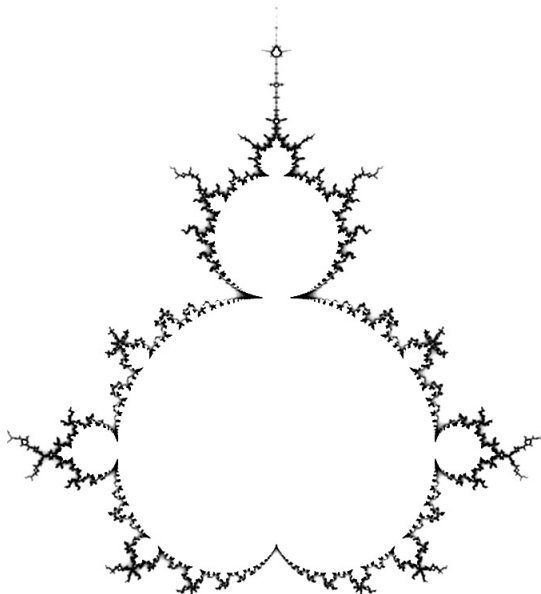
довольно быстро квадратики начинают перекрываться, и площадь прирастает не так быстро. Она всё-таки конечна, но, по всей видимости, до сих пор точное значение неизвестно, и это открытая проблема.

1.2.2. Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Наиболее изучены двумерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс, как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: фазовый портрет, установившийся процесс, аттрактор и т.д.

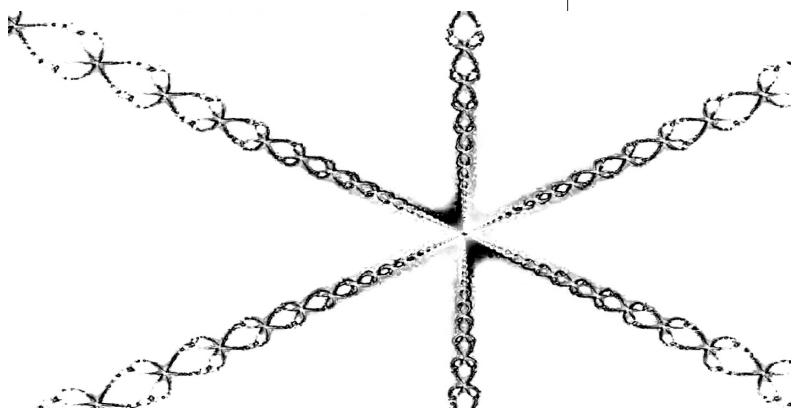
Множество Мандельброта — визуально множество Мандельброта выглядит как набор бесконечного количества различных фигур, самая большая из которых называется кардиоидой (она похожа на стилизованное изображение сердца и получила своё название от двух греческих слов — «сердце» и «вид»). Кардиоиды окружены всё уменьшающимися кругами, каждый из которых окружён ещё меньшими кругами, и т.д. до бесконечности. При любом увеличении этого фрактала будут выявляться всё более и более мелкие детали изображения, дополнительные ветки с более мелкими кардиоидами, кругами. И этот процесс можно продолжать бесконечно.

Множества Жюлиа — удивительно, но множества Жюлиа образуются по той же самой формуле, что и множество Мандельброта. Множество Жюлиа было изобретено французским математиком Гастоном Жюлиа, по имени которого и было названо множество. Первый вопрос, возникающий после визуального знакомства с множествами Мандельброта и Жюлиа это «если оба фрактала сгенерированы по одной формуле, почему они такие разные?» Сначала посмотрите на картинки множес-



тва Жюлиа. Достаточно странно, но существуют разные типы множеств Жюлиа. При рисовании фрактала с использованием различных начальных точек (чтобы начать процесс итераций), генерируются различные изображения. Это применимо только ко множеству Жюлиа. Хотя, это нельзя увидеть на картинке, фрактал Мандельброта — это, на самом деле, множество фракталов Жюлиа, соединённых вместе. Каждая точка (или координата) множества Мандельброта соответствует фракталу Жюлиа.

