

МЕТАПРЕДМЕТНЫЙ ПОДХОД К ТЕМЕ «ПРОПОРЦИЯ И ГАРМОНИЯ МИРА»

Клепиков Валерий Николаевич,

ведущий научный сотрудник Института изучения детства, семьи и воспитания РАО, методист МАН «Интеллект будущего», учитель математики, физики и этики средней школы № 6 г. Обнинска, кандидат педагогических наук, г. Обнинск, klepikovvn@mail.ru

ШКОЛЬНЫЕ УЧЕБНИКИ ПРЕИМУЩЕСТВЕННО ОТРАЖАЮТ ПРЕДМЕТНЫЙ ПОДХОД В ОБРАЗОВАНИИ. МЕТАПРЕДМЕТНЫЙ ПОДХОД ПЕДАГОГИ ВОССОЗДАЮТ САМОСТОЯТЕЛЬНО, ЗДЕСЬ И СЕЙЧАС, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОНКРЕТНОГО КОНТИНГЕНТА УЧАЩИХСЯ. МЕТАПРЕДМЕТНОСТЬ — ЭТО ВОЗМОЖНОСТЬ И СПОСОБНОСТЬ УЧАСТНИКА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОДНОВРЕМЕННО ЗАНЯТЬ БОЛЕЕ УНИВЕРСАЛЬНО-ОБЩУЮ И БОЛЕЕ КОНКРЕТНО-ОСОБЕННУЮ ПОЗИЦИЮ. МЕТАПРЕДМЕТНЫЙ ПОДХОД — ЭТО ВСЕГДА ТВОРЧЕСТВО. ЭТО ВСЕГДА УНИКАЛЬНЫЕ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ НАРАБОТКИ КОНКРЕТНОГО УЧИТЕЛЯ И УЧАЩЕГОСЯ. ИМЕННО МЕТАПРЕДМЕТНОМУ ПОДХОДУ ОТВОДИТСЯ РОЛЬ ПО ВОЗРОЖДЕНИЮ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ. МЕТАПРЕДМЕТНЫЙ ПОДХОД — ЭТО ДВЕРЬ В БУДУЩЕЕ!

• метапредметный подход • пропорция • концепт • пропорционирование • двойная рефлексия • «целый мир» • «духовный мир» • интеграция гуманитарных и естественно-математических знаний

В ходе изучения конкретных тем в школе возникают закономерные вопросы. Что такое метапредметность? Когда появляется необходимость в метапредметности? Как использовать метапредметный подход к изучению конкретного материала? Чем отличаются «предметность» и «метапредметность»?

Если очень кратко, то метапредметность — это воссоздание культурно-исторических форм понимания мира и своей личности. Метапредметность подразумевает двойную рефлексию (двуосмысленность): осознание изучаемого материала в определённом контексте (научном, социальном, культурном, историческом, технологическом, мировоззренческом и т. д. — в пределе в контексте «целого мира») и осознание, в контексте конкретного предметного материала, развития своей личности (в пределе «духовного мира»). Если не осуществляется первая рефлексия, то знания получаются эпизодическими, хаотическими, бессистемными; если же не происходит второй рефлексии, то знания получаются формальными, безжизненными, отчуждёнными [1]. Благодаря метапредметному подходу мы формируем своё мировоззрение.

Когда же появляется необходимость в метапредметном подходе? Данная необходимость появляется даже не тогда, когда нам нужно решить конкретный пример или задачу. Решить пример или задачу можно и на предметном уровне, исходя из «близлежащих» знаний, умений и навыков. Необходимость в метапредметном подходе возникает тогда, когда мы начинаем исследовать решённую задачу в различных научных контекстах («по гамбургскому счёту») и в рамках своего внутреннего мира. Например, исходя из следующих позиций:

- 1) выявить идею решения, определить тип задачи;
- 2) кристаллизовать опорную задачу (для запоминания);
- 3) придумать обратную задачу;
- 4) обнаружить общую форму (формулу) задачи;
- 5) выявить цель и смысл задачи;
- 6) усложнить формулировку задачи, изменяя прежние данные или вводя новые параметры;
- 7) выявить общую направленность задачи, в частности, на решение какой проблемы она направлена;
- 8) обнаружить смысловые границы задачи (при каких условиях наступает бессмыслица?);

- 9) понять значение данной ключевой задачи в истории математики и её общекультурную роль;
- 10) выявить значение задачи в контексте личностного развития.

