

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ КУРСА АЛГЕБРЫ

Иванова Ольга Владимировна,

доцент кафедры высшей математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева», кандидат педагогических наук, доцент, Москва, oviva75@mail.ru

ПОЭТАПНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ. ПРИМЕРЫ УПРАЖНЕНИЙ КУРСА АЛГЕБРЫ 8-ГО КЛАССА, В ХОДЕ КОТОРЫХ ПРОИСХОДИТ ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА. ВАРИАНТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ: ИНТЕРАКТИВНАЯ ДОСКА, ТАБЛИЦА, СХЕМА. ПАРАЛЛЕЛЬ МЕЖДУ ИНФОРМАЦИЕЙ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА АЛГЕБРЫ И ВОЗМОЖНОГО СРЕДСТВА ВИЗУАЛИЗАЦИИ.

• визуализация • средства визуализации • математические понятия • квадратный трёхчлен • корни квадратного трёхчлена • дискриминант • этапы формирования математических понятий • развитие мышления • алгебра • упражнения • нестандартные задачи • определение понятия • интерактивная доска

Современное поколение часто задаётся вопросом о назначении образования, целью образовательного процесса для них является уже не просто знать какой-либо школьный предмет, а личностное развитие средствами этого школьного предмета. Овладение только определённой системой научных знаний, главной составляющей которой являются понятия, способствует развитию личности. Ещё в 1954 году В.М. Брадис писал, что «первым основным требованием, которое предъявляется к изложению любой науки, является требование определённости (ясности, чёткости) всех тех понятий, с какими данная наука имеет дело: употребляя какой-либо специальный термин, выражающий некоторое новое, ранее не рассмотренное понятие, необходимо обеспечить правильное понимание этого термина, установить точный смысл, раскрыть, как говорят, содержание соответствующего понятия» [1, с. 19].

Одной из проблем теории и методики обучения математике является проблема формирования математических понятий в школьном курсе математики. Процесс формирования математических понятий более сложен по сравнению с другими на-

уками из-за несуществующих математических объектов в реальности, о которых составлено понятие, они созданы умом человека. «От степени формирования математических понятий зависит и качество усвоения знаний по математике, и уровень развития мышления обучающихся. Показателями развития мышления ученика являются способности к осмыслению понятий, оперированию учащимися и конструированию новых понятий» [2, с. 2].

С другой стороны, современные учебники математики, а точнее, профессионально написанные тексты, правила и теоремы, направленные на вдумчивую мыслительную деятельность, меньше привлекают внимание нашего современного школьника, а точнее, не всегда бывают понятны школьникам и трудно усваиваются. А если сравнить с информацией, льющейся с экранов телефонов, гаджетов, планшетов, компьютеров, то можно прийти к печальному выводу, что «логическая составляющая обучения намного уступает визуальной восприятию», что было отмечено ещё 25 лет назад Н.А. Резник в своей докторской диссертации [3, с. 3], когда ещё школьники не знали о таких социальных сетях, как TikTok (дата

создания — 2016 г.) и Instagram (дата создания — 2010 г.), а педагоги не знали о такой математической программе, как GeoGebra (дата создания — 2001 г.), о таком графическом калькуляторе Desmos (дата создания — 2012 г.), об интерактивных электронных досках (дата создания — 1991 г., а после 2000-х годов использование в учебном процессе). Становится всё больше современных школьников, воспринимающих информацию через короткие яркие образы, что является составляющим понятию «клиповое мышление», при этом заметим, что данное понятие не является научным, но его используют для характеристики современного поколения. Анализ литературы [4, 5, 6] позволил выделить плюсы и минусы так называемого клипового мышления (точнее, клиповой культуры), представленные нами на схеме (рис. 1), которые должны быть учтены при работе с подрастающим поколением.

Учитывая плюсы клипового мышления, борясь с минусами, мы придём к понятию визуального обучения. Приблизительно одновременно в разных странах (начиная с 1970-х годов) стали появляться публикации, исследования об использовании визуальных образов в обучении, в представлении информации: о графическом представлении научно-технической информации американского художника У. Боумена [7], об эффективном визуальном обучении В.Ф. Шаталова [8] путём использования опорных конспектов, о психолого-педагогических основаниях визуального

обучения М.Е. Бершадского [9], о развитии визуального мышления М.И. Башмакова [10] и многие др. В настоящее время существуют различные трактовки понятия визуализации, применительно к обучению математике в данной статье под визуализацией будем понимать процесс свёртывания мыслительных содержаний в наглядный образ; «будучи воспринятым, образ может быть развёрнут и служить опорой адекватных мыслительных и практических действий» [11].