Фрактал Ньютона — области с фрактальными границами появляются при приближённом нахождении корней нелинейного уравнения алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости (для функции действительной переменной метод Ньютона часто называют методом касательных, который, в данном случае, обобщается для комплексной плоскости).



1.2.3. Стохастические фракталы

Ещё одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в ите-



рациональном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные — несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Примеры: Плазма ([2], с. 56; [1], с. 12; [3], с. 134).

2. Применение фракталов

Прежде всего, фракталы — область удивительного математического искусства, когда с помощью простейших формул и алгоритмов получаются картины необычайной красоты и сложности! В контурах построенных изображений нередко угадываются листья, деревья и цветы.

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в компьютерной графике. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, и во-вторых построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур. Современная физика и механика только-только начинают изучать поведение фрактальных объектов. И, конечно же, фракталы применяются непосредственно в самой математике.

Достоинства алгоритмов фрактального сжатия изображений — очень маленький размер упакованного файла и малое время восстановления картинки. Фрактально упакованные картинки можно масштабировать без появления пикселизации. Но процесс сжатия занимает продолжительное время и иногда длится часами. Алгоритм фрактальной упаковки с потерей качества позволяет задать степень сжатия, аналогично формату jpeg. В основе алгоритма лежит поиск больших кусков изображения подобных некоторым маленьким кусочкам. И в выходной файл записывается только какой кусочек какому подобен. При сжатии обычно используют квадратную сетку (кусочки — квадраты), что приводит к небольшой угловатости при восстановлении картинки, шестиугольная сетка лишена такого недостатка.

2.1. Фракталы в живой природе

Почти все природные образования: кроны деревьев, облака, горы, береговые линии имеют фрактальную структуру.

Что это значит?



Если посмотреть на фрактальный объект в целом, затем на его часть в увеличенном масштабе, потом на часть этой части, то нетрудно увидеть, что они выглядят одинаково.

Как пример можно рассмотреть строение цветной капусты. Если разрезать один из цветков, очевидно, что в руках остаётся всё та же цветная капуста, только меньшего размера. Можно продолжать резать снова и снова, даже под микроскопом — однако всё, что мы получим — это крошечные копии цветной капусты. (Осьминог — морское придонное животное из отряда головоногих. Фрактальное строение имеют его тело и присоски на всех восьми щупальцах этого животного. Ещё одни типичнейшим представителем фрактального подводного мира является коралл.

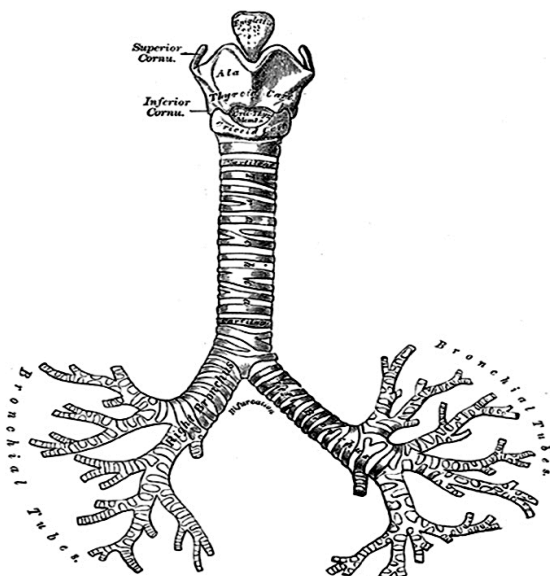
2.2. Фракталы в литературе

Среди литературных произведений есть такие, которые обладают текстуальной, структурной или фрактальной природой. В литературных фракталах бесконечно повторяются элементы текста:

У попа была собака, он её любил.
Она съела кусок мяса, он её убил.
В землю закопал,
Надпись написал:
У попа была собака...