Например, можно просто изучить пропорцию, но можно рассмотреть её как принцип гармонии, встречающийся во многих науках и жизни. Можно просто освоить эллипс, окружность, параболу, гиперболу, но можно рассмотреть их в контексте космических полётов. Таким образом, метапредметность — это возможность и способность участника образовательного процесса одновременно занять более универсально-общую и более конкретно-особенную позицию.



Часто метапредметность рассматривают как нечто очень абстрактное, методологическое, а предметность — как нечто частное, практическое. (Поэтому метапредметный подход нередко игнорируют, ведь почти все самостоятельные и контрольные работы в школе основаны на предметности и ограничиваются предметностью.) Но это не совсем так. Нужно исходить из следующего принципа метапредметности: насколько мы можем подняться «ввысь», настолько же можем и погрузиться «вглубь», более кратко и крылато — «восходя, углубляем-

ся». Метапредметность и предметность мы рассматриваем как двойную динамическую, диалектическую систему, в которой метапредметным уровнем может выступать как нечто предельно универсальное, так и нечто предельно конкретное. Отчасти этим механизмом постоянно пользуются педагоги при опросах. Если учащийся начинает рассуждать слишком абстрактно, то возникает потребность «заземлить» эти рассуждения в чём-то конкретном, и наоборот. Недаром существует известный диалектический принцип «восхождение от абстрактного к конкретному». Например, если учащийся даёт определение пропорции, как «равенство двух отношений», то возникает закономерный вопрос о том, как применить это «равенство двух отношений» по отношению к проектированию модели конкретного дома. И тогда мы волей-неволей выходим на другое практико-ориентированное определение, в котором фигурируют целое, доля и часть.



Воссоздание культурно-исторических форм понимания мира осуществляется, во-первых, через посредство литературных образов личностей различных эпох: Прометей, Геракл, Гамлет, Фауст, Иван Карамазов, Андрей Болконский, Наташа Ростова, Татьяна Ларина и т. д.; во-вторых, через посредство вживания в образы конкретных учёных: Архимед, Евклид, Галилей, Паскаль, Ньютон, Лейбниц, Ломоносов, Менделеев, Ковалевская, Эйнштейн и т. д.; в-третьих, через погружение в конкретную эпоху и проживание деяний её героев и учёных (Леонардо да Винчи, Бруно, Гагарин и т. д.) [2]. Образы личностей в душе учащегося вступают между собой в напряжённое интеллектуально-нравственное общение и тем самым способствуют кристаллизации его личной точки

зрения, индивидуальности, мировоззрения. Также воссоздание культурно-исторических форм понимания мира и своей личности осуществляется через приобщение к научным картинам, художественным образам мира, его концептам.

В ходе изучения учебного материала, особенно в естественно-математических дисциплинах, мы порой мало внимания уделяем авторам научных текстов и открытий. Однако, как известно, для формирования личности учащегося нужны образы личностей общечеловеческого значения. Особенно важно, когда в ходе изучения того или иного материала интегрировано воспроизводятся достижения творца в органичной взаимосвязи с его личной жизнью, когда раскрываются влияния, которые оказывали его творческие достижения на его жизнь и наоборот. Например, раскрыть единство научной, художественной и личной линий жизни Леонардо да Винчи в контексте эпохи Возрождения; или рассмотреть взаимовлияние открытий пифагорейцев и стиля их жизни в контексте Древнегреческой культуры; или раскрыть «воображаемую геометрию» Лобачевского по отношению к геометрии Евклида. Результатом этого осмысления и усвоения могут стать притчевые миниатюры [3]. Приведём одну из них.

«Вечная тайна истины, добра и красоты». Каждый пытливый и любознательный человек рано или поздно приходит к выводу, что тайну вечной юности истины, добра и красоты охраняет гармония рационального и иррационального, соизмеримого и несоизмеримого, предсказуемого и непредсказуемого, упорядоченного и хаотического. Одними из первых с этой тайной столкнулись пифагорейцы. На первых порах лик этой тайны привёл их в ужас, так как в нём явно просматривалось нечто иррациональное и непредсказуемое. Пифагор выстроил на сторонах прямоугольного треугольника квадраты и доказал, что площадь квадрата, выстроенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, выстроенных на катетах. Так появились знаменитые «пифагоровы штаны». Тем самым он не просто доказал истину, но и убедительно, наглядно показал, что проблема несоизмеримости разрешается даже в обычном прямоугольном треугольнике: рациональное и иррациональное сосуществуют, образуя законо-

мерную и в то же время парадоксальную гармонию. Ту же самую гармонию выражают «формула красоты» и «золотое правило нравственности» (поступай по отношению к другому более великодушно, чем он к тебе). Таким образом, в основе всего истинного, доброго и прекрасного лежит парадоксальное сочетание рационального и иррационального.

В ходе становления индивидуальной картины мира учащегося формируются концепты, связанные с основными математическими понятиями и насыщенные индивидуальными идеями, живыми смыслами [4]. Очень продуктивно разрабатывать математические концепты посредством исследовательских и проектных работ. Приведём примеры таких концептов, которые были разработаны ребятами в ходе создания конкретных работ и конференций: «Всё есть число», «Симметрия в науке, искусстве и жизни», «Пропорция и гармония мира», «Софисты и софистика», «Что есть истина?», «Великая тайна пифагорейцев», «Наш многомерный мир», «Угловатая форма, устремлённая ввысь», «Тайны и загадки совершеннейшей формы», «Скалярно-векторное понимание процессов мира», «Царство правильных многогранников», «Этот вероятностный мир», «Евклидова и неевклидова геометрии», «Фундаментальные математические константы», «Графическое моделирование объектов и процессов мира», «Особенности интегрально-дифференциального понимания мира» и т. д.

Рассмотрим применение метапредметного подхода к концепту «Пропорция и гармония мира». Дадим признаки метапредметного подхода по отношению к данному концепту. Метапредметный подход характеризуют:

- 1) единство универсального и конкретного (взаимосвязь всеобщей формулировки пропорции и её конкретных проявлений);
- 2) наличие «клетки» («зародыша») осваиваемого материала; в нашем случае — это отношение $\frac{a}{b}$;
- 3) перерастание теоретического понимания пропорции в деятельностное — «пропорционирование»;
- 4) постоянное удержание в ходе решения конкретных задач триады «целое — доля — часть»;

- 5) системное единство таких понятий, как число — величина — отношение — связь — взаимосвязь — зависимость — изменение — форма — формула — закон — универсальный закон гармонии;
- 6) интеграция гуманитарных и естественно-математических знаний.

Обратим внимание на деятельностный аспект операции пропорционирования. В математике — это применение обычной, геометрической, арифметической, гармонической, золотой пропорций; в литературе — навыки неожиданных поэтических сопоставлений; в химии — расчёт и учёт меры смешиваемых веществ; в физике — выявление прямо и обратного пропорциональных величин; на физкультуре — развитие чувства равновесия и эстетическое восприятие физической красоты человека; на уроках технологии — создание гармоничной и устойчивой конструкции; на уроках рисования — использование «формулы красоты», или «золотого сечения»; на уроках музыки — её ритмическая организация (гармония, полифонизм и т. д.); на этических занятиях — опора на «золотое правило нравственности»; в географии — использование такого понятия, как «масштаб»; на уроках истории — выработка сбалансированной «меры» в трактовке событий; в биологии и экологии — стремление к установлению чуткого баланса между природным и человеческим мирами; в психологии — адекватное осознание себя в развивающихся социальных контекстах; на уроках русского и иностранного языка — аутентичная интерпретация и перевод, смысловой баланс, соответствие между словом, предложением, абзацем и текстом в целом.

Понятие «концепт» подразумевает, что вначале нужно хотя бы в общих чертах, эскизно схватить соответствующий целостный образ изучаемого материала. Раскроем специфику данного концепта в контексте триады «целое — доля — часть»:

- целое может складываться из частей (например: $5 + 4 = 9$);
- целое может быть получено с помощью возведения части в степень (например: $3^2 = 9$), а часть — путём извлечения корня из целого (например: $\sqrt{9} = 3$);
- целое и часть могут соотноситься друг с другом посредством доли (например, доля $\frac{1}{4}$ связывает часть — 15 и целое — 60) и результатом будет пропорция $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$;

- целое, доля и часть могут быть гармонизированы посредством «золотой пропорции»: $\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$;

- бесчисленное число частей может стремиться к целому (например, сумма последовательности $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$... стремится к пределу, равному 1);