Средствами визуализации являются различные крупномодульные опоры: таблицы, схемы; интерактивные интеллект-карты, интерактивные граф-схемы и др. Наталия Александровна Резник в своём докторском исследовании совершенно чётко описала процесс обучения при работе со средствами визуализации «как непроизвольное самообучение, которое приводит к развитию навыков поиска — фиксации (классификации) своеобразия информационных визуальных сообщений» [3, с. 10]. Этап переработки информации в процессе визуального анализа она сравнила с поисковой деятельностью, с чем мы абсолютно согласны и, мало того, использовали в своей педагогической деятельности более 20 лет.

К примеру, на уроке учащиеся забыли какой-либо способ решения того или иного неравенства, учитель сам не отвечает и не помогает в этом, а просит воспользоваться своей «опорной тетрадкой» (или «словари-ком»), в которую занесены основные схемы

Клиповая культура — явление со следующими особенностями:

- мозаичность и фрагментарность образа, его яркость и кратковременность, быстрая смена другими;
- алогичность, разрозненность, отрывочность информации, растворение её целостных моделей.

Плюсы	Минусы
Способность принимать эффективные решения в экстремальной ситуации	Низкая способность к анализу информации, выделению главного и второстепенного, к осмыслению большого объёма, к чтению книг
Защита мозга от информационных перегрузок	Плохая концентрация внимания, плохая память, мышление шаблонно, стереотипно
Способность воспринять большой поток информации за единицу	Интеллектуальная и эмоциональная «леность» (нежелание думать, ослабление чувства сопереживания), ослабленное воображение
Высокая скорость переключения с одной информации на другую	Низкое восприятие информации на слух, текста без картинок и схем
Способность человека выполнять несколько дел одновременно на высокой скорости	

Рис. 1. Плюсы и минусы клипового мышления

по темам (блок-схемы, опоры, таблицы). Учащиеся смотрят, читают схему, трансформируют её на конкретное неравенство и начинают решать. А ведь многие схемы — алгоритмы решения тех или иных задач, но в виде стрелок, слов, формул. Учитель просит зачастую самих учащихся составлять такие схемы, а затем на уроках их апробировать.

Или, например, при подготовке к контрольной работе или к экзамену учащимся, в частности старшеклассникам, задаётся домашнее задание, при этом обговариваются условия: в начале решаем без схем, а затем сами себя проверяем, сопоставляя с алгоритмами, указанными в схемах. Анализ нашей деятельности показал очень хорошие результаты — ученики сильно менялись: математику начинали видеть по-другому, успеваемость учащихся не просто повышалась, появлялось понимание учебного предмета в целом, они находили ответы на свои вопросы, как математика им помогает в их развитии.

Заметим, что каждый учитель использует на уроках математики наглядный материал: формулы, чертежи, схемы, таблицы, графики и др. Но здесь важно, чтобы «ученик смотрел и видел то, что заложено в этих образах, а не просто смотрел на предъявляемые ему зрительные образы» [10, с. 4]. О методических особенностях использования средств визуализации при обучении математике мы рассказывали в статьях о методике изучения обыкновенных дробей [12], о методике изложения теории вероятностей и элементов математической статистики [13], о методике создания средств визуализации [14, 15, 16] и многих других, все они были проверены в практике работы.

В данной статье рассмотрим методические элементы использования средств визуализации в процессе формирования математических понятий курса алгебры. За основу мы взяли исследование Геннадия Ивановича Саранцева [17]. На схеме (рис. 2) указаны этапы формирования понятия



Рис. 2. Схема сопоставления этапов формирования понятий с соответствующими упражнениями, реализующими их

с соответствующими упражнениями («упражнения — основное средство формирования понятия» [17, с. 112]).