Или:

«Вот дом,
Который построил Джек.
А вот пшеница,
Которая в тёмном чулане хранится
В доме,
Который построил Джек
А вот весёлая птица-синица,
Которая ловко ворует пшеницу,
Которая в тёмном чулане хранится
В доме,
Который построил Джек...» ([4], с. 67).



2.3. Фракталы в медицине

В данное время фракталы находят широкое применение в медицине. Сам по себе человеческий организм состоит из множества фрактальных структур: кровеносная система, мышцы, бронхи, бронхиальные пути в легких, артерии.

Теория фракталов применяется для анализа электрокардиограмм. Оценка величины и ритмов фрактальной размерности позволяют на более ранней стадии и с большей точностью и информативностью судить о нарушениях гомеостаза и развитии конкретных заболеваний сердца.

Рентгеновские снимки, обработанные с помощью фрактальных алгоритмов, дают более качественную картинку, а соответственно и более качественную диагностику!!!

Ещё одна область активного применения фракталов — гастроэнтерология. Новый метод исследования в медицине, электрогастроэнтерография — метод исследования, позволяющий оценить биоэлектрическую активность желудка, двенадцатиперстной кишки и других отделов ЖКТ.

2.4. Фракталы в архитектуре

Фрактальный принцип развития природных и геометрических объектов проникает вглубь архитектуры и как образ внешнего решения объекта, и как внутренний принцип архитектурного формообразования.

Дизайнеры со всего мира начали использовать в своих работах замечательные фрактальные структуры, только недавно описанные видными математиками.

Использование фракталов поставило практически все направления современного дизайна на новый уровень.

Привнесение фрактальных структур увеличило во многих случаях как визуальную, так и функциональную составляющие дизайна [6].



2.5. Фракталы в музыке

Сами по себе фракталы — это математические объекты. Казалось бы, какое отношение могут иметь фракталы, и вообще математика к музыке? А оказывается самое непосредственное!

А. Васильев, автор статьи «Музыкальный композитор, основанный на многослойной нейронной сети», выделяет 4 типа алгоритмической композиции:

- 1) Композиция, основанная на применении математических функций: стохастических, теории хаоса, фракталах.
- 2) Композиция, основанная на применении комбинаторных методов (например, марковских цепей, ассоциативных сетей переходов, стохастических матриц).
- 3) Композиция, основанная на применении природных процессов: клеточных автоматов, генетических алгоритмов, нейронных сетей.
- 4) Композиция, построенная с помощью процессов, основанных на правилах.

В 70–80 гг. XX века изучение поведения систем нелинейных динамических уравнений вызвало интерес к их использованию в алгоритмической композиции. Сегодня в музыкальном искусстве одним из самых популярных методов создания музыки на основе алгоритмов считается



метод так называемой фрактальной композиции. Считается, что в музыкальном плане наиболее интересными являются стохастические фракталы. С помощью компьютера такие процессы строить достаточно просто, так как он позволяет генерировать последовательности случайных чисел.

Свойство фракталов генерировать структуры, подобные деревьям, растениям, скалам и другим природным объектам в первую очередь было использовано в компьютерной графике. Исследователи фракталов и крупномасштабной временной структуры акустической речи и музыки Г.М. Алдонин, Е.В. Золотухина, П.А. Иванов, А.В. Спиридонов выявили, что любая музыка (точнее её ритмическая сторона) имеет фрактальную природу. Monojit Choudhury и Pradipta Ranjan Ray из Индийского института технологии в Хараджпуре изучают природу музыкальности с помощью фрактального анализа композиции. Жан Беран (Jan Beran) в своей работе «Музыка — это хаос, фракталы и информация» («Music — Chaos, Fractals, and Information») рассматривает музыку как передачу информации от композитора, музыканта к слушателю.