- целое и часть могут взаимодействовать друг с другом посредством дифференцирования и интегрирования:

$$\int f'(x)dx = f(x);$$

- целое и часть могут соотноситься друг с другом вероятностным образом:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m — \text{число благоприятствующих событию } A \text{ исходов, } n — \text{число}$$

всех элементарных равновероятных исходов; при этом степень достоверного события равна 1;

- целое и часть взаимодействуют посредством фрактального самоподобия: например, площадь «ковра Серпинского» вычисляется по формуле:

$$S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 64 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 + \dots = 1;$$

- парадоксально, но *целое* и *часть* могут быть «равны», например, множество натуральных чисел «равно» множеству квадратов натуральных чисел и т. д.

В ходе выстраивания метапредметного подхода очень важен проблемный учебный диалог, который является «стихией» вопрошания, поиска и творчества. Поэтому мы в какой-то степени начинаем с самого элементарного, «с начала начал», «строя мир как бы заново». Продуктивным диалогом, как говорили древние греки, управляет «логос» (нечто связанное с речью, говорением, порождением смысла). Замечательно то, что продуманный, но отчасти и спонтанный диалог преподносит креативные сюрпризы. Продemonстрируем примерный учебный диалог, который сможет дать общее представление о проблемном поле, в котором живут думы ребят:

«Уважаемые ребята! Сегодня на очередном заседании научного общества учащихся «Многогранник» в процессе диалога мы попробуем осмыслить понятия «целое», «доля» и «часть» в контексте интеллектуальной жизни человека.

Как найти: $\frac{1}{4}$ от 1 часа; 15 минут от 1 часа; неизвестную величину, если 15 минут есть $\frac{1}{4}$ часа?

Очевидно, что ответом являются уже известные числа: 15 минут, $\frac{1}{4}$, 60 минут или 1 час.

Какие понятия нам нужны, чтобы решить эти примеры?

Понятия «целое», «доля» и «часть».

Что в данных примерах является *целым*, *долей*, *частью*?

15 минут — *часть*, $\frac{1}{4}$ — *доля*, 1 час — *целое*.

Какое понятие связывает два других?

Это *доля*, так как это единственное из данных чисел, которое связывает два других — *целое* и *часть*. Доля $\frac{1}{4}$ связывает

числа 15 и 60: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

Почему «единственное»? А разве число $\frac{15}{60}$ не «помнит» о 1 и 4?

Да, если числа 15 и 60 составляют отношение, то они также становятся *долей*.

Здесь явно проявляется свойство пластичности пропорции: в ней мы можем менять местами крайние и средние члены. Поэтому, в принципе, можно сказать, что любое равенство — это пропорция.

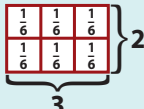
Равенство – это всегда пропорция
Свойство пластичности пропорции

$2 \cdot 3 = 6$; $6 : 2 = 3$; $6 : 3 = 2$; $\frac{6}{2} = 3$; $\frac{6}{3} = 2$

$2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$; $3 \cdot 2 = 1 \cdot 6$

$6 : 2 = 3 : 1$; $6 : 3 = 2 : 1$

$\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$



> 10 способов записать одно и то же равенство!

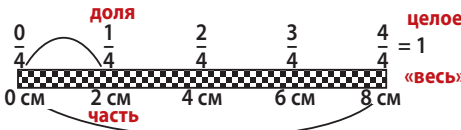
А как *доля* связывает другие два числа?

Она их связывает в движении, ведь, чтобы связать *целое* и *часть*, их нужно сопоставить, соизмерить, сравнить. Например, чтобы показать $\frac{1}{4}$ по отношению к *части* и *целому*, нужно проделать следующую процедуру: лёгким движением руки очерчиваем

часть по отношению к целому: 2 см $\rightarrow$ 8 см $\rightarrow \frac{1}{4}$. Так мы как бы осязаем долю.

Структурное понимание мира обеспечивают Такие конструкторы, как целое – доля – часть.

Из чего состоит пропорция?
 Какую связь устанавливает пропорция?



Покажите на рисунке *целое*, *часть* и *долю*.

Как связать 2 см, 8 см. и $\frac{1}{4}$?

$\frac{2 \text{ см}}{8 \text{ см}} = \frac{1}{4}$

Действительно, когда мы нечто измеряем, то мысленно прокручиваем, прикидываем, сколько выбранных единиц измерения до намеченного места.

Кстати, расстояние я могу измерять, например, карандашом, ручкой, указкой, своим шагом, ладонью и т. д. Тогда они выступают в роли меры, а не 1 метра!

На Руси были такие единицы измерения, как ладонь, шаг, сажень, локоть, пядь и т. д. Другими словами, единицы измерения были как бы одушевлёнными, связанными с человеческим телом. Поэтому дома и различная утварь были человекообразными, уютными, как бы подручными.

Кстати, интересно, что на Руси данные математические понятия были замечательным образом связаны с повседневной культурой людей. Например, согласно народным представлениям, каждый человек, как органичная *часть* мира, при рождении наделялся своей определённой *долей*. Она рассматривалась не сама по себе, а соотносилась с понятием чего-то *целого*. Этим целым в традиционном российском сознании представлялось всеобщее народное благо. В мифологических представлениях образу *Доли* как хорошей судьбы нередко противостоит *Недоля*, как олицетворение неудачной, плохой жизни. По некоторым поверьям, хорошая *Доля* может оставить человека, если он всё время грешит. Отсюда словосочетание «обездоленные люди».

Если искать какое-либо число, символизирующее живую мысль, то это, конечно, *доля*. Именно живая мысль постоянно сравнивает,

сопоставляет, анализирует, т. е. устанавливает соответствия, отношения.

Доля напоминает работу интеллекта, который также всё осмысливает и приводит в порядок, то есть делает всё соразмерным.

Древние греки в связи с этим даже придумали такое понятие, как «логос». Его можно понимать, как меру, речь, слово, высказывание, рациональное основание. Оно присутствует в таких понятиях, как «логика», «филология», «антропология» и многих других.

А что такое *целое*?

Это нечто самое большое.

Это *всё*, то есть это то, что охватывает *всё*.

Целое объединяет различные вещи.

А всегда ли *целое* есть что-то самое большое?

В математических задачах *целое* не всегда бывает самой большой величиной.

Более того, часто в задачах фигурируют несколько *целых*. Например, в первый день продали 20% всего товара, во второй — 30% остатка, а в третий — 40% оставшегося товара. Здесь мы вычисляем относительно трёх *целых*.

Существует интересная задача. «Шоколадка стоит 10 рублей и ещё половину стоимости шоколадки. Сколько стоит шоколадка?» Очень хочется сказать, что 15 рублей. Однако если посмотреть на рисунок, где изображены доли-половинки, то всё сразу становится ясно: всё-таки 20 рублей.

Так что же такое *целое*?

Это то, относительно чего мы вычисляем или измеряем.

Сколько стоит шоколадка?

Шоколадка стоит: 10 рублей и ещё половину стоимости шоколадки. Сколько стоит шоколадка?

$$10 + 10 = 20$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$$

А может ли *часть* быть больше *целого*?

В каком-то смысле может, если *доля* больше 1, например, находим $\frac{4}{3}$ от 30. Получаем 40, а *целое* — 30.

Да, но получившееся число 40 — это тоже уже *целое*.

Получается так, что величины в задачах могут выступать одновременно и как *часть*, и как *целое*?

Философы бы сказали, что здесь мы обнаруживаем диалектику!

Другими словами, в математике очень важно, относительно чего мы размышляем.

В этом и состоит трудность решения задач на *целое*, *долю* и *часть*.

Теперь можно отчасти понять загадочное высказывание Аристотеля о том, что *целое* предшествует *частям*.

Кстати, он придумал интересную игру «Стомахион», когда из *целого* «прямоугольника», разбитого на части, собираются различные фигурки.

Да, подобными являются игры «Танграм», «Яйцо Колумба» и т. д. Мы как бы осязательно обрабатываем понимание *части* и *целого*.

А почему высказывание Аристотеля загадочное? Ведь все живые организмы рождаются не по *частям*, а сразу *целыми*.

Существует на эту тему забавная байка о Ходже Насреддине. Как-то ночью, когда Насреддин сладко спал, жена растолкала его и говорит: «Ребёнок целый час плачет,

Целое – Доля – Часть. Отношение

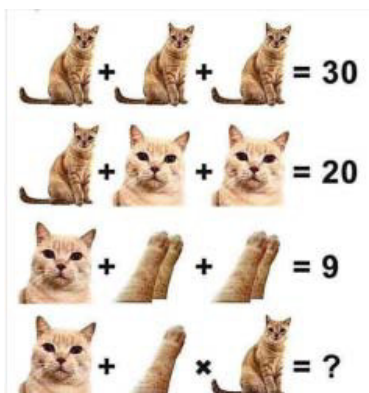
Стомахион Архимеда	Яйцо Колумба	Танграм
Софизм Откуда взялась лишняя клетка?	Красный и синий треугольник подобны!	

неужели ты не слышишь? Ведь он наполовину твой! Покачай его». А Насреддин отвечает: «Моя половина пусть плачет. Успокой свою половину». С этими словами он повернулся к стене и заснул.

Да, половина ребёнка — это круто!

А вот ещё одна забавная древнерусская задачка. «К табунщику пришли три казака покупать лошадей. “Хорошо, первому продам я полтабуна и ещё половину лошади, второму — половину оставшихся лошадей и ещё пол-лошади, третий также получит половину оставшихся лошадей с полулошадью. Себе же оставлю только 5 лошадей”. Удивились казаки, как это табунщик будет делить лошадей на части. Но после некоторых размышлений они успокоились, и сделка состоялась. Так сколько лошадей получил каждый казак?» Однако здесь, несмотря на странное условие, в результате количество полученных лошадей выражается целыми числами!

Кстати, в Интернете можно найти картинки-страшилки, в которых спокойно используются отдельные головы, лапки, хвостики, ушки и т. п. Здесь идёт уже явный перебор!



Таким образом, что в математике можно делить, в жизни — категорически нельзя.

А можно ли *частью* измерить *целое*?

В начальной школе мы из *частей* составляли *целое*, поэтому с этой точки зрения можно.

Да, но *часть* тоже ведь с помощью чего-то измеряется. А для этого опять же нужно *целое*, например, 1 метр.

Конечно нельзя, так как не *часть*, а именно *целое* задаёт всему меру. Например, если я скажу, что проехал некоторое расстояние, то без *меры-целого* невозможно определить, какое это расстояние по величине. Таким образом, без *целого* *часть* есть нечто неопределённое.

Недаром, когда хотят о чём-то сказать негативное, то говорят, что это нечто *частное*, то есть малозначащее, ущербное, неопределённое.

Лучше сказать не частное, а *осколочное*, ведь из частей мы можем составить целое, а из осколков уже никогда.

Вспоминается мультфильм-притча «Тридцать восемь попугаев». Мартышка пытается сначала измерить удава с помощью самого же удава. Удав протестует, когда мартышка говорит, что он составляет две половины, и заявляет, что он *целый*.

Удав понимает, что живое существо нельзя составить из *частей*.

Да, затем приходит попугай и подсказывает, что измерить удава можно лишь с помощью того, что находится вне его, например, с помощью его самого, попугая. И тут у героев наступает прозрение: удава измеряют с помощью мартышки, потом с помощью слонёнка.

Кстати, когда попугай измерил удава, то получилось не ровно тридцать восемь попугаев, а тридцать восемь попугаев и одно крылышко.

Другими словами, дробь. Точнее, смешанное число.

А к чему вы вспомнили этот мультфильм?

Здесь, кажется, возникает ещё один вопрос. Может ли *целое*-удав измерить самого себя?

Нет, если требуется что-то измерить, нужно взять за *целое* нечто другое. Поэтому *целым* выступает уже не сам удав, а попугай, мартышка или слонёнок.

Значит, получается так: то, что нам нужно измерить, как бы приобщается к идеальной мере, эталону, в частности, к 1 метру?

Да, поэтому *часть* — это то, что приобщается к *целому* и благодаря этому соответственно приобретает размерность.

Кстати, *часть* сама по себе не помнит о *целом*, как, впрочем, и *целое* — о *части*. Например, если у меня в кармане 5 конфет, то по данной части невозможно сказать, сколько у меня их всего. Однако если я скажу, что это половина всех конфет, то сразу же станет ясно, сколько я имею конфет.

Поэтому приобщение к *целому* возможно только через посредство *доли*.

Получается так, что без посредства *доли* *часть* и *целое* обречены на вечное одиночество.

Это действительно так, если не называть *целым*, например, простую сумму частей-отрезков, его составляющих.

