

Сравнительный анализ топологических и классических многогранников

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ
РАБОТЫ
УЧАЩИХСЯ

Автор проекта:

Элеонора Рогожина,

ученица 10 «А» класса, НЧОУ «Лицей «ИСТЭК», г. Краснодар

Руководитель:

Элла Анатольевна Чирва,

учитель математики, НЧОУ «Лицей «ИСТЭК», г. Краснодар

Актуальность. Для многих людей математика является и трудной, и непонятной, и неинтересной. Наш современник Сухомлинский считал, «что чувство удивления — могучий источник желания знать: от удивления к знаниям — один шаг». А математика — замечательный предмет для удивления.

Топология всегда довольно актуальна и полезна для жизни человека, так как она окружает нас повсюду, но мало кто знает, что такое эта самая топология. Многие ветви геометрии развивались в последнее время так быстро и плодотворно, как топология. Она имеет большую практическую значимость. Сфера её приложений непрерывно расширяется: понятия и теоремы топологии полезны во всех областях математики, техники, экономики и психологии. Возможно, в будущем топология откроет нам пространство для новых сфер деятельности, расширит существующие горизонты. Топология достаточно молодая и современная наука, которая идёт в ногу со временем, очень много архитектурных строений, дизайнерских картин и даже мемов основаны на ней. Примерно за сто лет её существования в ней достигнуты результаты, важные для многих разделов математики. В настоящее время очень популярны нестандартные задачи, нестандартные решения и применения.

Проблема: соответствуют ли свойства топологических фигур свойствам классических многогранников?

Цель проекта: изучение свойств топологических и классических многогранников, сравнение их друг с другом.

Объект: многогранники.

Предмет: свойства топологических и классических многогранников.

Гипотеза: можно предположить, что топологические и классические многогранники обладают общими свойствами. Анализ данной темы позволит расширить знания о многогранниках и их видах.

Задачи проекта:

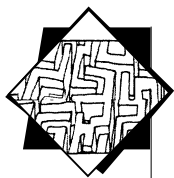
1. Изучить историю топологии.
2. Изучить строение ленты Мёбиуса.
3. Выявить основные типы классических многогранников.
4. Найти примеры топологии в жизни.
5. Сравнить топологические и классические многогранники.

Методы исследования: теоретический анализ и обобщение научной литературы, дипломных работ, лекций по теме объёмных фигур и топологии. Моделирование многогранников.

Практическая значимость: нам известно, что топология, в отличие от стереометрии, не изучается в школах, а только в вузах для профильных специальностей, что очень плохо, так как мы всегда и везде встречаемся с топологией, даже тогда, когда нам нужно распутать наушники или завязать шнурки на обуви. Многогранники в нашей жизни встречаются не реже, и уметь их отличать и разбираться — очень важно.

1. История топологии

Топология — это раздел математики, направленный на изучение поверхностей и свойств фигур, которые непосредственно сохраняются при непрерывных деформациях, таких, как постоянное сжатие и изгибание. Непрерывная деформация — это искажение, деформация фигуры, при которой не должны допускаться перегибы и склейки. Такие геометрические свойства связаны с положением, а не с формой или величиной фигуры. Для топологии неважны измерение углов и размеры фигур, как в геометрии Лобачевского или Неевклидовой геометрии. Изначально топология называлась как «анализ situs», и ещё один вариант — «теория точечных множеств». Топологию часто называют «резиновой геометрией», все фигуры в ней прекрасно изгибаются и растягиваются, как резина. Топология считается одним из самых новейших разделов математики [13].



В XVII веке математик и философ из Франции Рене Декарт, наконец, нашёл неизменяемое соотношение между ребром, числом вершин и граней обычных многогранников. Это выражено в формуле Декарта, как: $V - E + F = 2$, где E — число рёбер, V — число вершин, и F — число граней. В XVIII веке математик из Швеции Леонард Эйлер дал строжайшее доказательство данной формулы. Также он решил знаменитую задачу о кенигсбергских мостах, чем сделал огромный вклад в развитие топологии. Данная задача об острове на малоизвестной реке, семи мостах, Прегеле в Кёнигсберге. Данные мосты соединяли остров с берегами. Сложность в том, чтобы выяснить, возможно ли обойти все данные нам мосты по особо составленному маршруту, побывав на каждом острове только один раз и обязательно вернувшись в исходную точку. Вот только Эйлер поменял сушу на точки, а мосты на линии. Полученный образ Эйлер назвал графом, точки — вершинами графа, а линии — рёбрами графа. Эйлер показал нам, что все ребра можно обойти ровно один раз, по замкнутому маршруту, только если граф содержит в себе чётные вершины. В задаче о кенигсбергских мостах граф содержит в себе только нечётные вершины, и получается, что мосты невозможно обойти так, чтобы маршрут продолжал быть непрерывным и все точки можно было бы обойти только по одному разу, вернувшись в изначальное положение.

Отсюда можно сделать такой вывод: решение Эйлера зависит только от взаим-

ного расположения мостов. А в XIX веке Август Мёбиус предложил ещё одну задачу — четырёх красок, которую далее решали и исследовали Морган и Кэли. Первым же настоящим трудом по топологии были исследования Листинга.

Основными разделами топологии являются:

- *Теоретико-множественная топология* — это раздел топологии, изучающий непрерывность без каких-либо добавлений, а также исследование основательных вопросов топологии, таких, как компактность и связность.

- *Алгебраическая топология* — раздел топологии, изучающий уже непрерывности объектов алгебры, типа гомологии и гомологических групп.

- *Дифференциальная топология* — раздел топологии, которая изучает гладкие образования с точностью до диффеоморфизма. У дифференциальной топологии есть два подраздела: теория узлов и маломерная топология [5].