Таким образом, использование фракталов в музыкальном искусстве и науке занимает важное место. В основе этих исследований лежит теория Ричарда Восс, который установил, что любой звук имеет фрактальные свойства. Исследователь идентифицировал три категории звука, основанные на математических элементах:

- 1) Белый шум (случайный шум — определяется как тревожащий слушателя).
- 2) Розовый шум (занимает промежуточное положение, более структурированный, нежели белый — является самым приятным для восприятия слушателя).
- 3) Коричневый шум (структурированный шум — определяется как механический для слушателя).

А. Берг. Концерт для скрипки с оркестром

Р. Восс обнаружил, что, исследуя фрактальную природу розового шума, можно генерировать приятные для слуха мелодии, так как розовый шум является балансом между полной хаотичностью и чрезвычайной структурированностью. На изучение фрактальной природы музыки направлены исследования М. Гарднера М. Шредера, Дж. Чезнута, С. Мэйсона и М. Сэффли. Цель всех этих исследований — найти нечто универсальное в музыкальных произведениях, то, что стоит выше индивидуальных культур и художественного вкуса.

Другая грань применения фракталов в музыке — фрактальная композиция как процесс генерации музыкального материала для создания художественного произведения. Фрактальная композиция развивается, создавая новый музыкальный материал, систематически преобразовывая предыдущий.

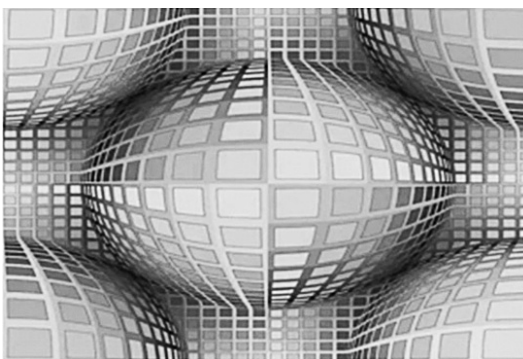
Таким образом, рассмотренные нами подходы к использованию фракталов в музыке указывают на то, что современная наука предлагает новые методы изучения не только явлений природы, но и искусства. Современные исследователи на основе предложенных методов пытаются осознать музыку как абстрактное искусство, а также выявить некие универсальные законы создания музыкального произведения. Эти проблемы музыкального творчества и науки волновали учёных и музыкантов на протяжении многих столетий и XXI век внёс свою лепту опираясь на объективный математический язык [7].

2.6. Фракталы в живописи

Давно не секрет, что объекты, обладающие признаками фракталов, воспринимаются человеческим глазом как высшее проявление гармонии и красоты. Кроны деревьев и горные хребты, уникальные узоры снежинок и «золотые» спирали морских раковин и волн, кристаллы и кораллы — мы го-



Древнекитайская фреска



Виктор Вазарели — Клонопин

товы бесконечно созерцать их и в живой природе, и на полотнах художников. Как выяснилось, это занятие ещё и целительно: согласно многолетним исследованиям американских учёных, оно понижает уровень стресса на целых 60 %.

Фракталы давно и прочно обосновались в изобразительном искусстве, начиная с канувших в лету цивилизаций ацтеков, инков и майя, древнеегипетской и древнеримской. Так как их достаточно сложно избежать при изображении живой природы, где фракталоподобные формы встречаются сплошь и рядом.

Одни из наиболее ранних и ярко выраженных образцов фрактальной живописи — пейзажные традиции древнего и средневекового Китая.

В XX веке фрактальные структуры получили наибольшее распространение в направлениях оп-арт (оптическое искусство) и имп-арт (от слова impossible — невозможный). Первое из них выросло в 1950-е годы из абстракционизма, точнее говоря, отпочковалось от геометрической абстракции. Одним из первопроходцев оп-арта был Виктор Вазарели — французский художник с венгерскими корнями.

Сегодня создание фрактальных паттернов не составляет особого труда. Существует множество компьютерных программ, позволяющих синтезировать их в несметном количестве при соответствующей художественной ценности. Но всё ещё есть авторы, трудящиеся на этом поприще по старинке, используя не цифровые, а вполне осязаемые средства.