Раскроем указанные этапы (рис. 2) формирования понятия «квадратный трёхчлен» в курсе алгебры 8-го класса с использованием средств визуализации, не нарушая логику изложения школьных учебников. За основу возьмём, к примеру, учебник алгебры 8-го класса авторов А.Г. Мерзляка, В.М. Полякова [18]. Важность изучения темы «Квадратный трёхчлен» исходит из того, что она является базовым элементом трёх основных содержательно-методических линий: линии тождественных преобразований, линии уравнений и неравенств и функционально-графической линии. Так как понятие «квадратный трёхчлен» можно трактовать и как «многочлен второй степени с одной переменной», и как «квадратичную функцию», и как выражение «квадратных уравнений и неравенств». С понятием квадратного трёхчлена связаны понятие корня квадратного трёхчлена, понятие дискриминанта. Важно заострить внимание на понятии «квадратный трёхчлен» из-за того, что ученики путают его с квадратным неравенством. Из-за неверного понимания понятия «квадратный трёхчлен», как показывает опыт, учащиеся приходят к неправильным рассуждениям в дальнейшем при изучении других алгебраических тем и допускают ошибки, например при решении квадратных неравенств, при решении задач с параметрами.

Начальным этапом процесса формирования понятия является мотивация его введения. Мотивация может осуществляться с помощью специально созданных упражнений средствами интерактивной доски на применение изученных понятий и теорем. Перед введением понятия «квадратный трёхчлен» восьмиклассники уже знакомы с понятиями «многочлен», «квадратное уравнение», «параметр», «приведённое квадратное уравнение», а также с прямой и обратной теоремой Виета и их следствиями. Например, необходимость введения понятия «квадратный трёхчлен» и его корней предполагает рациональность в действиях: разложить на множители многочлены (рис. 3), средствами интерактивной доски учащиеся без особого труда справятся с заданием — перетащить способы разложения к соответствующим многочленам и указать получившиеся множители. Указанный случай и предполагает введение понятия «квадратный трёхчлен».

Следующий этап — выявление существенных свойств понятия, которые составляют его определение. Квадратный трёхчлен может быть введён путём выполнения упражнений на составление определения указанного понятия из элементов, являющихся составными частями его существенных свойств (рис. 4). То есть собирается определение «Квадратный трёхчлен — это многочлен вида $ax^2 + bx + c$ где x — переменная, a, b, c — параметры, причём $a \neq 0$ » [18, с. 296].