Да, но в таком случае *целое* разбивается на бесконечную сумму отрезков, которые не играют по отношению к *целому* существенной роли, так как в этом случае *целое* однозначно всегда больше любого из отрезков.

В этой связи древнегреческий философ-математик Зенон доказывал, что быстрый Ахилл никогда не догонит черепаху, так как, когда он преодолеет разделяющее их расстояние, черепаха проползёт ещё немного и так всякий раз до бесконечности. Здесь *целое* превышает любую сумму отрезков.

Делением отрезка на *части* мы занимались в младшей школе, а сейчас нам более интересно то, что отрезки можно измерять

не только с помощью сантиметров, но и с помощью *долей*.

Странная эта *доля*: она как бы живая, без неё невозможна никакая связь.

А разве *целое* менее загадочно? Ведь оно может быть по размерам каким угодно и, несмотря на это даёт всему *меру*!

Действительно, даже если *целое* очень маленькое, например, 1 миллиметр, то оно и тогда есть *целое*.

Вспоминается поговорка: «Мал золотник, да дорог».

А что в духовной жизни человека выступает в качестве меры, эталона или *целого*?

Это идеалы, ценности, принципы. Приобщаясь к ним, человек самосовершенствуется.

Более того, *целое* лишний раз напоминает, что целостные явления жизни нельзя делить на *части*. Например, нельзя любить на четверть или дружить на треть.

Хотя в жизни мы нередко распределяем свои силы на целый день...

Здесь важно осознавать, с какими феноменами мы имеем дело!

Что же касается *части*, то она также может быть какой угодно по величине.

Однако безмерная *часть* может только озадачить или даже напугать своей неопределённостью. Представьте себе геометрическую фигуру, которая не имеет измерений.

Или человека, живущего без идеалов и принципов; такой человек воплощает собой некий первобытный хаос.

А где *часть* и *доля* совпадают по числовому значению?

Там, где *целое* и *часть* совпадают по размерам. Например, мы выбрали *целое-меру*, а оно совпало, например, с эталоном длины — 1 метром. Тогда $\frac{1}{2}$ от *целого* и $\frac{1}{2}$ от метра совпадут.

«Ахилл и черепаха» (апории Зенона)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \dots + \frac{a}{2^n} + \dots \right) = a$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots &\rightarrow 1 \\ 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 \dots &\rightarrow 100 \end{aligned}$$

Бесконечная сумма отрезков меньше целого отрезка!

А могут ли совпасть *доля* и *целое*?

Вряд ли, ведь не могут же, например, совпасть $\frac{1}{2}$ и 20 см.

Я думаю, могут, если *доля* будет равна единице, например, две вторых, три третьих и т. д.

Здесь опять диалектика: доля становится целым, когда числитель и знаменатель будут равны.

Наверное, здесь нужно говорить не о совпадении *доли* и *целого*, а о том, что один и тот же отрезок можно выразить с помощью и сантиметров, и долей.

А могут ли совпасть и *доля*, и *целое*, и *часть*?

С точки зрения математики, не могут, так как тогда они станут чем-то единым.

Наверное, могут, но только тогда, когда они будут равны нулю, то есть в точке.

Да, точка — таинственная фигура: из неё как бы всё разворачивается и в неё же всё сворачивается.

Говорят, что «Большой космический взрыв» произошёл из математической точки...

А можно ли связать *целое*, *долю* и *часть*?

Конечно, можно, с помощью *пропорции*. Пропорция есть органичная связь *доли*,

части и *целого*. Например: $\frac{15 \text{ мин.}}{60 \text{ мин.}} = \frac{1}{4}$.

Не зря великий Платон говорил: «Однако два предмета сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их *связь*. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое. И задачу эту наилучшим образом выполняет *пропорция*...».

Значит, мы в процессе рассуждений осмыслили пять понятий: «всё», «целое», «доля», «часть» и «пропорция».

Давайте попробуем дать им определения.

С помощью слова «всё» мы можем попытаться «объять необъятное», то есть нечто самое большое.

Целое — это то, с помощью чего мы измеряем и то, к чему приобщаются *части*. При этом *целое* не всегда самое большое.

Часть — это то, что приобщается к *целому* и тем самым обретает размерность, соизмеримость, определённость.

Доля — это то, что связывает *целое* и *часть*; она всегда «помнит» о *части* и *целом*.

Именно *целое*, *доля* и *часть* составляют пропорцию: *часть* / *целое* = *доля*.

Итак, давайте лаконично отрефлексируем самое важное, к чему мы пришли в ходе нашего диалога.

Есть число, которое осмысливается в движении — это *доля*.

Часть и *целое* в задачах — относительные величины. *Целое* может выступать в роли *части*, а *часть* в роли *целого*.

Поэтому математика не такая уж статичная или даже застывшая наука, как её представляют. В какой-то момент числа оживают.

Понятия *целое*, *доля* и *часть* важны не только в математике, но и в культуре, духовной жизни человека.

Вот почему древние греки и другие древние народы считали математику магической наукой, а числа и пропорцию обожествляли.

Поэтому они и говорили: «Всё есть число!», «Всё есть пропорция!».

Однажды свою «магию» продемонстрировал древнегреческий философ и математик Фалес, который поразил египетского царя и его вельмож, заявив, что он сможет измерить высоту пирамиды, даже к ней не прикасаясь! Он составил следующую пропорцию: высота человека / тень человека = высота пирамиды / тень пирамиды. Но лучше всего измерять высоту пирамиды тогда, когда тень человека и его рост будут равны, тогда и тень пирамиды сравняется с высотой пирамиды.

Кстати, Фалес применял пропорцию и в этике. Он говорил: «Помните, что дети ваши будут обходиться с вами также, как вы обходитесь со своими родителями». По сути, это уже «золотое правило нравственности»: поступай по отношению к другому так, как ты хотел бы, чтобы он поступал по отношению к тебе.



Да, но более всего пропорция нужна для координации в пространстве. Рене Декарт рассматривал мир через его *протяжение*. Поэтому совсем не случайно он изобрёл универсальную систему координат.

Действительно, попав в какое-либо пространство, мы тут же начинаем его «изучать», «зондировать», «сканировать», искать «укромное место» и т. п. Особенно важно постоянное пропорционирование, когда мы выходим на проезжую часть. Здесь нужно быть начеку!



Данные понятия — *целое, доля, часть* — как бы моделируют мышление человека: ведь мышление есть постоянное нахождение меры, соответствия, пропорции.

Это действительно метапредметные понятия, работу которых мы можем обнаружить

на всех предметах, даже если мы их и не озвучиваем. Однако содержательное наполнение этих понятий разное.

Уважаемые ребята! Сегодня мы плодотворно поразмышляли, пришли к очевидным и неожиданным мыслям. Оказалось, что математические понятия далеко выходят за её границы — в жизнь и культуру, помогают человеку упорядочивать окружающий мир, духовную сферу. С вашего согласия на следующем занятии мы поразмышляем о «золотой пропорции». Кто возьмётся за подготовку следующего заседания? До следующей встречи!»

Итак, можно констатировать, что учебники преимущественно отражают предметный подход в образовании. Метапредметный подход педагоги должны воссоздавать самостоятельно, «здесь и сейчас», в зависимости от конкретного контингента учащихся. Метапредметность — это возможность и способность участника образовательного процесса одновременно занять более универсально-общую и более конкретно-особенную позицию. Метапредметный подход — это всегда творчество. Это всегда уникальные и особенные методические разработки конкретного учителя и учащегося. Именно метапредметному подходу, как мы предполагаем, отводится роль по возрождению отечественного образования. Метапредметный подход — это дверь в будущее! □

Список использованных источников:

1. Клепиков В. Н. Метапредметный подход в современном образовании // Школьные технологии. 2020. № 1.
2. Библер В. С. Нравственность. Культура. Современность. М.: Знание, 1990. С. 7.
3. Клепиков В. Н. Притчевые миниатюры на уроках математики // Школьные технологии. 2010. № 4.
4. Клепиков В. Н. Пути формирования научной картины мира в школе // Школьные технологии. 2018. № 5.

References:

1. Klepikov V. N. Metapredmetnyj podhod v sovremennom obrazovanii // Shkol'nye tekhnologii. 2020. № 1.
2. Bibler V. S. Nравstvennost'. Kul'tura. Sovremennost'. M.: Znanie, 1990. S. 7.
3. Klepikov V. N. Pritchevye miniatyury na urokah matematiki // Shkol'nye tekhnologii. 2010. № 4.
4. Klepikov V. N. Puti formirovaniya nauchnoj kartiny mira v shkole // Shkol'nye tekhnologii. 2018. № 5.