

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ № 9 ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ (КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ)

Косярский Александр Алексеевич,

педагог дополнительного образования Центра детского творчества «Прикубанский»,
г. Краснодар

Мороз Ольга Викторовна,

доцент кафедры информационных и образовательных технологий факультета
математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета,
кандидат педагогических наук, г. Краснодар

В СТАТЬЕ ОСВЕЩАЕТСЯ МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НОВОГО ЗАДАНИЯ ПРОФИЛЬНОГО ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ. ПРЕДЛАГАЮТСЯ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ КОТОРЫХ ОТВОДИТСЯ ЧИТАТЕЛЯМ, ОДНАКО ДАЮТСЯ УКАЗАНИЯ, В КАКИХ СЛУЧАЯХ КАКОЙ МЕТОД ЯВЛЯЕТСЯ БОЛЕЕ ПОДХОДЯЩИМ.

• ЕГЭ по математике • кусочно-линейные функции • квадратичные функции • элементарные методы преобразования графиков функций

На современном этапе развития образовательной системы Российской Федерации происходит переосмысление не только подходов к организации образовательного процесса, но и его содержания. Отражением данного процесса является новый ФГОС ООО, реализация которого начнётся во всех школах с сентября 2022 года. Важное место как в стандарте, так и государственных концепциях и стратегиях развития отводится повышению качества математического образования.

Как известно, одним из ключевых инструментов диагностики качества школьного образования сегодня выступает ЕГЭ. Поскольку требования к качеству математического образования, особенно в области построения и анализа моделей, постоянно возрастают, то и ЕГЭ по математике постепенно трансформируется. Так в ЕГЭ по математике профильного уровня 2022 года появилось новое задание под номером 9, ориентированное на оценку уровня сформированности навыка построения и анализа моделей.

В информационных базах самого популярного ресурса по подготовке к ЕГЭ по математике приводится следующая типология нового задания: комбинированные задачи, гиперболы, кусочно-линейная функция, параболы, синусоиды, линейные функции, показательные и логарифмические функции.

В рамках данной статьи мы рассмотрим примеры решения заданий на кусочно-линейную функцию, а также гиперболы. Кроме того, сформулируем рекомендации по последовательности изучения материалов для подготовки к решению данной задачи.

Первым этапом учителю необходимо актуализировать у обучающихся основные сведения о функции и свойствах графика функции. Важно сформулировать свойства монотонности функции, чётности и периодичности. Кроме этого, следует ознакомить учащихся с теоремой Коши (рис. 1) и некоторыми её следствиями.

ТЕОРЕМА

Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает два различных значения A, B , то она принимает и любое значение C , такое, что $A < C < B$.

Рис. 1. Теорема Коши

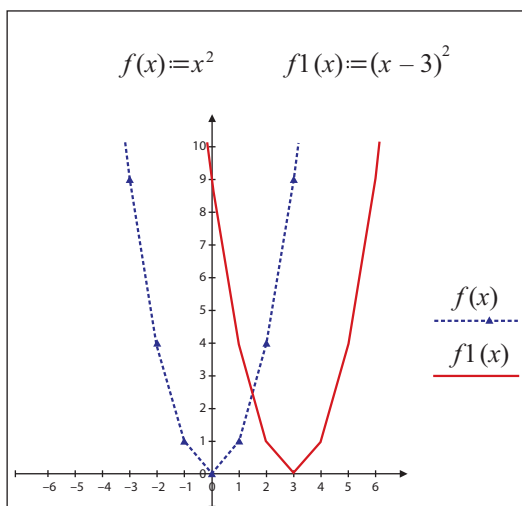
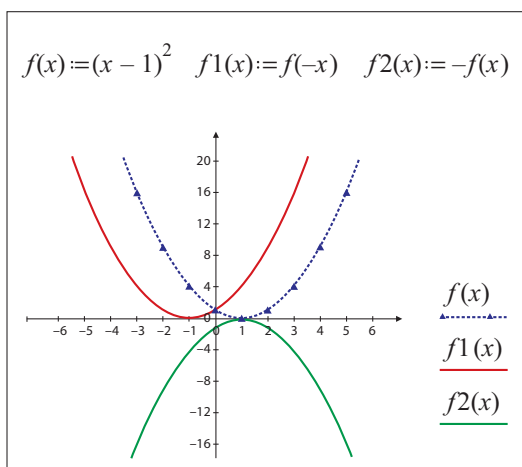


Рис. 2. Сдвиг вдоль оси абсцисс

Рис. 3. Построение графиков функций $y = -f(x)$ и $y = f(x)$ **Следствия из теоремы Коши.**

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает на нём любые значения, лежащие между наибольшим и наименьшим значением $f(x)$ на этом отрезке.

