

О МЕТОДЕ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

Гумеров Ильнур Сабитович,

кандидат педагогических наук, Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета, г. Сибай, Республика Башкортостан

В СТАТЬЕ ПРИВОДЯТСЯ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАНИИ 14 ПРОФИЛЬНОГО ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ. ОСНОВНОЕ ВНИМАНИЕ УДЕЛЯЕТСЯ МЕТОДУ РАЦИОНАЛИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ РАЗЛИЧНОГО ТИПА.

• логарифмическое неравенство • показательное неравенство • метод рационализации

В последние годы активно ведутся дискуссии по поводу Единого государственного экзамена (ЕГЭ), в частности, ЕГЭ по математике. Один из главных аргументов противников ЕГЭ заключается в том, что подготовка к ЕГЭ по математике превращается в натаскивание школьников на умение решать определённые типы задач. Предполагается, что при этом школьник осваивает лишь некоторые правила и алгоритмы без понимания их сути, уподобляясь компьютеру, работающему по строго заданным программам.

Доля истины в этих опасениях есть, но эти опасения скорее связаны не с формой итоговой аттестации (ЕГЭ или какие-то другие варианты), а в первую очередь с подачей материала школьникам. Даже при подготовке к ЕГЭ можно и нужно преподносить материал обоснованно, с объяснением, почему правило или алгоритм именно такие и т. п. Другой вопрос, что обычно у учителей просто не хватает времени на такой подход. Далее мы хотим на примере одного метода решения неравенств рассмотреть методические особенности изучения этой темы именно с точки зрения такого подхода.

Одним из популярных заданий с развёрнутым ответом профильного ЕГЭ по математике является задание 14 (в 2016–2021 гг. — задание 15). Согласно спецификациям КИМ ЕГЭ за последние несколько лет, проверяемые требования (умения) в этом задании формулируются как «уметь решать уравнения и неравенства» [1].

В большинстве случаев задание 14 представляет собой решение показательного, логарифмического или «смешанного» неравенств. Одним из методов решения такого рода неравенств является так называемый метод рационализации. Он позволяет свести решение неравенств указанных выше типов к решению рационального неравенства.

В широком смысле термином «рационализация» можно назвать и другие методы решения неравенств (например, замену переменной), т. к. они также позволяют от данных неравенств перейти к рациональному неравенству (или неравенствам). Но обычно под методом рационализации понимаются такие способы, которые применимы в определённых случаях и основаны на монотонности функций, участвующих в неравенстве.

Проблема, которая возникает при использовании учащимися указанного метода, заключается в том, что многие из них не понимают, почему и как этот метод работает. А это приводит к тому, что, во-первых, они не всегда его правильно применяют, и, во-вторых, в более широком смысле, усиливает неверное впечатление о математике как о наборе формул и алгоритмов, которые нужно запоминать и потом вовремя вспомнить.

Поэтому введение этого метода должно предполагать обоснование идеи и выделение условий применимости этого метода.

Для примера рассмотрим неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$ или равносильное ему неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$. Стандартным методом решения такого неравенства является следующий:

- 1) найти область допустимых значений (ОДЗ) неравенства;
- 2) т. к. основание зависит от x (т. е. нам неизвестно, больше или меньше это основание числа 1), нужно разобрать два случая относительно основания и в каждом случае потенцировать неравенство в соответствии с характером монотонности в этом случае (вообще метод рационализации имеет смысл применять именно в случаях с переменным основанием);
- 3) разобрав оба случая (совокупность), получить объединение решений и затем найти его пересечение с ОДЗ.

Обобщая, можно сказать, что решение данного неравенства сводится к решению на ОДЗ следующей совокупности (1):

$$\begin{cases} a(x) < 1, \\ f(x) < g(x) \\ a(x) > 1, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad (1).$$

При использовании метода рационализации данное неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ заменяется на ОДЗ на рациональное неравенство вида

$$(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0 \quad (2).$$

которое можно решить методом интервалов. По сравнению со стандартным способом получаем существенный выигрыш в объёме проводимых записей и, соответственно, во времени.

Но вот здесь нам нужно показать обоснованность такого решения и чётко указать, когда так можно делать.

Проведём равносильные преобразования системы (1):

$$\begin{cases} a(x) < 1, \\ f(x) < g(x) \\ a(x) > 1, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) - 1 < 0, \\ f(x) - g(x) < 0 \\ a(x) - 1 > 0, \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases}$$

Мы видим, что в обеих системах выражения в левых частях одинаковы. При этом в первой системе оба эти выражения отрицательны, а во второй системе — оба положительны, т. е. имеют одинаковые знаки. То, что эти выражения имеют одинаковые знаки, означает, что их произведение положительно:

$$(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0.$$

Аналогично можно провести рассуждения в обратную сторону, и таким образом мы получаем, что совокупность (1) равносильна неравенству (2) на ОДЗ данного неравенства.