Итак, рассматривание фракталов оставляет заметный след в мозговой деятельности человека, который даже фиксирует специальная аппаратура. Но существует и обратная взаимосвязь: психическое и ментальное здоровье художника может

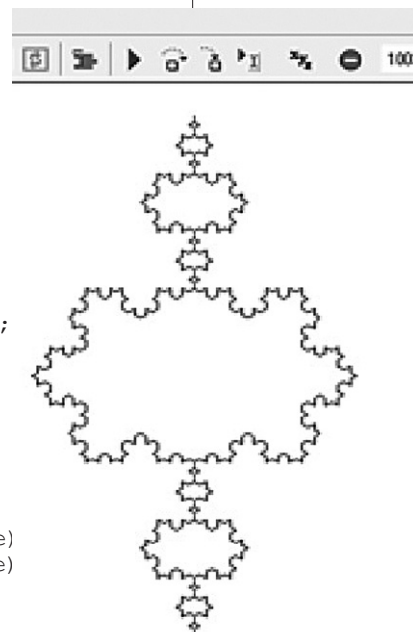
повлиять на количество и качество фрактальных композиций в его работах [8].

3. Создание модели фрактала

При создании модели фракталов я использовала систему «Исполнители», в которую включены программы для генерации фрактальных фигур, в основе которых лежат алгоритмы системы С. Также в этой системе содержатся программы для построения множества Мандельброта, кривой дракона, треугольника Серпинского, кривых Гильберта и других фракталов.

Например, программируемые фракталы «острова Коха» (см. рисунок).

```
// острова Коха
float x, y, angle;
Острова _ Коха
{
    x = 200;
    y = 430;
    angle = 90;
    MoveTo ( x, y );
    repeat ( 2 )
    {
        Kox ( 80, 10 )
        angle = angle - 180;
    }
}
Kox ( float len, float p )
{
    float k = 0.5;
    if ( len < p )
    {
        x = x + len*cosg(angle)
        y = y - len*sing(angle)
        LineTo (x, y);
        return;
    }
    Kox ( k*len, p );
    angle = angle + 60;
    Kox ( k*len, p );
    angle = angle - 120;
    Kox ( k*len, p );
    angle = angle + 60;
    Kox ( k*len, p );
}
```





Заключение

Проведя эту проектную работу:

- Я определила значение терминов «фрактал» и «фрактальная геометрия».
- Я изучила классификации фракталов.
- Я изучила область применения фракталов.
- Я подтвердила свою гипотезу о том, что фрактальная структура существует не только в геометрии.

Подводя итоги, можно с полной уверенностью сказать об огромном практическом применении фракталов и фрактальных алгоритмов на сегодняшний день. Спектр областей, где применяются фракталы, очень обширен и разнообразен.

И наверняка, в ближайшем будущем, фракталы, фрактальная геометрия, станут близки и понятны каждому из нас. Мы не сможем обходиться без них в нашей жизни!

Будем надеяться, что появление фрактальной геометрии есть свидетельство продолжающейся эволюции человека и расширения его способов познания и осознания

мира. Возможно, наши дети будут также легко и осмысленно оперировать понятиями фракталов и нелинейной динамики, как мы оперируем понятиями классической физики, евклидовой геометрии. 📷

Список используемой литературы

1. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. М., И.: Ижевск НИЦ, 2001.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. М.: Букинист, 1993.
3. Деменок С.Л. Просто фрактал. СПб: Старта, 2019.
4. [Электронный ресурс]. <http://fractbifur.narod.ru/html/index1.html>
5. [Электронный ресурс]. <https://www.liveinternet.ru/users/lifestyleforyou/post153645471/>
6. [Электронный ресурс]. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/433062/Khaosi_poryadok_fraktalnoy_mir
7. [Электронный ресурс]. <http://www.petelin.ru/pcmagic/math/math.htm>
8. [Электронный ресурс]. https://artchive.ru/news/2805-Kartiny_kotorye_snimut_stress_fraktaly_v_zhivopisi