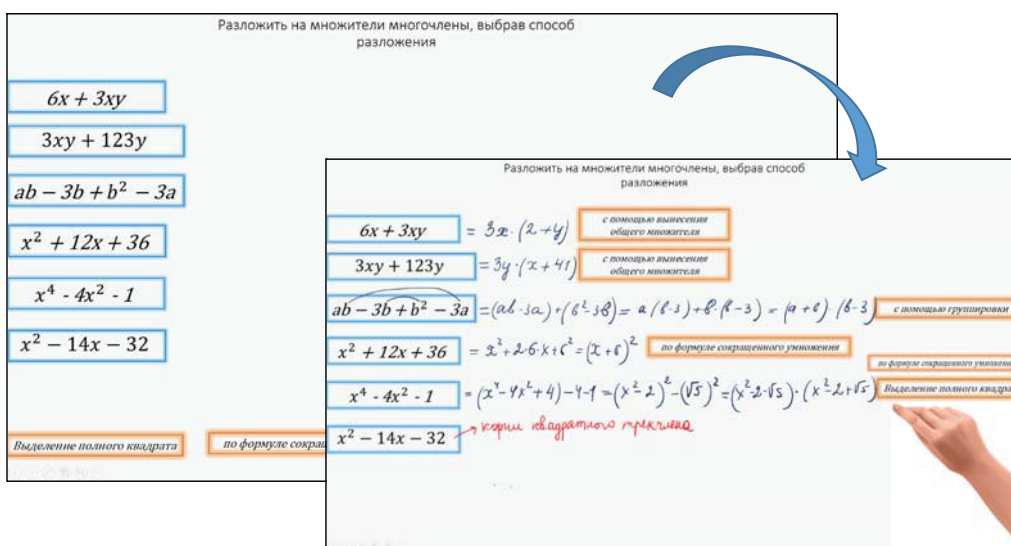


Рис. 3. Разложение многочленов на множители с указанием способа

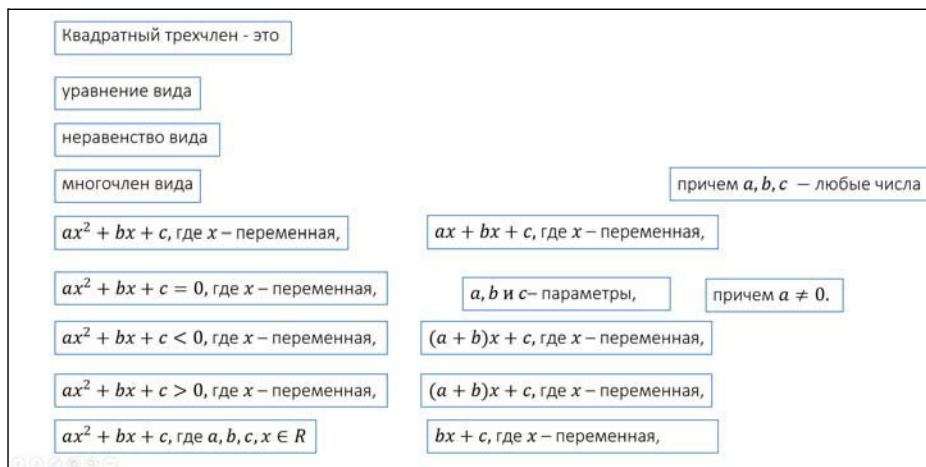


Рис. 4. Составить определение понятия квадратного трёхчлена

Понятие «квадратный трёхчлен» неразрывно связано с понятиями «корни квадратного трёхчлена» и «дискриминант квадратного трёхчлена». Из предыдущего примера (рис. 3) многочлен $x^2 - 14x - 32$ остался не разложен на множители, который и показывает на необходимость введения определений указанных понятий. «Корнем квадратного трёхчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю».

Наличие корней и разложение на множители определяет знак дискриминанта. Дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называют число $D = b^2 - 4ac$ [18, с. 297]. На этом этапе мы предлагаем упражнения на выделения полного квадрата в квадратном трёхчлене.

Пример 1. Выделить полный квадрат в квадратном трёхчлене $x^2 - 6x + 5$.

Решение: $x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$.

Пример 2. Найти центр и радиус окружности $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$.

Решение. Уравнение окружности со смещённым центром $(x_1; y_1)$:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$$

Решение сводится к выделению полного квадрата для переменных x и y :

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 - 3 - 4 - 9 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

Таким образом, центр окружности имеет координаты $(2; -3)$ и радиус равен $R = 4$.

На этапе усвоения определения понятия центром изучения являются существенные свойства, указанные в определении понятия, то есть все упражнения направлены на нахождение корней квадратного трёхчлена, на связь между корнями квадратного трёхчлена и линейными множителями, на которые он раскладывается. В учебнике алгебры [18] указанная связь предлагается в виде теорем. Мы же предлагаем учащимся опорную схему, но не в готовом виде: в начале после формулировок и доказательств теорем предлагается составить самим схему, а затем готовая схема помещается учащимися в их тетрадь для опорного материала (или назовём её «словарь по математике») [16].

На этом этапе комплекс упражнений может состоять из таких заданий: 1) разложить на линейные множители квадратный трёхчлен; 2) сократить дробь, числители и знаменатели которых содержат квадратный трёхчлен; 3) решить неравенство, левая часть которого является квадратным трёхчленом; 4) нахождение параметра a , b или c , при каких-либо

условиях; 5) разложить на множители многочлен. В начале учащиеся пользуются опорной схемой (рис. 5), но при самостоятельных и контрольных работах схемой пользоваться запрещено.

Заметим, что при выполнении упражнений: решить неравенство, может получиться, что дискриминант отрицательный и разложить его нельзя на множители, но квадратный трёхчлен принимает значения одного знака, что и параметр a при всех x . В школьном учебнике авторы предлагают теорему на это свойство, а мы — опорную схему (рис. 6).

Следующий этап: применение понятия. Этот важный этап формирования понятия расширяет кругозор учащихся об изучаемом понятии. Например, наличие корней и разложение на множители квадратного трёхчлена определяют и другие условия, например теорема Виета (рис. 7).