В топологии, на удивление обычным людям, нет разницы между мячом и обыкновенным шаром, цилиндром и блином. Это один из высочайших уровней абстракции, математической абстракции, который исследует свойства данной ей поверхности как таковой, не обращая внимания на её размеры и иногда даже форму. В топологии шар можно увеличить и раскатать в цилиндр, после чего цилиндр можно расплющить в блин, но, чтобы сделать тор, придётся либо создать отверстие в блине, либо придётся склеивать цилиндр.

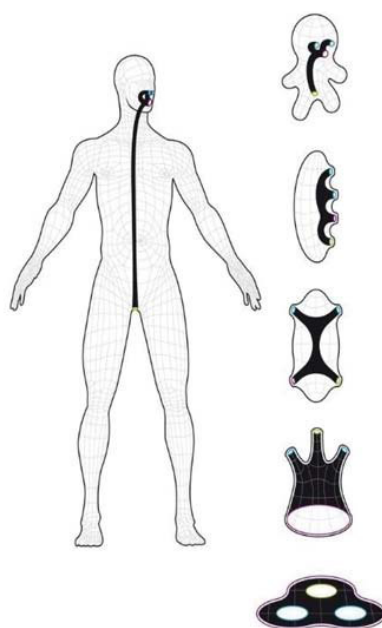


Рис. 1. Топологический человек

В топологии именно отверстия и ничего больше — одно из основных свойств поверхности. Если разложить на поверхности шара петлю из нитки, её получится стянуть без единого узелка, и такое созданное пространство называется «односвязным». С тором такое не получится, так как этому мешает отверстие. Этого нельзя сделать из-за того, что нельзя превратить фигуру с разной линейной связностью одну в другую без перегибов и разрывов. Фигуры в топологии, для которых такое дозволено, называются гомеоморфными, это можно сравнить с игрой разными кусочками пластилина — а именно преобразованиями. Мы узнали, что тор гомеоморфен чашке, а цилиндр и тор не гомеоморфен, но мы до сих пор не знаем, чему гомеоморфен человек [1].

Обычная, привычная для всех нас медицина учит, что у человека всего семь естественных отверстий: ноздри в носу, выходы половых органов, уши и, конечно же, выход и вход желудочно-кишечного тракта. Но более продвинутая, современная медицина обращается к анатомии и считает иначе — половые органы у мужчин заканчиваются яичками, а именно, по мнению топологии, отверстие есть, но оно слепое, и считать его нельзя, так как это тупик, ис-

тинная впадина, которую с помощью непрерывных деформаций можно устранить без разрывов и перегибов. То же и с женскими половыми органами, данные отверстия есть, но они также считаются слепыми, как и мужские [18].

Та же ситуация и с ушами, отверстия которых заканчиваются перепонками, достаточно герметичными. Остаётся только вход и выход желудочно-кишечного тракта и просветы ноздрей, которые связаны с трактом. Итого у нас всего четыре отверстия, непрерывно связанных друг с другом, что является для нас проблемой, но не такой сложной. Довольно популярной редакции «PopMech» пришлось привлечь тополога, чтобы выяснить: что человек гомеоморфен тройному тору что у него получилось.

В топологии можно легко вывернуть мяч наизнанку, но не всегда легко узнать, к какой из списка фигур можно подвести поверхность: к тору, цилиндру и тому подобное. Для топологии не придумали особых строгих, общих правил, и всё зависит от поверхности и от того, как эта поверхность задана. Если мы опишем её как сферу, по формуле, то задача станет ещё сложнее. Если же саму поверхность мы опишем как атлас, то есть набор составляющих её фигур