Таким образом, неравенство $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$ на ОДЗ равносильно неравенству $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$. Но нужно чётко сказать, что это не означает, что выражения в левых частях этих неравенств тождественно равны. В данном случае нам важно только то, что совпадают знаки этих выражений (оба больше 0), а не их значения. В общем случае можно доказать, что знак выражения $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком выражения $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x))$ при всех допустимых значениях аргумента.

Отсюда вытекает условие применимости данного метода: мы можем заменить выражение вида $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ на выражение $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x))$ только в том случае, когда нам важен только знак этих выражений, т. е. в неравенствах вида $F(x) > (<, \geq, \leq) 0$, где $F(x)$ представляет собой одно такое выражение или произведение (частное) таких выражений.

При этом нужно постоянно выделять, что эти замены делаются на ОДЗ исходного неравенства.

С методической точки зрения полезнее будет сначала чётко освоить стандартный метод решения таких неравенств с пониманием, почему получаются такие знаки, когда они меняются, т. е. требуется понимание свойств монотонности логарифмической (показательной) функции. Далее уже можно давать метод рационализации, обосновав его на одном типе неравенств. После этого можно указать и другие аналогичные замены, основываясь на ранее введённых.

Например, неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) > 1$ можно переписать в виде $\log_{a(x)} f(x) - 1 > 0$, далее в виде $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} a(x) > 0$ и, таким образом, свести к ранее рассмотренному случаю. Значит, на ОДЗ исходного неравенства оно равносильно неравенству $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - a(x)) > 0$.

Аналогично неравенство $\log_{a(x)} f(x) > 0$ можно записать в виде $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} 1 > 0$ и тогда на ОДЗ оно будет равносильно неравенству $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - 1) > 0$.

Также метод рационализации удобно применять для решения показательных неравенств вида $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} > 0$ и приводимых к этому виду. Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что это неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$.

В самом общем виде метод рационализации можно применять для решения неравенств разных типов или смешанных неравенств, после их приведения к нужному виду (если это возможно).

Рассмотрим следующий пример [2, с. 134]: решите неравенство $\frac{\log_{3-x}(x+4) \cdot \log_{4x}(5x-6)}{\sin(\pi+x)} \geq 0$.

Находим ОДЗ исходного неравенства:

$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ 3-x > 0, 3-x \neq 1, \\ 5x-6 > 0, \\ 4x > 0, 4x \neq 1, \\ \sin(\pi+x) \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, 2; 2) \cup (2; 3).$$

Данное неравенство уже в исходном виде допускает применение метода рационализации, т. к. правая часть — нулевая, а левая представляет собой произведение нескольких выражений. Поэтому нам важен только знак этих выражений. Тогда на ОДЗ мы можем заменить логарифмические выражения на рациональные:

$$\frac{(3-x-1)(x+4-1) \cdot (4x-1)(5x-6-1)}{\sin(\pi+x)} \geq 0.$$

Учитывая, что при всех $x \in (1, 2; 2) \cup (2; 3)$ $\sin(\pi+x) < 0$, умножив обе части неравенства на $\sin(\pi+x) < 0$, получаем рациональное неравенство вида:

$$(2-x)(x+3) \cdot (4x-1)(5x-7) \leq 0,$$

решение которого имеет вид: $x \in (-\infty; -3] \cup [0, 25; 1, 4] \cup [2; +\infty)$. Находим пересечение с ОДЗ и получаем окончательный ответ: $x \in (1, 2; 1, 4) \cup (2; 3)$.

Таким образом, метод рационализации в подходящих случаях на самом деле позволяет решать неравенства быстрее и «компактнее», чем это было бы при решении другими способами. Поэтому обучать этому методу нужно, но не просто в виде схематичного алгоритма, а с пояснением того, почему и как этот алгоритм можно применять. $\square$

Список использованных источников:

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по математике (профильный уровень). <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!tab/151883967-2> (дата обращения: 13.06.2022, 09.15).
2. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2018. Профильный уровень / Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д. А.; М.: Народное образование, 2018. 223 с.

References:

1. Specifikaciya kontrol'nyh izmeritel'nyh materialov dlya provedeniya v 2022 godu edinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike (profil'nyj uroven'). <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!tab/151883967-2> (data obrashcheniya: 13.06.2022, 09.15).
2. Matematika. Podgotovka k EGE 2018. Profil'nyj uroven' / D. A. Mal'cev, A. A. Mal'cev, L. I. Mal'ceva. Rostov n/D: Izdatel' Mal'cev D. A.; M.: Narodnoe obrazovanie, 2018. 223 s.