Если непрерывная на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ в некоторых двух точках этого промежутка имеет значение разных знаков, то в некоторой точке x_0 , лежащей между ними, функция принимает значение, равное нулю.

После этого целесообразно повторить основные элементарные преобразования графиков функций:

- сдвиг вдоль координатных осей;
- отражение относительно координатных осей;
- растяжение (сжатие) вдоль координатных осей;
- построение графиков функций, содержащих модуль.

В качестве минимально достаточного материала можно использовать подготовленные нами рекомендации, которые доступны для скачивания по ссылке: <https://disk.yandex.ru/d/lgst9KQhSKReZA>.

На рисунках 2, 3 показаны примеры иллюстраций, представленные в созданной методической разработке.

После того, как основные сведения о функции и элементарных преобразованиях графиков функций актуализированы, целесообразно напомнить учащимся определение линейной функции (рис. 4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b – действительные числа, $D(y) = \mathbb{R}$

Рис. 4. Определение линейной функции

Важно отметить, что:

- при $b = 0$ имеем пучок прямых, проходящих через начало координат и задающийся уравнением: $y = kx$;
- угловой коэффициент прямой k равен тангенсу угла наклона этой прямой по отношению к положительному направлению оси абсцисс.

Важно обратить внимание учащихся на то, что график прямой $y = kx + b$ получается из прямой $y = kx$ сдвигом вдоль оси ординат на b единиц вверх или вниз.

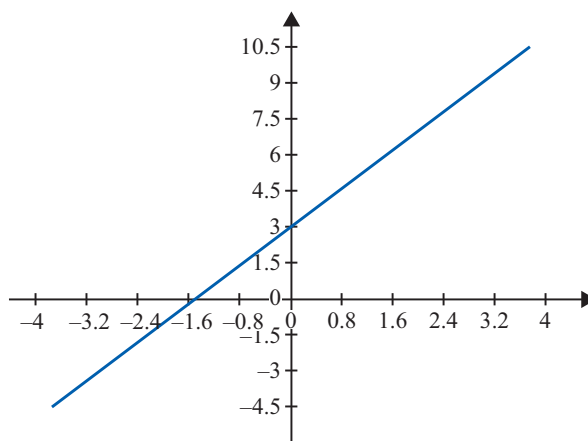


Рис. 5. График линейной функции $y = kx + b$

На следующем этапе следует ознакомить учащихся с понятием кусочно-линейной функции (рис. 6) и сформулировать её основные свойства.

Пусть заданы точки $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ — точки перегиба или точки смены формул.

И пусть на каждом из интервалов $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $\dots$, $(x_n; +\infty)$ функция $y = f(x)$ задана некоторой формулой. Тогда функцию записывают в виде:

$$f(x) = \begin{cases} k_0x + b_0, & x < x_1 \\ k_1x + b_1, & x_1 < x < x_2 \\ \dots & \dots \\ k_nx + b_n, & x_n < x \end{cases}$$

При этом кусочно-линейная функция является непрерывной, если выполнены условия согласования:

$$k_ix_i + b_i = k_{i+1}x_i + b_{i+1} = f(x) \text{ при } i = 1, 2, \dots, n-1$$

Очень часто кусочно-линейную функцию записывают в следующей форме:

$$f(x) = ax + b + c_1 |x - x_1| + c_2 |x - x_2| + \dots + c_n |x - x_n|$$

Кроме того:

$$c_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{2}, \text{ при } i = 1, 2, \dots, n$$

$$a = \frac{k_0 - k_n}{2}$$

График кусочно-линейной функции удобно строить, указывая на координатной плоскости вершины ломаной. Кроме построения n вершин следует построить также две точки: одну левее вершины $A_1(x_1, y(x_1))$, другую правее вершины $A_n(x_n, y(x_n))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Кусочно-линейная функция — функция, определенная на множестве вещественных чисел, линейная на каждом из интервалов, составляющих область определения.