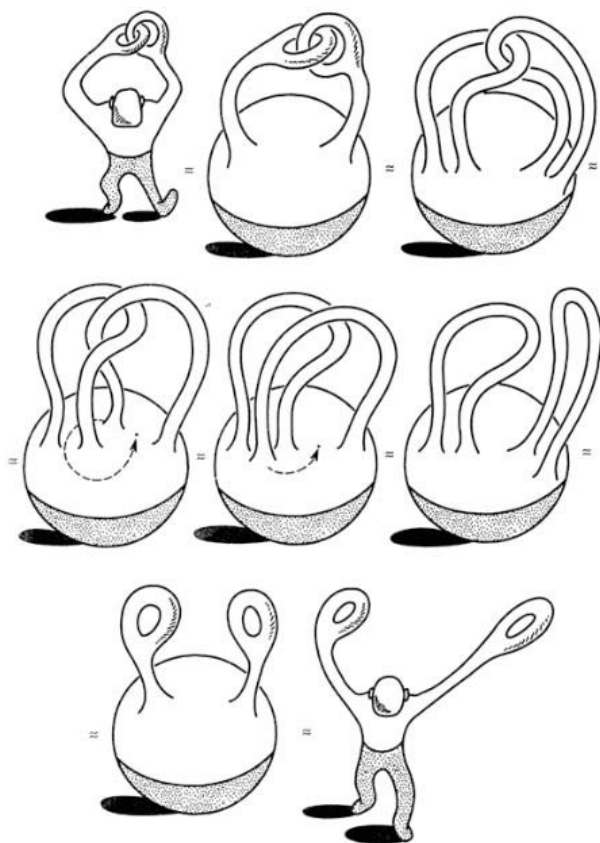


Рис. 2. Руки человека-тополога

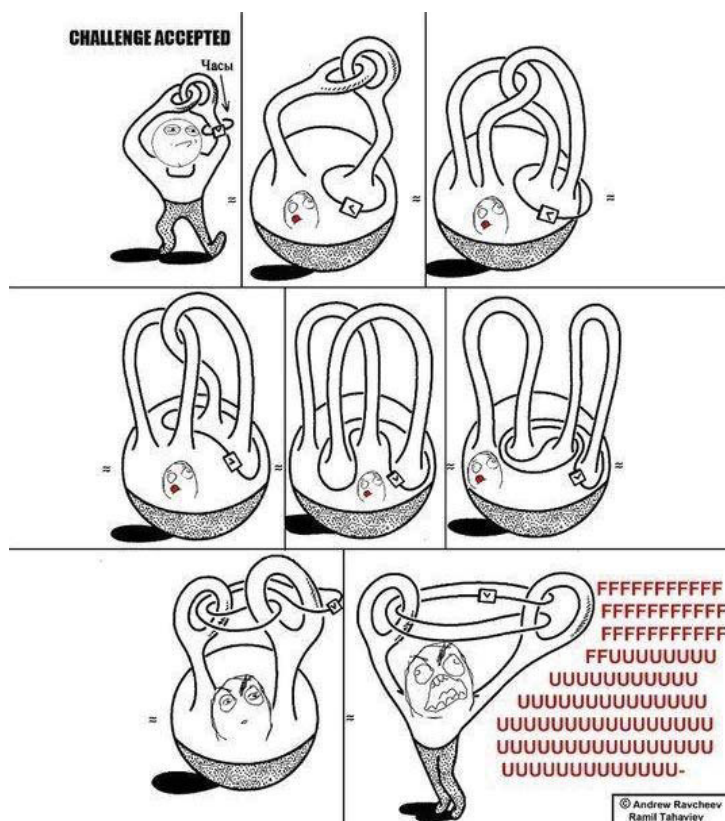
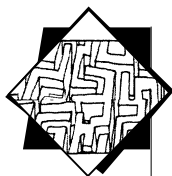


Рис. 3. Человек-тополог надевает часы

и соответствующих своим правилам склейки, то найти исходную фигуру станет достаточно легко для топологов.

В топологии даже можно расцепить пальцы, но только с помощью непрерывных деформаций, которые невозможны в жизни.

Но если на нашего топологического человека предварительно надеть на руку часы, то поставленная задача станет невыполнимой [16].

2. Теория о ленте Мёбиуса и других его открытиях

Нам известно уже немало случаев, при которых два учёных, независимых друг от друга, совершают открытия одновременно. И в этот раз в XIX веке два математика — Август Мёбиус и Иоганн Бенедикт создали свою ленту Мёбиуса.

Данное открытие называют всегда по-разному. Лента, поверхность, петля. Эта лента непосредственно связана и является топологической, а именно является непрерывным, односторонним объектом, с границей в Евклидовом пространстве, где вероятно из одной такой точки поверхности без пересечений попасть в любую другую точку.

Лента, или же петля, была названа в честь Мёбиуса, и всё потому, что именно Август описал в своём труде «Об объёме многогранников» её истинную геометрическую поверхность. Но и Листинг не остался в тени, его считают отцом, основателем самой топологии [7].

У данной поверхности есть свои свойства, как и у всех остальных поверхностей. Одной занимательной особенностью считается то, что лента — это двухмерный объект, который возможно показать полностью только в трёхмерном пространстве. Также, если начать чертить линию по одной стороне ленты, вы вернётесь в ту же точку, от которой и начали. На самом деле это несложно проверить, достаточно взять прямоугольник и соединить его стороны, предварительно перекрутив одну из них. После этого вы можете спокойно разрезать её вдоль центра. Если бы вы разрезали обычную поверхность, то вы бы получили две фигуры, но с лентой Мёбиуса всё куда сложнее и интереснее. У вас будет всё та же петля, но уже другой ширины и длины. Когда вы делали данную поверхность, вы переворачивали одну из сторон всего лишь один раз. Но если сторону перекрутить два раза, или даже

больше, то получите более разнообразную фигуру даже при разрезе вдоль центра.

Уже существуют научные явления, которые приносят в нашу жизнь, полной общности, свои тайны и свои загадки. К данным явлениям, как уже известно, относится и лента Мёбиуса. Математика, существующая в наше время, превосходно описывает все особенности и свойства поверхности с помощью формул. К сожалению, обычные люди, слабо понимающие все прелести геометрии, в повседневной жизни практически постоянно сталкиваются с предметами, мебелью, созданными в геометрии и даже не подозревают об этом [11].

Поверхность Мёбиуса — это объект изучения топологии, с помощью которого исследуют общие свойства фигур, сохраняющиеся при таких непрерывных деформациях, как: скручивание, сжатие, изгибание, выворачивание и растяжение. Как мы уже узнали и даже проверили, особенностью поверхности Мёбиуса является то, что она обладает односторонностью и непрерывностью. Лист Мёбиуса со времён своего создания считается топологическим, а исходя из этого — непрерывным и односторонним, где дозволено из одной точки на поверхности, никогда не пересекая края, попасть в любую другую точку поверхности.

Ленту Мёбиуса, а именно её модель, можно легко создать с помощью полоски бумаги или же треугольника, предварительно перевернув одну из сторон данной поверхности, после их нужно будет соединить, чтобы получилась замкнутая фигура. Можно попробовать закрасить одну

сторону ленты, но как говорил Р. Курант и Г. Роббинс: «Если кто-то попытается раскрасить только одну сторону поверхности ленты Мёбиуса, то пусть лучше сразу погрузит её в ведро с краской» [13].

3. Понятие о классических многогранниках

Если оглянуться вокруг себя, то можно заметить, что многие предметы представляют собой геометрические фигуры. В 10-м классе мы начали изучать новый раздел геометрии — стереометрию.

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

Наш мир представляет собой трёхмерное пространство, в котором фигуры имеют объём. Объёмные фигуры обладают дополнительными свойствами по сравнению с плоскими. Эта работа поможет нам разобраться, какими свойствами обладают объёмные тела.

В стереометрии изучаются следующие объёмные тела: цилиндр, шар, конус, куб, параллелограмм, тетраэдр, пирамида, призма, икосаэдр, октаэдр, додекаэдр и др.

Многогранник — это геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками, называемыми гранями.

Стороны граней — рёбра многогранника, а концы рёбер — вершины многогранника. По числу граней различают четырёхгранники, шестигранники и т. д.

Многогранник называется выпуклым, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

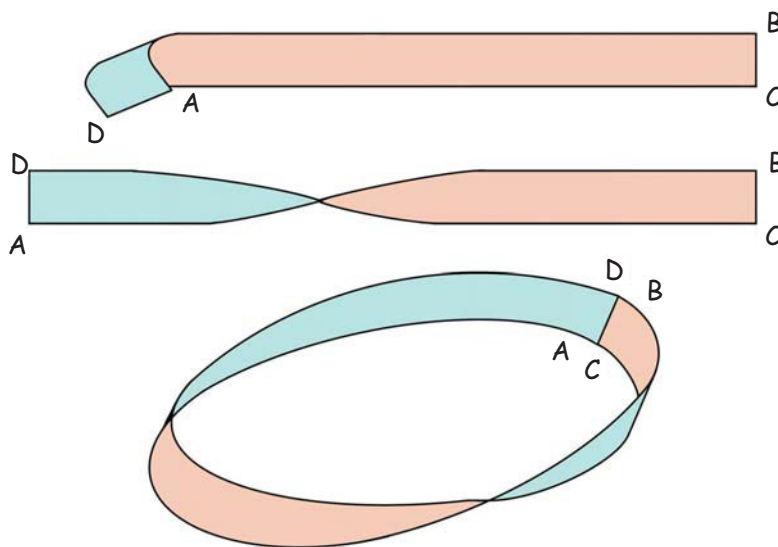
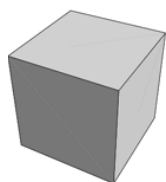
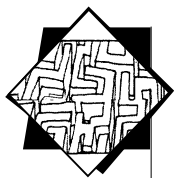
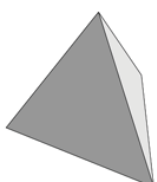


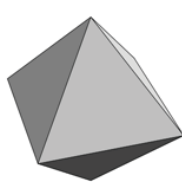
Рис. 4. Лента Мёбиуса



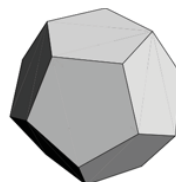
Куб



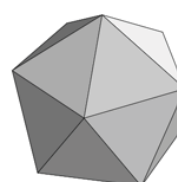
Тетраэдр



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Рис. 5. Платоновы многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники, в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер, а соседние грани образуют равные углы.

Оказывается, что правильных многогранников ровно пять — ни больше ни меньше. Ведь для того, чтобы получить какой-нибудь правильный многогранник, в каждой вершине, согласно его определению, должно сходиться одинаковое количество граней, каждая из которых является правильным многоугольником.

Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360° , иначе никакой многогранной поверхности не получится. Перебирая возможные целые решения неравенств: $60^\circ < 360^\circ$, $90^\circ < 360^\circ$ и $108^\circ < 360^\circ$ (к — число плоских углов, сходящихся в одной вершине многогранника), доказываются, что правильных многогранников ровно пять.

Правильные многогранники известны с древнейших времён. Их орнаментные модели можно найти на резных каменных шарах, созданных в период позднего неолита, в Шотландии, как минимум за тысячу лет до Платона. В костях, которыми люди играли на заре цивилизации, уже угадываются формы правильных многогранников [10].

Первые упоминания о многогранниках известны ещё за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них — пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м. Неслучайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии.

В значительной мере правильные многогранники были изучены древними греками, начиная с VII в. до н.э. Некоторые источники (такие, как Прокл Диадокх) приписывают честь их открытия Пифагору. Другие утверждают, что ему были знакомы

только тетраэдр, куб и додекаэдр, а честь открытия октаэдра и икосаэдра принадлежит Теэтету Афинскому, современнику Платона. В любом случае Теетет дал математическое описание всем пяти правильным многогранникам и первое известное доказательство того, что их ровно пять.

Правильные многогранники характерны для философии Платона, в честь которого и получили название «платоновы тела». Платон писал о них в своём трактате «Тимей» (360 г. до н.э.), где сопоставил каждую из четырёх стихий (землю, воздух, воду и огонь) определённому правильному многограннику. Земля сопоставлялась с кубом, воздух — с октаэдром, вода — с икосаэдром, а огонь — с тетраэдром. Для возникновения данных ассоциаций были следующие причины:

- жар огня ощущается чётко и остро (как маленькие тетраэдры);
- воздух состоит из октаэдров: его мельчайшие компоненты настолько гладкие, что их с трудом можно почувствовать;
- вода выливается, если её взять в руку, как будто она сделана из множества маленьких шариков (к которым ближе всего икосаэдры);
- в противоположность воде совершенно непохожие на шар кубики составляют землю, что служит причиной тому, что земля рассыпается в руках, в противоположность плавному току воды.

По поводу пятого элемента, додекаэдра, Платон сделал смутное замечание: «...его бог определил для Вселенной и прибежал к нему в качестве образца»

Была выведена формула, связывающая число вершин (В), граней (Г) и рёбер (Р) любого выпуклого многогранника простым соотношением:

$$В + Г = Р + 2.$$

Доказал это удивительное соотношение один из величайших математиков Леонард Эйлер (1707–1783), поэтому формула названа его именем: формула Эйлера. Этот гениальный учёный, родившийся в Швейцарии, почти всю жизнь прожил в России,

и мы с полным основанием и гордостью можем считать его соотечественником.

Самое удивительное в этой формуле, что она верна не только для правильных многогранников, но и для всех многогранников.

Древнегреческий учёный Архимед обобщил понятие правильного многогранника и открыл новые математические объекты — полуправильные многогранники. Так он назвал многогранники, у которых все грани — правильные многоугольники более как одного рода, а все многогранные углы конгруэнтны. Только в наше время удалось доказать, что тринадцатью открытыми Архимедом полуправильными многогранниками исчерпывается всё множество этих геометрических фигур.

Множество архимедовых тел можно разбить на несколько групп.

Первую из них составят пять многогранников, которые получаются из платоновых тел в результате их усечения.

Так могут быть получены пять архимедовых тел: усечённый тетраэдр, усечённый гексаэдр (куб), усечённый октаэдр, усечённый додекаэдр и усечённый икосаэдр.

Другую группу составляют всего два тела, именуемых также квазиправильными многогранниками. Эти два тела носят названия: кубооктаэдр и икосододекаэдр.

Два последующих многогранника называются ромбокубооктаэдром и ромбоикосододекаэдром. Иногда их называют также «малым ромбокубооктаэдром» и «малым ромбоикосододекаэдром» в отличие от большого ромбокубооктаэдра и большого ромбоикосододекаэдра.

Наконец, существуют две так называемые курносые модификации — одна для куба, другая — для додекаэдра. Для каж-

дой из них характерно несколько повёрнутое положение граней, что даёт возможность построить два различных варианта одного и того же «курносого» многогранника (каждый из них представляет собой как бы зеркальное отражение другого).

В XVI веке немецкий астроном Иоганн Кеплер пытался найти связь между пятью известными на тот момент планетами Солнечной системы (исключая Землю) и правильными многогранниками.

В книге «Тайна мира», опубликованной в 1596 году, Кеплер изложил свою модель Солнечной системы. В ней пять правильных многогранников помещались один в другой и разделялись серией вписанных и описанных сфер. Каждая из шести сфер соответствовала одной из планет (Меркурию, Венере, Земле, Марсу, Юпитеру и Сатурну). Многогранники были расположены в следующем порядке (от внутреннего к внешнему): октаэдр, за ним икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр и, наконец, куб. Таким образом, структура Солнечной системы определялась правильными многогранниками. Позже от оригинальной идеи Кеплера пришлось отказаться, но результатом его поисков стало открытие двух законов орбитальной динамики — законов Кеплера, изменивших курс физики и астрономии, а также правильных звёздчатых многогранников (тел Кеплера — Пуансо).

Таким образом, можно выделить основные типы многогранников: Платоновы многогранники («правильные», соответствующие определённому элементу), Архимедовы многогранники (все многогранные углы которых равны, а грани — правильные многоугольники), многогранники Пуансо (звёздчатые многогранники).

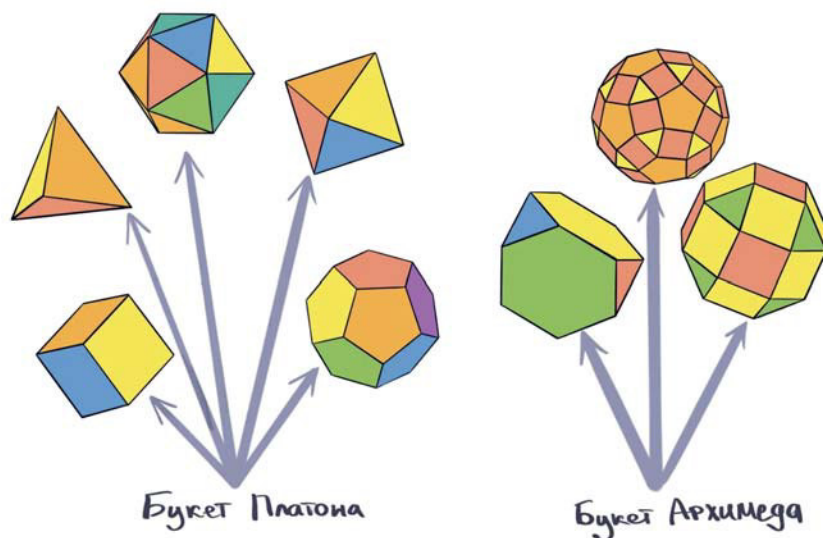


Рис. 6. Многогранники Платона и Архимеда

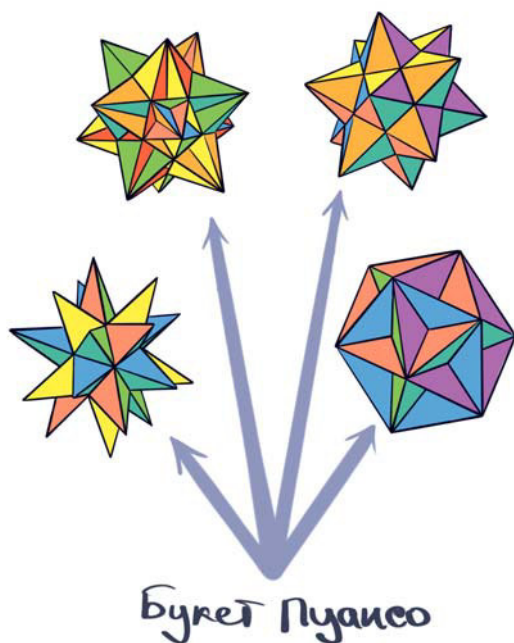
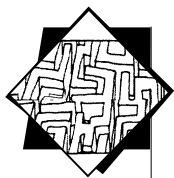


Рис. 7. Многогранники Пуансо

4. Многогранники в жизни

Для обычных людей будет достаточно сложно в полной мере оценить открытие ленты Мёбиуса, но они даже не подозревают, где данная петля может пригодиться.

Поверхность Мёбиуса используют в самых различных целях. Например, в искусстве. Самой масштабной и известной работой, посвящённой ленте Мёбиуса, считается произведение Red Ants или же известные у нас «Красные Муравьи», которых создал голландский художник Мауриц Эшер.

На данной картине изображены муравьи, ползающие по петле Мёбиуса по одной стороне, но можно подумать, что стороны две, если не присматриваться. Муравьи двигаются по одной стороне, бесконечно, друг за другом.

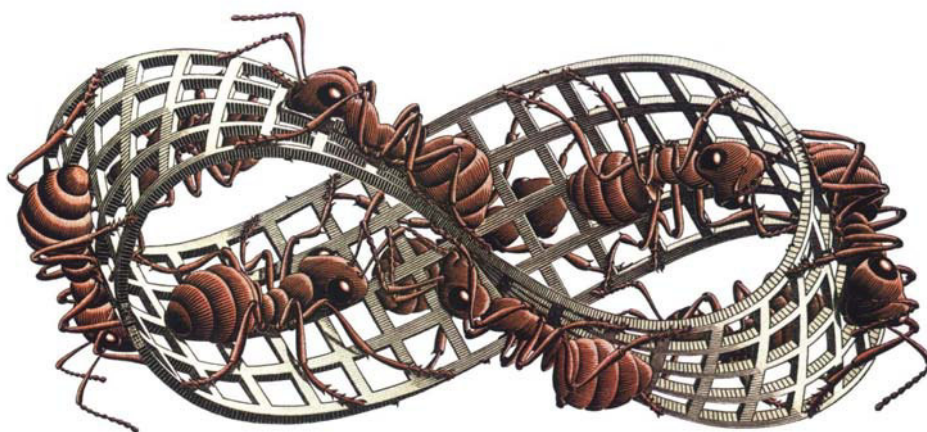


Рис. 8. Мауриц Эшер «Red Ants»

Сразу можно догадаться, что художник вдохновился статьями и книгами по топологии, он явно был увлечён геометрией. Ведь на его литографиях и гравюрах часто мелькают различные фракталы, оптические иллюзии и, конечно же, геометрические формы.

Интерес к открытию Мёбиуса действительно неподдельный, так как даже спортивные ввели награды в форме данной поверхности.

А также по произведению писателя-фантаста А. Дейча «Лента Мёбиуса» снято немало популярных и непопулярных фильмов. Наподобие ленты Мёбиуса создаётся множество различных украшений, элементов одежды, завораживающих зданий и даже обычная мебель.

Многих людей волновала подозрительная схожесть формы ленты Мёбиуса с формой молекулы ДНК. Существует гипотеза, которую выдвинул известный цитолог Навашин, что форма хромосомы, а именно кольцевой, по строению идентична ленте Мёбиуса. На данную мысль учёного навёл тот факт, что хромосома, размножаясь, становится ещё более длиннее, чем с самого начала, или же превращается в два сравнительно небольших кольца, и цепи, которые проходят через друг друга неоднократно, очень похожи на опыты, которые мы проводили выше, а именно разрезали ленту вдоль по центру.

Примерно к 2015 году учёные из Соединённых Штатов Америки и Европы всё же смогли закрутить свет в поверхность Мёбиуса. В своих опытах учёные использовали структурированный свет и оптические линзы, где структурированный свет — специально сфокусированный лазерный луч с поляризацией и интенсивностью в абсолютно каждой точке движения. По

итогах опытов были созданы световые ленты Мёбиуса.

Но есть и ещё более масштабная теория для нас. Вселенная может быть не сферой, не плоскостью, а огромной петлей Мёбиуса. Именно такой идеи придерживался сам Эйнштейн. Он сам предположил, что якобы Вселенная замкнута, и аппараты в космосе, стартовавшие строго из определённой её точки и летящие всё время строго прямо, возвращаются в исходную позицию, из которой и стартовали.

Но пока это всего-навсего лишь гипотезы, у которых есть как противники, так и сторонники. Ещё никто знает, к какому открытию приведёт учёных такой простой будто бы обычный объект, как поверхность Мёбиуса.

Идеи Платона и Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира и в наше время нашли своё продолжение в интересной научной гипотезе, которую в начале 1980-х высказали московские инженеры В. Макаров и В. Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдровую структуру Земли. Она проявляется в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра.

Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдро-додекаэдровой сетки; 62 вершины и середины рёбер многогранников, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления. Здесь располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана. В этих узлах находятся озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник.

Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

В микромире многогранники встречаются в виде молекул, вирусов и бактерий — простейших организмов. Например,

фуллерены — шарообразные молекулы углерода C_{60} . Элементарной ячейкой воды являются тетраэдры, содержащие пять молекул H_2O . Форму тетраэдра также имеют молекулы метана (CH_4) и молекула аммиака (NH_3).

В природе встречаются объекты, обладающие симметрией икосаэдра. Например, вирусы. Исключительностью икосаэдра вирусы воспользовались неслучайно. Тут всё дело в экономии генетической информации.

Остаётся добавить, что по законам математики для построения наиболее экономичным способом замкнутой оболочки из одинаковых элементов нужно сложить из них икосаэдр, который мы наблюдаем у вирусов.

Так решают вирусы сложнейшую задачу: найти тело наименьшей поверхности при заданном объёме и притом состоящее из одинаковых и тоже простейших фигур. Вирусы, мельчайшие из организмов, настолько простые, что до сих пор неясно — относить их к живой или неживой природе. Эти самые вирусы справились с геометрической проблемой, потребовавшей у людей более двух тысячелетий! Все так называемые сферические вирусы, в том числе такой страшный, как вирус полиомиелита, представляют собой икосаэдры, а не сферы, как думали раньше.

Бактериофаги (греч. *phagos* — пожиратель; буквально — пожиратели бактерий) — бактериальные вирусы, вызывающие разрушение бактерий и других микроорганизмов, также имеют форму икосаэдра. Бактериофаг прикрепляется своим отростком к бактериальной клетке и, выделяя фермент, растворяет клеточную стенку; затем содержимое его головки через каналец отростка переходит внутрь клетки, где под влиянием нуклеиновой кислоты фага останавливается синтез бактериальных белков.

Водоросль вольвокс — один из простейших многоклеточных организмов — представляет собой сферическую оболочку, сложенную в основном семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками.

5. Многогранники в природе. Кристаллы

Мир кристаллов — мир не менее красивый, разнообразный, развивающийся, зачастую не менее загадочный, чем мир живой природы. Важность кристаллов для

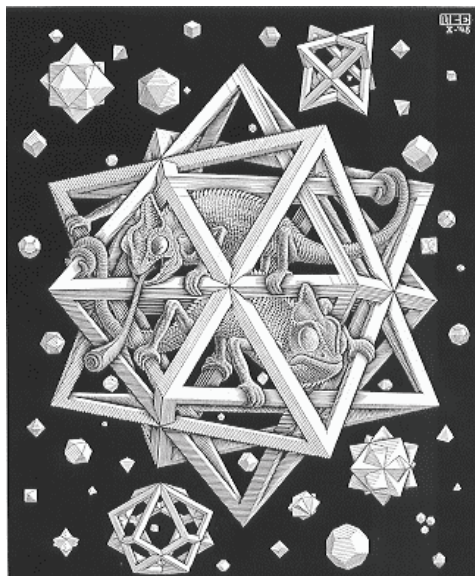
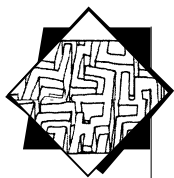


Рис. 9. Эшер, гравюра «Звёзды»

геологических наук состоит в том, что подавляющая часть земной коры находится в кристаллическом состоянии.

В естественной среде правильные многогранники можно встретить в виде кристаллов (минералов).

Форму тетраэдра передаёт сурьмянистый сернокислый натрий.

Даже необработанный алмаз отчётливо передаёт форму октаэдра. После шлифовки камень точно соответствует геометрической форме октаэдра.

Строение молекулы перовскита, химическая формула — CaTiO_3 , точно соответствует правильному многограннику Шпинель. Своё название камень получил от латинского «sp'inella» — маленький шип.

Куб-монокристалл объединяет в себе кристаллы поваренной соли NaCl .

Кристалл пирита (сернистого колчедана FeS) имеет форму додекаэдра. Пирит (от греч. «пир» — огонь) — сернистое железо или серный колчедан, наиболее распространённый минерал из группы сульфидов. Размеры кристаллов пирита достигают нескольких сантиметров.

Бор — имеет форму икосаэдра.

Архитектурные шедевры находятся в разных уголках земного шара и отражают особенности человеческой души. Тайные людские желания воплощаются в форме необыкновенных зданий.

Совершим небольшое путешествие по многогранникам в архитектуре.

Многогранники в искусстве

Леонардо да Винчи, Сальвадор Дали, Альбрехт Дюрер, Мориц Корнелис Эшер.

Титан Возрождения, живописец, скульптор, учёный и изобретатель Леонардо да Винчи (1452–1519) — символ неразрывности искусства и науки. Закономерен его интерес к таким прекрасным, высоко симметричным объектам, как выпуклые многогранники.

Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией, Альбрехт Дюрер (1471–1528), в известной гравюре «Меланхолия» на переднем плане изобразил многогранник.

Голландский художник Мориц Корнелис Эшер (1898–1972) создал уникальные и оригинальные работы.

Правильные геометрические тела-многогранники имели особое очарование для Эшера. Во многих его работах многогранники являются главной фигурой, и часто они встречаются в качестве вспомогательных элементов.

На гравюре «Четыре тела» Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого, многогранники полупрозрачные, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.

Изящный пример звёздчатого додекаэдра можно найти в его работе «Порядок и хаос». В данном случае звёздчатый многогранник помещён внутри стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.

Очень интересная работа Эшера — гравюра «Звёзды», на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, наверное, она не была бы столь исключительна. Но он по какой-то причине поместил внутри центральной фигуры хамелеонов, обеспечив её незаурядность и уникальность.

На картине великого художника Сальвадора Дали «Тайная Вечеря» Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра. Форму додекаэдра, по мнению древних, имела Вселенная, т. е. они считали, что мы живём внутри свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра.

6. Сравнение топологических и классических многогранников

Классические многогранники — все известные нам фигуры: куб, тетраэдр, октаэдр и так далее, среди топологических фигур тоже есть нам хорошо знакомые, например,



Рис. 10. Сальвадор Дали, «Тайная Вечеря»

шар и тораэдр, но не стоит забывать, что в топологии бесконечное множество фигур, зависящее от количества сквозных отверстий изначального объекта. Помимо этого шар относится к типу сферических многогранников так же, как и цилиндр, к примеру.

Сферический многогранник — это та мозаика на сфере, в которой поверхность разделена большими дугами на ограниченные области, называемые сферическими многоугольниками.

То есть, многие топологические фигуры мы можем отнести к типу сферических многогранников, но не стоит забывать, что все топологические фигуры — это видоизменённые классические фигуры, то есть они взаимозависимые.

Заключение

В XIX веке в геометрии появилась самая новая область, которую называли топология, и которая способствовала и определила дальнейшее развитие математики XX века. В данный молодой раздел ушли все те геометрические структуры, которые казались ещё более фундаментальными, из ряда вон выходящие для обычных, привычных разделов геометрии. Эти же фигуры, которые перешли в раздел «тополо-

гия», оказались тесно связанными с физикой, которая изучалась в XX веке. Отдать должное современным учёным стоит великому математику Анри Пуанкаре из Франции, так как он первый правильно выделил топологические структуры, о которых мы говорили раньше, а также дал их непосредственное описание.

Мы уже привыкли к тому, что в математике всё начинается, как ни странно, с физиков. Уильям Томсон, известный как Кельвин в конце XIX века, размышлял над тем, как устроен мир вокруг нас и из чего же состоит материя. По истории в те времена люди знали лишь две теории, которые были довольно основательными, и они были о построении материи, а именно — это были волновая и корпускулярная. В результате своих размышлений Томсон предложил третью теорию — об атомном устройстве, в котором атомы представляют собой якобы маленькие верёвочки, переплетённые между собой, проще говоря — узлы. Эти узлы Томсон решил как можно быстрее классифицировать, чтобы понять, как две так называемых верёвочки соответствуют топологической конструкции. Данная теория учёного Томсона не жила долго, потому что её уничтожил Менделеев своим открытием, а точнее, таблицей химических

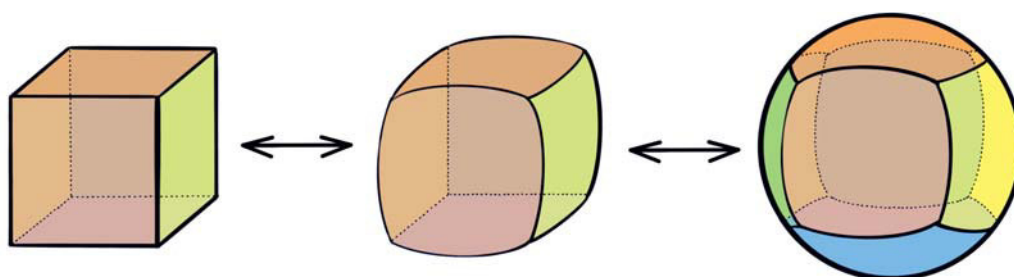
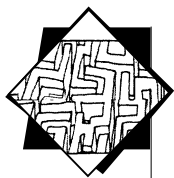


Рис. 11. Топология куба



элементов. Но было поздно, ведь задача была поставлена.

Неожиданно в конце XX века начали появляться приложения топологии. Вначале никто никуда не торопился и работы шли медленно, но со временем их становилось всё больше и больше, от чего теперь всем нам кажется, что есть совсем немного областей, где бы не применялась топология. Даже биологи изучают известную нам теорию узлов, чтобы понять, как устроена ДНК. Чтобы построить квантовый компьютер, используют косы — переплетённые нити материала, движущегося в одном направлении, и ту же теорию используют для того, чтобы научить роботов двигаться. Инженеры используют односторонние ленты Мёбиуса, чтобы сделать ленточные конвейеры более эффективными. Сканирование мозга, которое делают врачи, основано на теории гомологий, а в космологии используют топологию для понимания того, как образуются галактики. Компании, производящие мобильные телефоны, применяют топологию для нахождения «дыр» в зоне покрытия сети, а самим телефонам топология нужна для анализа фотографий, которые они делают.

Именно потому, что топология не зависит от размеров и форм, она стала такой мощной. Сейчас не нужны разные сканеры мозга различных размеров. Когда данные системы GPS о мобильном телефоне ненадёжны, топология всё же может гарантировать, что этот телефон получит сигнал. Квантовые вычисления невозможно выполнить до тех пор, пока мы не сможем построить надёжную систему, устойчивую к помехам, так что косы идеальны для хранения информации, поскольку они не изменятся, если вы их пошевелите.

Топология применяется в самых различных сферах жизни, не только в науке, и мы в этом убедились. Данный раздел не только красив и очень сложен для обычных людей, он помогает художникам создавать новые шедевры, усиленно вдохновляя их. Топология помогает архитекторам строить здания по образу и подобию известной всем ленты Мёбиуса. Этот молодой раздел применяется в создании ювелирных и не только украшений. В элементах одежды. Везде. Топология повсюду. Нам лишь нужно присмотреться. Возмож-

но, мы скоро узнаем, где ещё можно применить топологию. ■

Список использованных источников

1. *Фоменко А. Т.* «Расцепление пальцев» топологического человека и геометрические инварианты» Электронный ресурс: <http://dfgm.math.msu.su/topics/topic07.php>
2. *Александров П. С.* «Введение в теорию множеств и общую топологию». Лань, 2010. 368 с.
3. *Постников М. М.* «Лекции по алгебраической топологии», Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1985. С. 416.
4. *Коняев А.* «Человек гомотопен... спиннеру: как это объяснить» Электронный ресурс: <https://www.popmech.ru/science/417112-chelovek-gomeomorfen-spinneru-kak-eto-obyasnit/>
5. <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
6. *Фоменко А. Т., Мищенко А. С.* «Курс дифференциальной геометрии и топологии».
7. *Адамс Дж. Ф.* Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии. Пер. с англ. под ред. Д. Каледина с добавл.-ми А. Хаттори и В. М. Бухштабера. Электронное издание. М.: Издательство МЦНМО, 2014.
8. *Прасолов В. В.* Поверхность Зейферта. М., 1999. Выпуск 3.
9. *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
10. *Прасолов В. В., Сосинский А.Б.* Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
11. *Ворошилов А. В.* Математика и искусство. М.: Просвещение, 1992.
12. *Рыбников К. А.* История математики: Учебник. М.: Издательство МГУ. 2008. 495 с.
13. *Каченовский М. И.* Математический практикум по моделированию. М.: Просвещение, 2005.
14. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. М.: Аванта плюс, 2002.
15. Энциклопедия для детей. Я познаю мир. Математика. М.: АСТ, 1999.
16. *Ворошилов А. В.* Математика и искусство. М.: Просвещение, 1992. 352 с.
17. *Рыбников К. А.* История математики: Учебник. М.: Изд-во МГУ, 1994. 495 с.
18. *Дорофеев Г. В., Петерсон Л. Г.* Математика. 6 класс. Часть 3. М.: Баласс, 1988.
19. *Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н.* Наглядная геометрия. Учебное пособие для V–VI классов. М.: Мир, 1992.