Эффективное использование теоремы Виета в следующих ситуациях.

1. Вычислить выражение, зависящее от корней квадратного трёхчлена.
2. Найти корни квадратного уравнения с параметром, если известно их отношение.
3. Найти значение параметра квадратного уравнения, если известны знаки его корней.

Пример 3. Дан квадратный трёхчлен: $2x^2 - 10x + 7$. Найти: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; в) $x_1^3 + x_2^3$.

Решение.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{2} \end{cases} \quad (\text{см. рис. 4});$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2 = 25 - 7 = 18.$$

$$\text{б) } x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{2}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5}{\frac{7}{2}} = \frac{10}{7}.$$

$$\text{в) } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) =$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = 5 \cdot \left(18 - \frac{7}{2}\right) = 5 \cdot 14 \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 29}{2} = \frac{145}{2} = 72 \frac{1}{2}.$$



Рис. 5. Связь между корнями трёхчлена и линейными множителями (x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена)

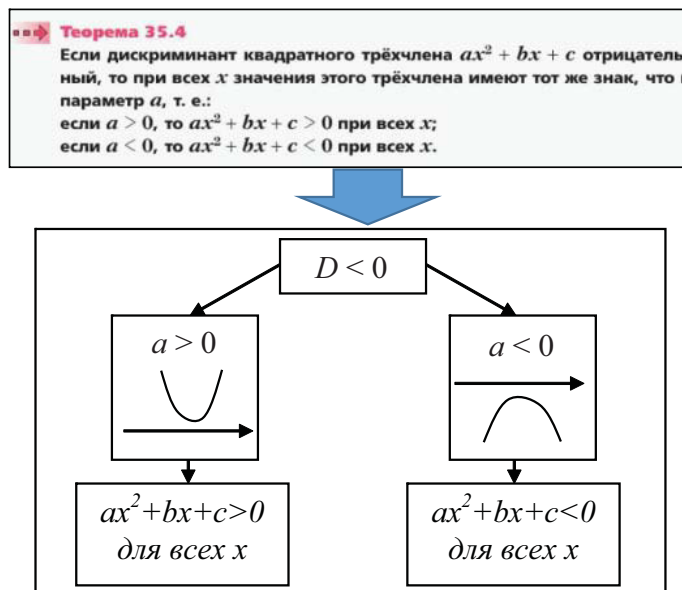


Рис. 6. Условия квадратного трёхчлена принимать значения одного знака, что и параметр a

На этом этапе мы предлагаем комплекс упражнений, опираясь на пособия [19, 20]: 1) найти сумму квадратов корней уравнения; 2) найти квадрат разности корней уравнения; 3) найти сумму кубов уравнения; 4) составить квадратное уравнение по имеющимся корням другого уравнения, например: составить квадратные уравнения, противоположные корням уравнения $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

Последний этап формирования математических понятий — установление связей изучаемого понятия с другими понятиями, осуществление которого происходит за счёт упражнений на составление родословной понятия, на обобщение и систематизацию понятия, на применение понятия в различных ситуациях. Всё это можно уместить в нестандартных задачах. Интересные по своему содержанию прикладные задачи, указанные в КИМах для подготовки к ЕГЭ, но вполне посильные для учащихся 8-го класса. Для полного понимания их решения необходимо упомянуть и о графике квадратного трёхчлена. Графиком квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, пересекающая ось Oy в точке $(0; c)$. Все случаи расположения параболы, знаки квадратного трёхчлена мы представили в таблице на рис. 8. Данную таблицу учащиеся помещают в свою опорную тетрадь, но не в готовом виде, а с пустыми ячейками, вместе с учителем её заполняют (учитель на интерактивной доске, а ученики в тетради).



Рис. 7. Условия нахождения корней квадратного трёхчлена

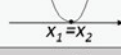
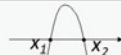
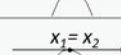
	$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$D > 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$[x_1; x_2]$
$D < 0$		$x \in R$	$x \in R$	$\emptyset$	$\emptyset$
$D = 0$		$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$x \in R$	$\emptyset$	$\{x_1\}$
	$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$D > 0$		$(x_1; x_2)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$D < 0$		$\emptyset$	$\emptyset$	$x \in R$	$x \in R$
$D = 0$		$\emptyset$	$\{x_1\}$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$x \in R$

Рис. 8. Знаки квадратного трёхчлена, дискриминанта и параметра a

Пример 4. На рис. 9 изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0013x^2 - 0,35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах [21, с. 70].

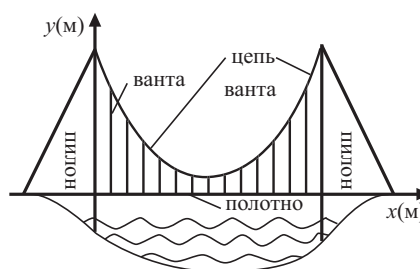


Рис. 9. Схема вантового моста

Применительно к теме «Квадратный трёхчлен» на этом этапе к нестандартным задачам мы относим задачи с параметром. Рассмотрим примеры.

Пример 5. При каком значении параметра a отношение корней уравнения $x^2 + ax - 16 = 0$ равно -4 ?

Решение.

$$\frac{x_1}{x_2} = -4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_2, \\ x_1 + x_2 = -a, \rightarrow x_2 = -\frac{16}{x_1}, x_1 = -4 \cdot -\frac{16}{x_1}, x_1^2 = 4 \cdot 16, x_1 = \pm 8, x_2 = \pm 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -16 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -a \rightarrow 8 - 2 = -a, a = -6 \text{ и } -8 + 2 = -a, a = 6.$$

Ответ: $a = \pm 6$.

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (2a - 1)x + 1 - a = 0$ имеет два действительных положительных корня?

Решение.

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \rightarrow \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [-(2a-1)]^2 - 4(1-a) > 0, \\ x_1 + x_2 = 2a-1 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = 1-a > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 3 > 0, \\ 2a > 1, \\ a < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2a - \sqrt{3})(2a + \sqrt{3}) > 0, \\ a > \frac{1}{2}, \\ a < 1 \end{cases}$$

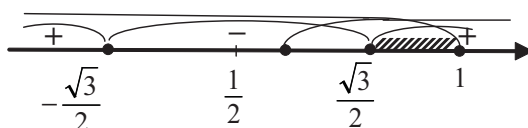


Рис. 10. Решение системы неравенств

Решение системы показано методом интервалов на рис. 10 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1,7}{2} = 0,85\right)$.

Ответ: При $a \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ уравнение имеет два положительных корня.

Комплекс упражнений для этого этапа составлен, опираясь на пособия [19, 20, 21, 22].

1. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$ в два раза больше другого? (ответ: $a = 4$).

2. В уравнении $x^2 - 4x + a = 0$ сумма квадратов корней уравнения равна 6. Найти a . (ответ: $a = -10$).

3. При каких значениях параметра k квадратный трёхчлен $5x^2 + 2kx + 5$ имеет два равных отрицательных корня? (ответ: $k = 5$).

4. При каких целых значениях параметра k квадратный трёхчлен $(k - 12)x^2 - 2(k - 12)x + 2$ не имеет решения? (ответ: $k = 13$).

5. Сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + p$ равна 16. Найти p . (ответ: $p = 0$).

6. Корни квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + q$ удовлетворяют условию $7x_1 + 3x_2 = -10$. Найти q (ответ: $q = -91$).

Итак, мы рассмотрели все этапы формирования математических понятий с использованием средств визуализации: интерактивная доска, схема, таблица. Считаем, что именно такой подход позволяет раскрыть суть изучаемого понятия, показывает применение понятия в разнообразных вариантах. При соблюдении всех этапов формирования понятий процесс обучения становится для учащихся познавательной деятельностью, позволяющей формировать высокий уровень интеллектуального развития. $\square$

Список использованных источников:

- Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе. М.: Просвещение. 1954. 505 с.
- Ситникова И.В. Формирование математических понятий в средней школе: автореф. дис.... канд. пед. наук. Киров, 2000. 24 с.
- Резник Н.А. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления: автореф. дис. ... доктора пед. наук. М., 1997. 34 с.
- Алексеев С.Н., Гайворонская Т.В., Дробот Н.Н. Интеграция клинического и клипового мышления студентов в образовательном процессе медицинского ВУЗа // Современные проблемы науки и образования. 2019. № 6. [Электронный ресурс]. Режим доступа: elibrary_42405881_75924508.pdf (дата обращения: 20.01.2022).
- Фрумкин К.Г. Клиповое мышление и судьба линейного текста // Топос. 2010. № 9. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.topos.ru/article/7371> (дата обращения: 20.01.2022).
- Семеновских Т.В. «Клиповое мышление» — феномен современности // Оптимальные коммуникации: эпистемический ресурс Академии медиаиндустрии и кафедры теории и практики общественной связности РГГУ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://jarki.ru/wpress/2013/02/18/3208/> (дата обращения: 20.01.2022).
- Боумен У. Графическое представление информации. М.: Мир, 1971. 227 с.
- Шаталов В.Ф. Точка опоры. М.: Педагогика, 1987. 366 с.
- Бершадский М.Е. Психолого-педагогические основания метода карт понятий // Школьные технологии. 2010. № 1. С. 84–89.
- Башмаков М.И. Развитие визуального мышления на уроках математики / М.И. Башмаков, Н.А. Резник // Математика в школе. 1991. № 1. С. 4–8.
- Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход / А.А. Вербицкий. М.: Высш. шк., 1991. 207 с.

12. Иванова О.В., Потапова Н.В. Визуальное повторение математической информации средствами интерактивного электронного пособия // Школьные технологии. 2019. № 2. С. 60–69.
13. Иванова О.В. Визуальное повторение учебной информации в средней и высшей школе // Информатика и образование. 2019. № 5(304). С. 41–50.
14. Высшая математика в схемах и таблицах: учеб.-метод. пособие / С.П. Грушевский, О.В. Засядко, О.В. Иванова, О.В. Мороз. — Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2018. 109 с.
15. Иванова О.В. Скрайбинг как средство модульной визуализации при обучении математическим дисциплинам в средней и высшей школе // Школьные технологии. 2018. № 4. С. 72–79.
16. Иванова О.В. Интерактивные интеллект-карты как средство обобщения учебной информации. 2018. № 1. С. 46–58.
17. Саранцев Г.И. Формирование математических понятий в средней школе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 1998. № 1. С. 134–143.
18. Алгебра. 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. М.: Вентана-Граф, 2019. 384 с.
19. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 10 класс. Омск: НОУ НОК «Образование Плюс». 2001. 124 с.
20. Вольпер Е.Е., Фёдорова Е.И. Задачи по математике для подготовки к тестированию и единому государственному экзамену. Омск: ОмГУ, 2002. 97 с.
21. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И.В. Яценко, М.А. Волчкевич, И.О. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Федоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль: под ред. И.В. Яценко. М.: Экзамен, 2020. 231 с.
22. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Задачи с параметром. М.: Экзамен, 2019. 126с.
5. Frumkin K.G. Klipovoe myshlenie i sud'ba linejnogo teksta // Topos. 2010. № 9. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://www.topos.ru/article/7371> (data obrashcheniya: 20.01.2022).
6. Semenovskih T.V. "Klipovoe myshlenie" — fenomen sovremennosti // Optimal'nye kommunikacii: epistemicheskij resurs Akademii mediaindustrii i kafedry teorii i praktiki obshchestvennoj svyaznosti RGGU [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://jarki.ru/wpress/2013/02/18/3208/> (data obrashcheniya: 20.01.2022).
7. Boumen U. Graficheskoe predstavlenie informacii. M.: Mir, 1971. 227 с.
8. Shatalov V.F. Tochka opory. M.: Pedagogika, 1987. 366 s.
9. Bershadskij M.E. Psihologo-pedagogicheskie osnovaniya metoda kart ponyatij // Shkol'nye tekhnologii. 2010. № 1. S. 84–89.
10. Bashmakov, M.I. Razvitie vizual'nogo myshleniya na urokah matematiki / M.I. Bashmakov, N.A. Reznik // Matematika v shkole. 1991. № 1. S. 4–8.
11. Verbickij, A.A. Aktivnoe obuchenie v vysshej shkole: kontekstnyj podhod / A.A. Verbickij. M.: Vyssh. shk., 1991. 207 s.
12. