

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ИЗОБРЕТАЕМЫХ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИКЕ

Клепиков Валерий Николаевич,

*ведущий научный сотрудник Института изучения детства, семьи и воспитания РАО,
методист МАН «Интеллект будущего», учитель математики, физики и этики средней
школы № 6 г. Обнинска, кандидат педагогических наук, klepikovvn@mail.ru*

В СТАТЬЕ ПРЕДСТАВЛЕНА ПРАКТИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В СООТВЕТСТВИИ С ВЫДВИНУТЫМИ ПРИНЦИПАМИ. ИСПОЛЬЗУЯ МЕТОД ПЛАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕКСТОВ, УЧАЩИЙСЯ, ПО СУТИ, САМ ПОДБИРАЕТ, ПРОЕКТИРУЕТ И СОЗДАЁТ ЗАДАЧИ В ЗОНЕ СВОЕГО БЛИЖАЙШЕГО ВИДЕНИЯ. ТЕМ САМЫМ ОН ОСОЗНАННО НАЩУПЫВАЕТ И ПРОКЛАДЫВАЕТ ИНДИВИДУАЛЬНУЮ ТРАЕКТОРИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ.

• метапредметный подход • теория решения изобретаемых задач • метод пластического моделирования и интерпретации текстов • проблемное поле • зона ближайшего развития • индивидуальная траектория развития • изобретение • инерционное мышление • исследование, проект

*«Математический опыт
учащегося нельзя считать полным,
если он не имел случая решить
задачу, изобретённую им самим»
Д. Пойя*

Продолжая разрабатывать идею метапредметности в современном образовании, очень важно войти в диалог с другими продуктивными идеями, чтобы выявить их взаимодополнительность и тем самым достигнуть уровня взаимообогащения. Одна из существенных идей последних десятилетий XX века — это теория решения изобретательских задач (ТРИЗ) Г. С. Альтшуллера. Трудно переоценить её значение для развития личности учащегося, ведь человек ставится в роль изобретателя и решателя конструкторских задач. Как отмечал известный математик и психолог Л. М. Фридман: «Нахождение способа решения задачи подобно изобретению, а изобретение требует воображения, догадки, фантазии» [7]. Но к этому состоянию школьника нужно ещё подвести, поэтому на базе основного и дополнительного образования вполне закономерно и своевременно возникают лаборатории ТРИЗ.

Основоположник ТРИЗ Г. С. Альтшуллер в статье «Теория решения изобретательских задач как основа развития творческого мышления учащихся» пишет: «ТРИЗ нуждается в школе в той же мере, в какой современная школа нуждается в ТРИЗ. Первая цель: развивать в наиболее благоприятном для этого возраста вкус к творчеству (не только техническому; обучение ТРИЗ можно вести на задачах и упражнениях, относящихся к самым различным областям знания). Открыть мир творчества, привить начальные навыки поведения в этом необычном мире, заразить творчеством, выработать элементы культуры творческого мышления. Вторая цель: использовать ТРИЗ как «живую воду», стимулятор интереса к основным учебным предметам. Освоение и применение ТРИЗ вызывают устойчивую тягу к физике, химии, математике» [2]. Г. С. Альтшуллер приходит к выводу, что основная функция образования — это подготовить к встрече с новыми задачами, с которыми не приходилось сталкиваться раньше.

Сразу оговоримся, что мы рассматриваем ТРИЗ в математике как «теорию решения изобретаемых задач»¹, т. е. осознанно делаем «один шаг назад», учитывая зону актуального развития школьников. Мы исходим из того, что перед тем, как решать

¹ У Г. С. Альтшуллера ТРИЗ расшифровывается, как «теория решения изобретательских задач».

изобретательские задачи, согласно идеям Г. С. Альтшуллера, учащийся должен сам попробовать придумывать, конструировать, создавать и параллельно рефлексировать изобретаемые им задачи. Тем самым мы делаем акцент на том, что учащийся не только решает задачи, которые ему предлагает учитель, но и самостоятельно занимается изобретением задач в зоне ближайшего развития. Более того, по мнению А. А. Гина, учащийся параллельно «изобретает себя» [3]. В этом случае педагог выступает в роли модератора, регулирующего и провоцирующего ребят на неординарные подходы и движения мысли, на воссоздание «горячих» проблем и противоречий. Поэтому каждую новую задачу можно рассматривать как маленький проект, новизну которого мы можем легко проверить по Интернету. Но чтобы учащийся смог органично перейти в зону ближайшего развития, он должен хорошо проработать (выработать) актуальную зону развития.

Замечательно и образно по поводу изобретаемых задач писал Д. Пойя: «Нелегко изобрести новую задачу, одновременно интересную и поддающуюся решению; для этого требуются опыт, вкус и удача. Тем не менее, решив какую-либо задачу, всегда следует предпринять поиски новых. Хорошие задачи похожи на некоторые грибы: они растут группами. Найдя один гриб (или задачу), оглянься вокруг: вполне вероятно, что вы найдёте ещё несколько поблизости» [6].

У нас же возникает образ шара, поверхность которого состоит из плотно подогнанных пазлов (рис. 1). Этот шар символизирует структуру (блок) задач по определённой теме. А главным средством является метод пластического моделирования и интерпретации текстов, суть которого заключается в постепенном наращивании сюжетной, терминологической и числовой сложности задач, в ходе которого мы постепенно выходим на новый уровень понимания изучаемого материала. Главной функцией этого метода является постепенное уточнение и рефлексия формулировок задач [5].

Какие же принципы соблюдаются в ходе изобретения задач?

1. Принцип полноты: в данной тематической области должны быть прорешены все

возможные основные (базовые, стандартные) задачи, и далее — рассмотрены принципиальные нестандартные смысловые повороты и конфигурации (необычные, парадоксальные).

2. Принцип проблемности: в ходе обращения к той или иной области задач важно поставить общую проблему, цель, идею, поставить вопросы («архитектуру вопросов»).

3. Принцип пластичности: в ходе изобретения задач важно трансформировать и модифицировать не только формулировки задач, но и создаваемые для их решения гибкие, порождающие, эвристические модели.

4. Принцип нового шага (сюжетной линии, нового понятия или параметра): в ходе изобретения и решения задач важно постепенно выходить на новый виток (мета-виток) построения и осмысления обновлённого типа задач.

5. Принцип красоты (выразительности): в ходе изобретения задач важно сгармонизировать сюжетную и числовую составляющие текста задачи, т. е., как говорили древние греки, выявить «внутренний эйдос» задачи или блока задач.

6. Принцип материализации: используется тогда, когда для более простого решения можно дополнить абстрактную задачу конкретными данными.

7. Принцип простоты: при изобретении задач, на первой стадии их осмысления и понимания важно изобретать задачи с «комфортными» числами, например, использовать 25 %, 50 %, 75 %, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ и т. д.

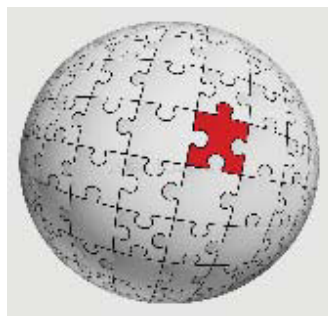


Рис. 1. Шар, символизирующий структуру (блок) задач по определённой теме

8. *Принцип структурности*: в ходе изобретения задач важны её конструктивные особенности, структурные связи, «как она сделана»; базовая задача — это своеобразный трансформер, к которому можно добавлять различные детали.

9. *Принцип конструктивного сомнения*: каждый шаг в ходе изобретения задачи ставится под сомнение, перепроверяется, доводится до логического предела или парадокса, например: пусть 1,5 курицы за 1,5 дня снесут 1,5 яйца и т. д. [4].

Приведём пример изобретения задач на триаду «часть — доля — целое». Эти задачи хороши тем, что в них могут фигурировать несколько частей, долей, целых. Более того, между ними существует диалектическая зависимость и взаимодополнительность, т. е. в роли целого может выступить часть, доля, и наоборот. Более того, очевидно, что подобные задачи отражают диалектические отношения в мире, а значит, они являются универсальными, интегральными, философскими, мировоззренческими. Например, чего только стоит «золотая константа», или «золотая доля», $\Phi \approx 1,62$ (обратное число — 0,62), которое обнаруживается во многих объектах мира, «удерживая» их гармоническое строение. Отметим, что очень важно не просто решать отдельные задачи, которые даёт учитель. А воссоздать посредством задач пространство жизни самой математики, «мир математики», в котором можно обнаружить различные интеллектуальные конфигурации, прорывы, парадоксы, «живое знание», границы и в то же время выход в бесконечные интеллектуальные просторы.

Но данную триаду важно дополнить другими сопряжёнными понятиями: не только «целое», «доля», «часть», но и «всё» («вся», «весь» и т. д.), «порция», «пропорция», «бесконечность», «предел», «проценты» (иногда ребята стремятся ввести поня-

тие «осколки», из совокупности которых уже нельзя собрать целое). Большинство из предлагаемых задач сочинили учащиеся. Очевидно, что пластическую методику работы с данным типом задач можно экстраполировать и на другие темы.

Рассмотрим четыре блока задач. Конечно, предложенная классификация условная. Её можно провести и по другим признакам и основаниям. Для этого и требуется метод пластического моделирования и интерпретации текстов. Всё зависит от индивидуальной траектории движения тех ребят, которые составляют конкретную группу. Более того, если кто-то из ребят самостоятельно смоделирует определённый блок задач, то на базе этого можно создать исследовательскую работу или проект.

Первый блок задач — это решение и изобретение задач, связанных с понятиями «часть» и «целое» (иногда говорят просто — «задачи на части»). Для изобретения задач на часть и целое удобно использовать наглядные (виртуальные) или реальные конструкции из кубиков (рис. 2). Данные объёмные конструкции с удовольствием изобретают сами ребята. Благо, что каждый компьютер имеет такие возможности. Замечательно то, что, благодаря различным конструкциям, развивается пространственное мышление ребёнка.

Здесь вполне уместны следующие вопросы. Что является единицей измерения данной объёмной конструкции? Сколько кубиков в конструкции? Сколько кубиков недостаёт до полной конструкции, т. е. до прямоугольного параллелепипеда? Какой объём данной конструкции? И т. д.

Далее можно постепенно вводить понятие доли с помощью общего вопроса: какую долю составляет та или иная часть от целого? Из скольких долей состоит целое? Сколько

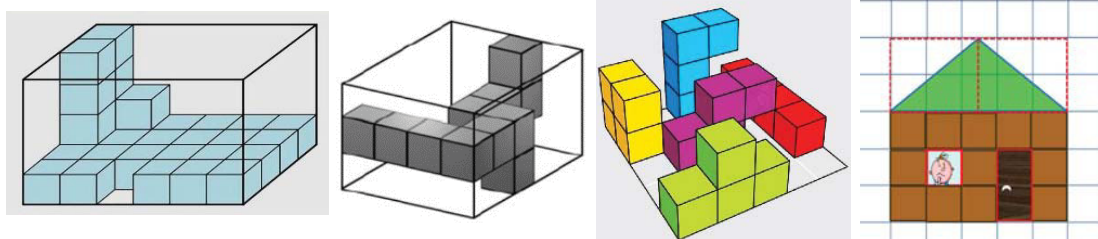


Рис. 2. Наглядные (виртуальные) или реальные конструкции из кубиков

целых можно использовать в данной конструкции?

Приведём пример задачи, связанной с площадями (рис. 3). Замечательно то, что эту задачу можно решить как с помощью частей, так и с помощью долей. «Имеются два равных по площади круга. Части в каждом круге равны. Закрашенная часть первого круга равна 9. Найдите закрашенную площадь второго круга». В первом круге известно, что 3 части дают 9, значит, одна часть — 3, а четыре части — 12. Два круга по площади равны, значит, второй круг тоже — 12. Но второй круг состоит из 3 частей, значит, одна часть — 4, а две части — 8. Ответ: 8. Решим задачу с помощью долей: $9 : \frac{3}{4} = 12$, $\frac{2}{3}$ от 12 = 8.

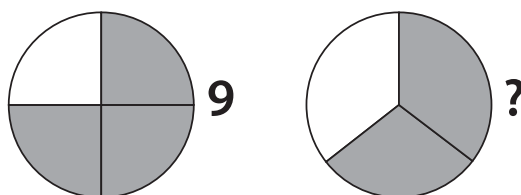


Рис. 3. Пример задачи, связанной с площадями

Приведём пример задачи, связанный с напитками. «Для приготовления напитка берут 2 части вишневого сиропа и 4 части воды. Сколько надо взять сиропа и воды, чтобы получить 900 г напитка?» Пусть масса одной части напитка x г, тогда: $2x + 4x = 900$, $x = 150$ г. Ответ: 300 г — сиропа, 600 г — воды. И здесь важно задаться вопросом: а можно ли эту же задачу сформулировать с помощью долей? Формулируем: «Для приготовления напитка берут $\frac{1}{3}$ доли вишневого сиропа и $\frac{2}{3}$ воды. Сколько надо взять сиропа и воды, чтобы получить 900 г напитка?». Решаем: $\frac{1}{3}$ от 900 = 300 г (сиропа), $\frac{2}{3}$ от 900 — 600 г (воды). Сюжеты подобных задач подсказывает сама жизнь.

При этом в ходе изобретения задач важно почувствовать, когда возникает насущная потребность в ещё одной составляющей — доле? Какую качественно новую смысловую нагрузку несёт доля? Имеет ли доля единицы измерения? Как она может записываться? Как с помощью доли выразить целое, половину, четверть?

Кстати, интересно, что на Руси, согласно народным представлениям, каждый человек, как органичная часть мира, при рождении

наделялся своей определённой долей. Она рассматривалась не сама по себе, а соотносилась с понятием чего-то целого (Благо, Бог, Судьба). В мифологических представлениях образу Доли как хорошей судьбы нередко противостоит Недоля, как олицетворение неудачной, плохой жизни. По некоторым поверьям, хорошая доля может оставить человека, если он всё время грешит. Отсюда словосочетание — «обездоленные люди».

Как известно, доля связывает или устанавливает связь между частью и целым. Например, доля $\frac{1}{4}$ устанавливает связь между

15 см и 60 см: $\frac{15 \text{ см}}{60 \text{ см}} = \frac{1}{4}$. Очевидно, что

доля может быть и больше единицы: $\frac{60 \text{ см}}{15 \text{ см}} = \frac{4}{1}$ (свойство пластичности пропор

ции). Доля не имеет единиц измерения, она всегда — от целого. Например, когда мы встречаем такую запись, как $\frac{1}{2}$ м, то это — $\frac{1}{2}$ от 1 метра = 50 см. При этом в задачах не всегда эти составляющие можно обнаружить в явном виде. Например, в задаче «половина — треть его»: «половина» — это часть, «треть» — это доля, «его» — целое. В этой связи можно составить уравнение: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x$, тогда $x = 1,5$. Или вот ещё одна подобная задача. «Требуется полсотни разделить на половину. Сколько получится?» Ответ: 25 или 100? Другими словами, формулировку задачи важно ещё и правильно интерпретировать. При этом нужно понимать, что составители задач нередко пытаются решателя запутать. Очевидно, что нужно изобретать задачи в той логике, когда необходимо отрабатывать умение находить долю, часть, целое.

Очень продуктивно изобретать задачи в некоторой связке («сгусток знаний»), чтобы выработать «опорный сигнал» (П. М. Эрди-ниев) для того, чтобы легко запомнить, а потом вспомнить, как находится часть, доля, целое. Это очень важно для экзаменов, при подготовке к ним. Например, возьмём то, о чём мы имеем устойчивое представление — часы. Первая задача: как найти 15 минут от 60 (в результате — доля, $\frac{1}{4}$). Вторая задача: как найти $\frac{1}{4}$ от часа (в результате — часть, 15 минут). Третья задача: как найти целое, если известно, что 15 минут от 1 часа составляют $\frac{1}{4}$ (в результате — целое, 60 мин = 1 час).

Доля становится очень существенной, когда целое меняется или неизвестно. Например, в напитке, как бы его объём (целое) ни менялся — 2 литра, 1,5 литра, 1 литр и т. д., постоянно должно сохраняться $\frac{1}{2}$ от всего объёма сока. Если бы мы выразили эту половину в частях, то части были бы всё время разные, но когда мы используем долю, то она остаётся постоянной, в нашем случае — $\frac{1}{2}$. Если долю выразить в процентах, то очень часто приводят пример с солёностью воды: сколько бы мы из моря ни взяли воды, процентное соотношение остаётся постоянным. Другими словами, нам не нужно знать объём воды всего моря. Достаточно — зачерпнуть любое «целое» и найти в нём процентное отношение соли. Например, если в 1 литре морской воды мы обнаружили 35 г соли, то солёность моря в среднем равна 3,5 %.

Как мы уже сказали, целое по величине нередко в задачах меняется: увеличивается или уменьшается. Классическая задача — на сложные проценты. Например. Пусть мы в банк положили 1000 рублей под 20 %. Какой прирост своих денег мы получим за 3 года? Решение: за 1-й год: $1000 + (20\% \text{ от } 1000) = 1000 + 200 = 1200$, за 2-й год: $1200 + (20\% \text{ от } 1200) = 1200 + 240 = 1440$; за 3-й год: $1440 + (20\% \text{ от } 1440) = 1440 + 288 = 1728$. Можно решить по формуле: $A(1 + 0,01P)^K = 1000(1 + 0,01 \cdot 20)^3 = 1728$ рублей. (Ответ: $1728 - 1000 = 728$ рублей.) Итак, первое целое — 1000 рублей, второе — 1200 рублей, третье — 1440, четвёртое — 1728 рублей.

Почему очень важно учитывать, что целое — это единица или 100 %? Придумаем и решим сначала шуточную задачу. «Сергей тратит $\frac{1}{3}$ долю своего времени на занятия в школе, $\frac{1}{4}$ — на игру в футбол, $\frac{1}{5}$ — на музыку, $\frac{1}{6}$ — на компьютер, $\frac{1}{7}$ — на решение задач по математике. Можно ли так жить?» Чтобы проверить, нужно сложить все доли и сравнить полученную сумму с единицей (целым). Если сумма меньше или равна единице, то «так жить можно», если больше — то «так жить нельзя».

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 1 \frac{39}{420} > 1$$

$$0,5x + 0,5 + \frac{x - (0,5x + 0,5)}{2} + 0,5 + \frac{x - (0,5x + 0,5) - \left(\frac{x - (0,5x + 0,5)}{2} + 0,5 \right)}{2} + 0,5 + 5 = x$$

Приведём более сложный пример. «Было у старика три сына. Перед смертью оставил он им завещание: половину всех лошадей — старшему сыну, треть — среднему, младшему — одну девятую. А имущества у него было только лишь 17 лошадей. Попробовали сыновья поделить — ничего не получается. Пошли к мудрецу, который предложил им на время взять его лошадь... Взяли сыновья лошадь и легко решили свою проблему. Сколько лошадей получил каждый сын?» Чтобы решить подобную задачу, очень важно сконструировать хотя бы одну подобную задачу самостоятельно, и тогда обнаружится, что, во-первых, сумма долей не даёт

целого, т. е. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \neq 1$, т. е. отец или ошибся, или сознательно ввёл в завещание «моральную коллизию» или «интригу». Поэтому нельзя решать задачу в следующем ключе: $17 + 1 = 18$, $18 : 2 = 9$, $18 : 3 = 6$, $18 : 9 = 2$, проверка: $9 + 6 + 2 = 17$. Если решать задачу строго математически, то в результате получаются дробные числа, что для данной задачи некорректно, но можно «практически» дробные числа округлить, даже не учитывая лошади мудреца. Поэтому, скорее всего, эта задача — «провокация» или софистическая задача, но очень поучительная!

А вот ещё одна «парадоксальная» задача, где фигурирует понятие «пол-лошади». «К табунщику пришли три казака покупать лошадей. «Хорошо, первому продам я пол-табуна и ещё половину лошади, второму — половину оставшихся лошадей и ещё пол-лошади, третий также получит половину оставшихся лошадей с полулошадью. Себе же оставлю только 5 лошадей». Удивились казаки, как это табунщик будет делить лошадей пополам. Но после некоторых размышлений они успокоились, и сделка состоялась. Сколько купил каждый казак?» Ответ: 1-й казак — 24 лошади, 2-й казак — 12 лошадей, 3-й казак — 6 лошадей. Половина лошади вполне допустима, если в стаде нечётное количество лошадей: если мы поделим нечётное число пополам, то возникнет недостающая половинка. Задачу можно решить по действиям, но мы составим уравнение. За x возьмём всех лошадей, тогда:

Второй блок задач — это решение и изобретение задач, связанных с понятиями «часть», «доля», «целое». При этом важно разобрать проблему: а возможно ли составить задачу, где фигурируют только части, только доли, только целые, т. е. при каких условиях появляется внятная, разумная, а, может быть, даже и красивая («воплощённый эйдос») задача? Но сначала важно заложить в задачу конкретные составляющие — целое, долю, часть. При этом не обязательно, чтобы это было в явном виде, данные компоненты могут только подразумеваться.

Начнём с задачи на сообразительность. «Шоколадка стоит 10 рублей и ещё половину стоимости шоколадки. Сколько стоит шоколадка?». Большинство ребят тут же говорят, что 15 рублей. Однако давайте изобретём модель решения задачи, чтобы она была предельно убедительной. В этой задаче 10 рублей — это часть, половина — это доля, а целое — стоимость всей шоколадки. Ответ: 20 рублей (рис. 4).

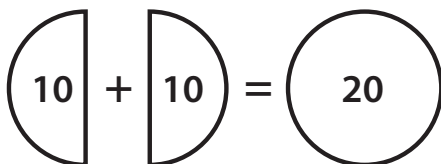


Рис. 4. Задача на сообразительность

При уяснении понятий «целое», «доля», «часть» очень важно отработать «наглядные задачи», чтобы дети почувствовали эти задачи на «зрительно-осознательном уровне». В школе это почти не делается, а зря! Разберём следующую задачу. «У Оли спросили, сколько ей лет. Оля ответила, что если сложить половину её возраста, затем четвертую долю возраста плюс ещё 3 года, то получится её возраст. Сколько лет Оле?» Наглядный способ хорош тем, что подобные задачи могут изобрести и решить даже те дети, которые не умеют ещё решать уравнения с дробями. Дадим картинку решения данной задачи. Каждый квадратик составляет 4 года. Всего квадратиков 4, значит, $4 \cdot 3 = 12$ (рис. 5).

А вот задача, которую сконструировали ребята. «У Серёжи спросили, сколько ему лет. Сережа ответил, что если сложить треть его возраста, затем шестую долю возраста плюс ещё 6 лет, то получится его

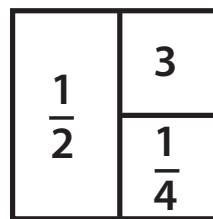


Рис. 5. Задача про возраст Оли

возраст. Сколько лет Серёже?» Здесь важно учесть и понять то, что $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Если две доли в сумме дают половину, то от целого ещё остаётся половина, которая равна 6 лет. Решение: $6 + 6 = 12$ лет (рис. 6).

Ещё раз обратим внимание, что на первых ступенях очень важно отработать решение задач на «наглядно-осознательном уровне». Буквально — сконструировать задачу и её решение с помощью геометрических фигур!



Рис. 6. Задача про возраст Серёжи

В следующей задаче фигурируют в явном виде только доли. «Сергей проехал четверть всего пути. Затем он лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую долю всего пути он проехал спящим? В этой задаче фигурируют только доли, но, конечно же, подразумеваются и целые — это всё время движения и время сна. Пусть x — это время сна, тогда $\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2} \cdot x = 1$. Кстати, рисунок 7 подсказывает, что ответ в задаче — $\frac{1}{2}$. Проверим: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + = 1$.



Рис. 7. Задача про сон

Приведём пример задачи, где в числовом выражении заявлены только доли. «На выборах участвовало 60 % ($\frac{3}{5}$) избирателей. Из этих избирателей 50 % ($\frac{1}{2}$) проголосовали за партию «Справедливость». Сколько процентов от всех избирателей проголосовали за партию «Справедливость»? В этой задаче фигурируют три целых: количество всех избирателей, количество всех проголосовавших и количество проголосовавших за партию «Справедливость». Но решение можно оформить попроще: 50 % от 60 % = 30 %. Обратим внимание, что 50 % выступают в роли доли, а 60 % — в роли целого. Внимание: в задачах за целое с учётом другого контекста может выступать часть или доля!

Другая задача, где фигурируют три доли. «Половину нашего класса составляют девочки, половина девочек увлекаются танцами, а ещё половина, от увлекающихся танцами, занимаются балльными танцами. Какую долю составляют от всего класса девочки, занимающиеся балльными танцами?» В этой задаче целое — это количество детей в классе, которое неизвестно. Но это не мешает нам всё же решить задачу. Но если быть точными, в этой задаче четыре целых: количество детей в классе, количество девочек, количество девочек, увлекающихся танцами, и количество девочек, занимающихся балльными танцами. Чтобы решить задачу, нужно перемножить все доли: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Но эту задачу можно и «материализовать», где в явном виде будут фигурировать целое, доля и часть. Возьмём общее количество детей, мальчиков и девочек, в классе — 24 человека. Найдём количество девочек: $24 : 2 = 12$ девочек. Найдём количество девочек, увлекающихся танцами: $12 : 2 = 6$ девочек. Найдём количество девочек, занимающихся балльными танцами: $6 : 2 = 3$ девочки. Далее: 3 от 24 = $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Так можно проявить с помощью конкретных чисел другие составляющие задачи.

Третий блок задач — это решение и изобретение задач, в которых встречается несколько целых, частей и долей. При этом важно разобрать следующие вопросы. А всегда ли целое — это «всё», «самое большое»? А мо-

жет бесконечная сумма частей быть меньше целого? Здесь важно показать, что целое — это то, относительно чего мы рассуждаем и измеряем. Приведём примеры задач.

Начнём со странной задачи, которую подсказывает сама жизнь. «Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное». Это софистическое рассуждение. В данном умозаключении обыгрывается ситуация, когда мы можем сказать, что полуполное есть полупустое. Если быть точными, то полупустое — это половина от пустого сосуда, полуполное — это половина от полного сосуда. Эти половинки не эквивалентны. Но в разговорной речи их употребляют как равноправные слова, синонимы. Подсказкой к разрешению данного софизма может служить известная поговорка: «оптимист видит полуполный сосуд, а пессимист — полупустой».

А вот ещё одна интересная задача, в которой доли возрастают, а целое остаётся постоянным. «На озере выросли лилии. С сегодняшнего дня число их стало удваиваться, и на 4-й день заросло всё озеро. За сколько дней заросла половина озера?» Ответ: 3 дня. Чем же интересна эта задача? Чтобы заполнить первую половину озера, понадобилось три дня, а на вторую всего лишь один! Продемонстрируем это через возрастание долей: $\frac{1}{16} \rightarrow \frac{2}{16} \rightarrow \frac{4}{16} \rightarrow \frac{8}{16} \rightarrow \frac{16}{16} = 1$. Очевидно, что от $\frac{8}{16}$ до $\frac{16}{16}$, т. е. от $\frac{1}{2}$ до 1 требуется 1 день.

Вот задача чуть-чуть посложнее. «В сосуд кладут бактерию, которая каждую секунду делится на две. Через одну минуту бактериями заполняется весь сосуд. Спрашивается, за какое время заполнится сосуд, если вначале положить не одну бактерию, а две?» Ответ «за 59 секунд» иногда шокирует. Можно гарантировать, что подавляющее большинство ребят будут настаивать на 30 секундах. Более того, как показывает практика, когда они поймут ход решения и согласятся с 59 секундами, то через некоторое время вновь возвращаются к «своим» 30 секундам. Можно себе представить следующую модель решения: если будет одна бактерия, то она за 59 секунд заполнит половину сосуда, а теперь представим две половинки: тогда каждая бактерия заполнит свою половинку и тем самым весь сосуд будет заполнен.

А может быть такое, что в задаче фигурирует бесконечное количество частей и долей? Здесь очень важно рассмотреть задачу-апорию древнегреческого математика Зенона. Зенон доказывает, что быстроногий Ахилл никогда не сможет догнать черепаху, потому что, когда он преодолеет разделяющее их расстояние, черепаха проползёт ещё немного, и так всякий раз до бесконечности (рис. 8). Продемонстрируем «тупиковый» принцип движения на чуть-чуть другой модели, в которой показано, что бесконечная сумма частей или долей никогда не даст целого:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots \rightarrow 1$$

или $50 \text{ м} + 25 \text{ м} + 12,5 \text{ м} + 6,25 \text{ м} + 3,125 \text{ м} + \dots \rightarrow 100 \text{ м}$. Сумма долей или частей будет вечно приближаться к пределу, т. е. к 1 или 100 м, но никогда его не достигнет.

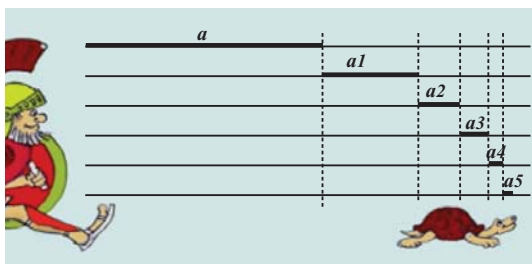


Рис. 8. Задача про Ахилла и черепаху

Учащиеся с удовольствием придумывают задачи, связанные с бесконечностью. «В магазин заходят сладкоежки: один просит взвесить 1 кг сахара, второй — $\frac{1}{2}$ кг, третий — $\frac{1}{4}$ кг, четвёртый — $\frac{1}{8}$. Далее $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$ кг и т. д. «Всё понятно», говорит продавец, и сразу взвешивает х кг». Сколько килограмм сахара сразу взвесила продавец?» Ответ: 2 кг.

Задачи на бесконечность можно завершить притчей. «Рассказывают, что один скупердй обратился к Богу:

- Господи, ты велик и всемогущ! — молвил скупердй. — Что для тебя тысяча лет?
- Один миг, — ответил Бог.
- А тысяча золотых?
- Один грош.
- Так подари же мне их.
- Хорошо, подожди один миг.

Миновал миг. Глядит Бог по сторонам да затылок чешет. Нет скупердья, один тлен остался. Мораль? С бесконечностью следует обходиться очень и очень деликатно».

Четвёртый блок задач — это решение и изобретение задач на проценты, когда доля выступает в роли процентов. Здесь существенны следующие вопросы. При каких условиях проценты можно складывать и умножать, а при каких — нельзя? В чём достоинства и недостатки процентов? В каких задачах от процентов лучше отказаться, т. е. перевести их в дробь?

Начать можно с задач, зашифрованных в таблицах на рисунке 9. Находим закономерность в первой строчке и переносим её во вторую. В первой таблице: $8 + (25\% \text{ от } 8) = 10$, $20 + (\frac{1}{2} \text{ от } 20) = 30$. Во второй таблице: $8 + (\frac{1}{4} \text{ от } 8) = 10$, $9 + (\frac{2}{3} \text{ от } 9) = 9 + 6 = 15$.

8	25%	10
20	$\frac{1}{2}$	?

		10
		?

Рис. 9. Задачи на проценты

Задачи на проценты нередко ребят смущают, так как попадают не совсем «обычные» задачи, которые не дают им вполне утвердиться в своих знаниях. Некоторые учителя ловят ребят на том, что они нечётко различают часть, долю, целое («инертность мышления»). Например: стоимость товара увеличили на 200%; во сколько раз увеличилась стоимость товара? Большинство ребят сразу же говорят, что в 2 раза. А на самом деле — в три раза! Они не учитывают, что товар — это целое, и он уже имеет 100%. Поэтому $100\% + 200\% = 300\%$, $3 \cdot 100\% = 300\%$.

Чтобы продемонстрировать отличие части от доли (процентов), можно привести следующую задачу. «Цену товара повысили на 20%. Через некоторое время её понизили на 20%. Когда товар стоил дешевле: до повышения или после снижения?» Иногда, не особенно думая, ребята говорят, что цена товара не изменилась, размышляя в логике начальной школы: $a + 20 - 20 = a$, т. е. они не учитывают, что доля (проценты) всегда от целого, а целое изменяется.

Поэтому правильный ответ — после снижения, так как второе целое больше. Объяснение: в задаче фигурируют два целых (две цены: большая и меньшая), относительно которых мы находим 20 %.

Или вот ещё одна «необычная» задача, которую придумали ребята: «Искомое число уменьшили на 75 %. На сколько процентов нужно увеличить полученное число до первоначального?» (рис. 10). Кстати, в ходе изобретения и решения задач и нужно стремиться создать несколько «необычную» задачу. С помощью «необычных» происходит как бы вторичная плодотворная рефлексия «обычных» задач. Этот методический приём называется — «остранение», т. е. сделать задачу чуть-чуть странной (его описывал, например, В. Б. Шкловский).

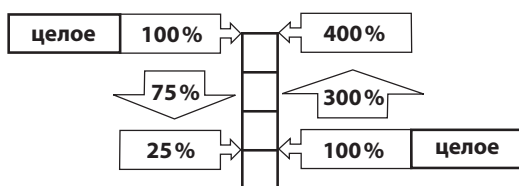


Рис. 10. Задача про искомое число

Вот ещё пример задачи, придуманной ребятами, где нежелательно выходить на проценты. «Сестра пришла из магазина и сказала брату, что цена на апельсины, которая в прошлом месяце возросла наполовину, снова упала наполовину, т. е. цена стала прежней. Однако брат её поправил. Так на какую долю упали в цене апельсины на самом деле?» Решим задачу с помощью картинки. Ответ: $\frac{1}{3}$. Если бы мы ответ находили в процентах, то получилось бы $33\frac{1}{3}\%$ (рис. 11).

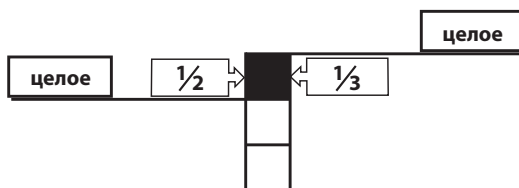


Рис. 11. Задача про апельсины

Как мы уже говорили, очень важно делать акцент на «странных» задачах, которые дают как бы новый взгляд на общеизвестное. «На склад поступило 100 кг грибов. Проведённый анализ показал, что в грибах имеется 99 % воды. Через некоторое время анализ повторили. Оказалось, что количество воды уменьшилось до 98 %. Во сколько раз грибы стали легче?» В первом случае 1 кг — это 1 %, во втором 1 кг —

это 2 %. Составим пропорцию: $\frac{1 \text{ кг}}{x \text{ кг}} = \frac{2\%}{100\%}$;

$x = 50$ кг. Значит, грибы усохли в 2 раза! Здесь удивительно то, что процентное содержание воды уменьшилось на 1 %, а масса уменьшилась в 2 раза! Хотя этот «парадокс» можно объяснить: в этой задаче процентное содержание сухого компонента и вес всех грибов составляют обратно пропорциональную зависимость. Составим таблицу, демонстрирующую это (рис. 12).

А вот обычная практическая задача. «В магазин привезли 800 кг яблок. В первый день продали 25 % от всех яблок (200 кг). Во второй — 50 % от оставшихся (300 кг), в третий — 75 % от оставшихся (225 кг). Сколько яблок осталось после трёх дней продажи (75 кг)?» Итак, в этой задаче фигурируют три целых: вес всех яблок в первый день продажи (800 кг), вес яблок, оставшихся на второй день (600 кг), и вес яблок, оставшихся на третий день продажи (300 кг). Очевидно, что под понятием «всё» или «все» здесь фигурирует вес всех яблок, привезённых в магазин (800 кг). Далее весовая наполненность понятия «целое» уменьшается.

Сформулируем следующую «прямую» задачу: «В четверг акции компании подорожали на 30 %, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. На сколько процентов акции подешевели по сравнению со стоимостью акций при открытии торгов?». Пусть акции стоят 100 рублей. В четверг стали стоить $100 + (30\% \text{ от } 100) = 130$ рублей. В пятницу: $130 - (30\% \text{ от } 130) = 91$ рубль. Разница: $100 - 91 = 9$ рублей. А это составляет 9 %.

%	1	2	4	10	20	40	50	100
Вес, кг	100	50	25	10	5	2,5	2	1

Рис. 12. Задача про грибы

Теперь продемонстрируем обратную задачу: «В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?». Пусть x — это проценты. Пусть акции стоили 100 рублей, а стали стоить 91 рубль. $100 + (x \cdot 100)/100 - (x \cdot (100 + x))/100 = 91$; $x = 30$ %.

По каким же признакам мы отличаем ТРИЗовский подход?

1. Выявляем «клетку» («точку сбора») блока задач, в нашем случае — это доля a/b . При этом даже когда доля в задаче не фигурирует («задачи на часть и целое»), то мы так или иначе соотносим часть и целое («прикидка», «соответствие», «прокручивание» и т. д.).
2. Учитываем оптимальные сюжетные конфигурации задач, которые бы отражали те или иные закономерности в наиболее ярком и выпуклом виде («воплощённый эйдос»).
3. Развиваем и раскрываем «пограничные» и «парадоксальные» моменты задач, когда мы имеем дело с бесконечностью («бесконечно большой величиной») или нулём («бесконечно малой величиной»), стремительным возрастанием или убыванием тех или иных величин (геометрическая прогрессия и т. д.), неожиданными «перепадами» величин, «вхождением» их друг в друга и т. д.
4. Обнажаем и подчёркиваем конструктивные моменты решения задачи: идею, модель, схему, таблицу и т. д., т. е. выявляем её внутреннюю структуру.
5. Блок задач имеет конструктивную форму, стягивающуюся к «центру», «клетке», «реперной точке»: одни задачи органично «стыкуются» с другими, являются их логичным продолжением, раскрывают общую идею (концентрический подход).
6. В целом блок задач становится порождающей моделью, генерирующей новые идеи и задачи. Или: чтобы изобретать задачи, необходимо вновь и вновь воссоздавать хронотоп: пространство и время жизни математических объектов.

Итак, мы показали методику проведения занятий в ТРИЗ-лаборатории. Чтобы занятия проходили интересно, нужно дозировать вновь изобретаемые и уже кем-то придуманные (готовые) задачи, а также добавлять занимательные притчи, рассказы и анекдоты. Например, притча «Половина ребёнка». «Как-то ночью, когда Насреддин сладко спал, жена растолкала его и говорит: “Ребёнок целый час плачет, неужели ты не слышишь? Ведь он наполовину твой! Покачай его”. “Моя половина пусть плачет, — сказал Насреддин. — Успокой свою половину”. С этими словами он повернулся к стене и заснул». □

Список использованных источников:

1. Альтшуллер Г. С., Селюцкий А. А. Крылья для Икара. Как решать изобретательские задачи. Петрозаводск: «Карелия», 1980.
2. Альтшуллер Г. С. Теория решения изобретательских задач как основа развития творческого мышления учащихся // Новые ценности образования: ТРИЗ-педагогика. 2003. № 1 (12).
3. Гин А. А. Приёмы педагогической техники. М.: ВИТА-ПРЕСС, 2013. С. 110.
4. Клепиков В. Н. Три способа решения задач на тройную пропорцию. 2022. № 1.
5. Клепиков В. Н. Метод пластического моделирования и интерпретации текстов // Школьные технологии. 2013. № 3.
6. Пойя Д. Как решать задачу. Львов: «Квантор», 1991.
7. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике. М.: Просвещение, 1985.

References:

1. Altshuller G. S., Selutsky A. A. Wings for Icarus. How to solve inventive tasks. Petrozavodsk: Karelia, 1980.
2. Altshuller G. S. “Theory of inventive problem solving as a basis for the development of creative thinking of students” // New values of education: TRIZ-pedagogy. 2003. №1 (12).
3. Gin A. A. Methods of pedagogical technique. M.: VITA-PRESS, 2013. p. 110.
4. Klepikov V. N. Three ways of solving problems on a triple proportion. 2022. No.1.
5. Klepikov V. N. Method of plastic modeling and interpretation of texts // School technologies. 2013. No.3.
6. Poya D. How to solve the problem. Lviv: “Quantifier”, 1991.
7. Friedman L. M. Learn to learn mathematics. M.: Enlightenment, 1985.