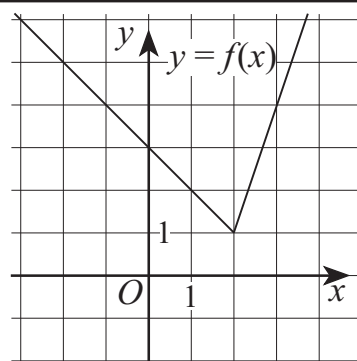
Рис. 6. Определение кусочно-линейной функции

При решении заданий на кусочно-линейную или линейную функции имеют место три подхода:

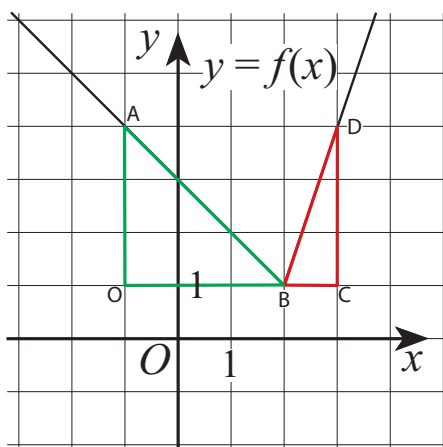
- 1) по определению;
- 2) при помощи элементарных преобразований;
- 3) с использованием системы уравнений.

Рассмотрим пример, представленный на портале РешуЕГЭ.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $ax + d = 0$.



Решение:



Способ 1. На основании теории.

Из теории мы знаем, что для функции вида:

$$y = ax + b + c_1 |x - x_1| + c_2 |x - x_2| + \dots$$

Коэффициент $a = \frac{k_0 - k_n}{2}$, а каждый из модулей обнуляется в соответствующей точке x_i , то есть в точке излома (смены формулы).

В данной задаче график функции есть ломаная состоящая из двух звеньев, значит, имеется всего 2 угловых коэффициента: k_0 и k_i .

Из треугольника AOB имеем $k_0 = -1$, а из треугольника BDC имеем $k_1 = 3$. Тогда $a = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow a = 1$.

По рисунку видно, что точка излома имеет координаты (2; 1). То есть имеем систему:

$$\begin{cases} |2b + c| = 0 \\ 2 + |2b + c| + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2b + c| = 0 \\ 2 + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2b + c| = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи все коэффициенты найдены:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Покажем, что, зная данные коэффициенты, легко можно найти остальные. Подставим имеющиеся данные в функцию:

$$f(x) = x + |bx + c| - 1$$

Подставим в функцию $x = 0$. Из рисунка значение в этой точке равно 3:

$$3 = |c| - 1 \Rightarrow c = \begin{cases} -4 \\ 4 \end{cases}$$

Окончательно, зная, что при $x = 2$ имеет место уравнение: $|bx + c| = 0$, то:

$$\begin{cases} 2b + 4 = 0 \\ 2b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Способ 2. Преобразование формулы.

Используя определение модуля, можно заключить, что функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx + c + d \\ ax - bx - c + d \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (a+b)x + (c+d) \\ (a-b)x + (-c+d) \end{cases}$$

То есть функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = kx + m$, где

$$k = \begin{cases} a+|b| \\ a-|b| \end{cases} \text{ и } m = \begin{cases} d+|c| \\ d-|c| \end{cases}$$

Так как $a + |b| \geq a - |b|$, то исходя из рисунка имеем:

$$a + |b| = 3, a - |b| = -1$$

Так как $d + |c| \geq d - |c|$, то

$$d + |c| = 3, d - |c| = -1$$

Решим систему для нахождения коэффициента a :

$$\begin{cases} a + |b| = 3 \\ a - |b| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 3 \\ |b| = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \\ |b| = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ |b| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

Решим систему для нахождения коэффициента d :

$$\begin{cases} d + |c| = 3 \\ d - |c| = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + |c| = 3 \\ |c| = d + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d + 5 = 3 \\ |c| = d + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ |c| = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ c = \pm 4 \end{cases}$$

Зная необходимые коэффициенты, получим уравнение:

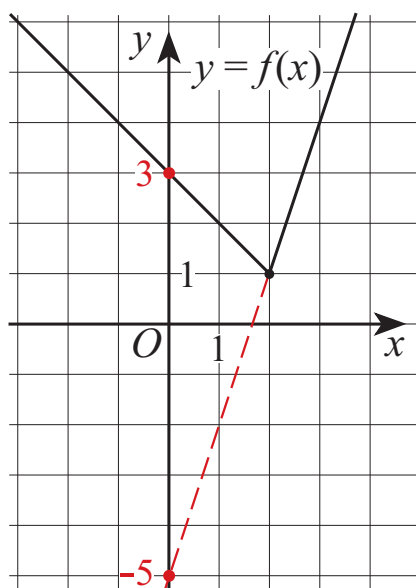
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Как мы можем видеть, первый способ решения преимущественно связан с анализом графика функции и наиболее удобен в тех случаях, когда необходимо найти a , d или решение уравнений: $bx + c = 0$, $ax + d = 0$. Второй метод является более универсальным, но требует больше времени на выполнение, так как в процессе решения учащийся сталкивается с двумя системами уравнений с двумя переменными, имеющими модуль.

После знакомства с методами решения заданий на кусочно-линейную функцию имеет место переход к рассмотрению функции обратной пропорциональности. Первым шагом учителю рекомендуется напомнить учащимся определение дробно-линейной функции (рис. 7), а также основные формы её аналитической записи.

Дробно-линейную функцию, заданную уравнением (1), можно преобразовать, выделив целую часть. Тогда выражение примет вид:

$$y = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функция $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (1), \quad c \neq 0$ называется

дробно-линейной.

Рис. 7. Определение дробно-линейной функции

То есть, иными словами, можно сказать, что график данной функции получается параллельным переносом графика функции $y = \frac{k}{x}$ вдоль оси абсцисс на величину α и вдоль оси ординат на величину β . При этом асимптотами будут прямые $x = \alpha$ и $y = \beta$.

Следующим шагом рекомендуется провести анализ графика функции $y = b + \frac{k}{x-a}$ с использованием графических калькуляторов или математических пакетов. Результатом такого анализа должны стать следующие выводы.

1. Коэффициент k отвечает за «пологость» и направление графика. Чем коэффициент больше, тем дальше от центра системы координат располагаются ветви гиперболы, и наоборот.
2. Коэффициент a указывает на смещение графика дробно-линейной функции на a единиц вдоль оси OX . Если $a > 0$, то сдвиг выполняется вправо, если $a < 0$, то сдвиг выполняется влево.
3. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, то есть вертикалью, к которой стремится график дробно-линейной функции
4. Коэффициент b указывает на смещение графика дробно-линейной функции на величину b вдоль оси OY . Если $b > 0$, то график «поднимается» вверх на b единиц, если $b < 0$, то «опускается» на b единиц.
5. Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой, то есть горизонталью, к которой стремится график дробно-линейной функции.

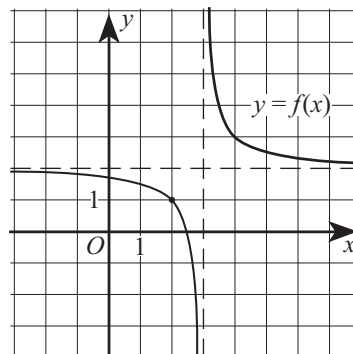
Как и в прошлом случае, основными методами решения данных задач являются: по определению, при помощи элементарных преобразований.

Рассмотрим несколько примеров, представленных на портале РешуЕГЭ.

Пример 1.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, где числа a , b и c — целые.

Найдите $f(13)$.



Решение.

Способ 1.

Перенесём начало системы координат в точку $(3; 2)$. Заметим, что при $x' = 1$ имеем $y' = 1$, то есть значения данной функции совпадают со значениями функции $y = \frac{1}{x}$, а значит она получена из неё параллельным сдвигом вдоль осей. Значит, $c = 2$ и $b = -3$. Значение коэффициента $a = 1$, что следует из анализа значений функций $y = \frac{a}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$.

Таким образом, функция имеет вид:

$$y = \frac{1}{x-3} + 2$$

При $x = 13$ имеем:

$$y(13) = \frac{1}{10} + 2 = 2,1$$

Способ 2.

Из рисунка видно, что функция имеет вертикальную асимптоту $x = 3$ и горизонтальную асимптоту $y = 2$, следовательно $b = -3$, а $c = 2$.

Найдём коэффициент a . При $x = 2$ функция имеет значение $y = 1$. Тогда имеет место равенство:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2-3} + 2 &= 1 \\ -a + 2 &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Таким образом, функция имеет вид:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$$

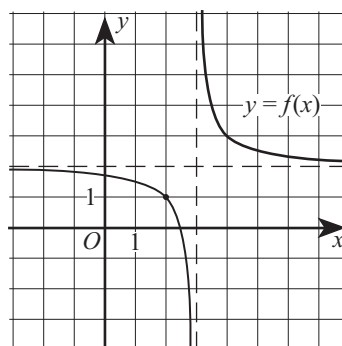
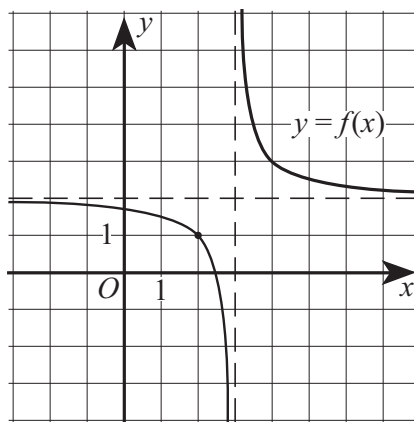
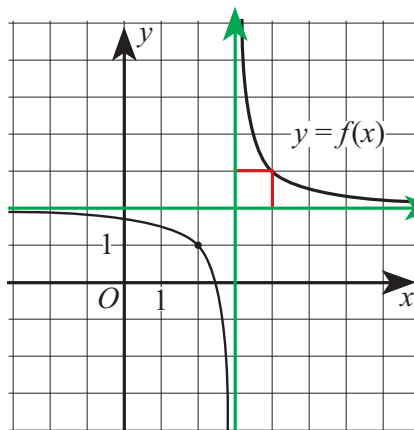
При $x = 13$ имеем:

$$y(13) = \frac{1}{10} + 2 = 2,1$$

Пример 2.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где числа a , b и c — целые.

Найдите c .



Решение.**Способ 1.**

Преобразуем функцию так, чтобы она имела вид: $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$

$$\frac{ax+b}{x+c} = \frac{ax+ac-ac+b}{x+c} = \frac{a(x+c)}{x+c} + \frac{b-ac}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c}$$

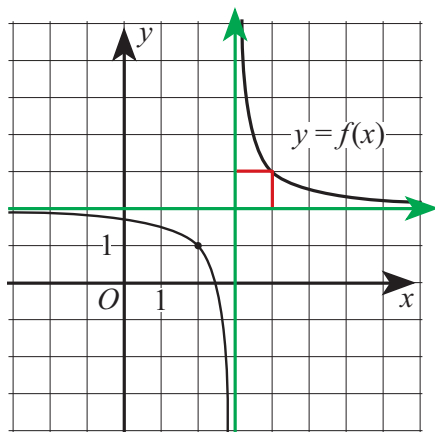
По рисунку видно, что функция имеет вертикальную асимптоту $x = 3$, горизонтальную асимптоту $y = 2$. Тогда $c = -3$, $a = 2$. Поскольку при $x = 2$ функция имеет значение $y = 1$, то получаем:

$$2 + \frac{b+6}{2-3} = 1 \Rightarrow b+6 = 1 \Rightarrow b = -5$$

Тогда функция имеет вид:

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

Значения коэффициентов: $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$.

Способ 2.

Преобразуем функцию так, чтобы она имела вид:

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$$

$$\frac{ax+b}{x+c} = \frac{ax+ac-ac+b}{x+c} = \frac{a(x+c)}{x+c} + \frac{b-ac}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c}$$

Перенесём начало системы координат в точку $(3; 2)$. Заметим, что при $x' = 1$ имеем $y' = 1$, то есть значения данной функции совпадают со значениями функции $y = \frac{1}{x}$, а значит она получена из неё параллельным сдвигом вдоль осей. Значит, $c = -3$, $a = 2$.

Из анализа значений функций $y = \frac{a}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$ имеем:

$$b - ac = 1 \Rightarrow b = ac + 1 \Rightarrow b = -6 + 1 \Rightarrow b = -5$$

Таким образом:

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

Значения коэффициентов: $a = 2$, $b = -5$, $c = -3$.

Как мы можем видеть, оба способа не отличаются по сложности и длительности решения, поэтому выбор пути решения в данном случае остаётся за учащимся. Однако, важно понимать, что использование идей преобразования графиков функций требует должного опыта решения подобных задач, поэтому рекомендуется более сильным школьникам.

Для удобства педагогов мы подготовили краткие методические рекомендации с теоретическими справками и разобранными примерами, а также презентацию, которую можно использовать при решении данных задач в рамках факультативов или на уроках математики. Все материалы доступны для скачивания по ссылке: <https://disk.yandex.ru/d/Igst9KQhSKReZA>.

При подготовке учащихся к решению задания № 9 ЕГЭ по математике профильного уровня можно придерживаться плана, представленного в таблице:

№	Тема	Количество часов
1	Функция. Определение и связанные понятия. Свойства функции	1
2	Некоторые элементарные преобразования графиков функций и способы их построения	2
3	Линейная функция и её свойства. Кусочно-линейная функция и её свойства. Методы решения задач	2
4	Гиперболы и их свойства. Методы решения задач.	2
5	Параболы и их свойства. Методы решения задач	2
6	Синусоида и косинусоида. График функции и его свойства. Методы решения задач	2
7	Показательная и логарифмическая функции. Их свойства и методы решения	2
	Итого	15

Подводя итог, важно сказать, что процент учащихся, которые могут справиться с этим заданием в условиях ЕГЭ, напрямую зависит от качества изучения графиков элементарных функций в 7–9-х классах. Поэтому предложенные нами рекомендации, теоретические материалы и примеры решений могут быть использованы учителями и учащимися при изучении соответствующих тем, в том числе в качестве заданий повышенной трудности. □

Список использованных источников:

- Афанасьева Т. Н. Практикум по математическому анализу (Функции и графики) / Т. Н. Афанасьева, В. Ю. Барсукова, А. Ф. Бачурская. и др. // Краснодар, 2012. 87 с.
- Веселаго И. А. Алгебра для школьников и абитуриентов. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 336 с.
- Гриншпон И. Э. Элементарные функции и их графики: учеб. пособие / И. Э. Гриншпон, Я. С. Гриншпон. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем и упр. и радиоэлектроники, 2017. 98 с.
- Маркушевич А. И. Алгебра и элементарные функции (учебное пособие по математике) / А. И. Маркушевич, К. П. Сикорский, Р. С. Черкасов. М.: Просвещение, 1968. 503 с.
- Райхмист Р. Б. Графики функций: справочное пособие для вузов. М. Высш. шк., 1991. 160 с.
- Сурыгин А. И. Математика. Элементарные функции и их графики: Учебное пособие / А. И. Сурыгин, Е. Ф. Изотова, О. А. Новикова и др. // СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 115 с.

- Фаддеев Д. К. Задачи по алгебре для 6–8-х классов / Д. К. Фаддеев, Н. Н. Ляшенко, М. С. Никулин и др. М.: Просвещение, 1988. 208 с.
- Сайт подготовки к ЕГЭ РешуЕГЭ [электронный ресурс]. URL: <https://ege.sdangia.ru/> (дата обращения 1.01.22).

References:

- Afanas'eva T. N. Praktikum po matematicheskomu analizu (Funkcii i grafiki) / T. N. Afanas'eva, V. Yu. Barsukova, A. F. Bachurskaya. i dr. Krasnodar, 2012. 87 s.
- Veselago I. A. Algebra dlya shkol'nikov i abiturientov. 2-e izd., ispr. i dop. M.: FIZMATLIT, 2007, 336 s.
- Grinshpon I. E. Elementarnye funkicii i ih grafiki: ucheb. posobie / I. E. Grinshpon, Ya. S. Grinshpon. Tomsk: Izd-vo Tomsk. gos. un-ta sistem i upr. i radioelektroniki, 2017. 98 s.
- Markushevich A. I. Algebra i elementarnye funkicii (uchebnoe posobie po matematike) / A. I. Markushevich, K. P. Sikorskij, R. S. Cherkasov. M.: Prosveshchenie, 1968. 503 s.
- Rajhmist R. B. Grafiki funkciij: spravocnoe posobie dlya vuzov. M. Vyssh. shk., 1991. 160 s.
- Surygin A. I. Matematika. Elementarnye funkicii i ih grafiki: Uchebnoe posobie / A. I. Surygin, E. F. Izotova, O. A. Novikova i dr. // SPb.: Izd-vo Politekh. un-ta, 2007. 115 s.
- Faddeev D. K. Zadachi po algebre dlya 6–8-h klassov / D. K. Faddeev, N. N. Lyashenko, M. S. Nikulin i dr. M.: Prosveshchenie, 1988. 208 s.
- Sajt podgotovki k EGE ReshuEGE [elektronnyj resurs]. URL: <https://ege.sdangia.ru/> (data obra-shcheniya 1.01.22).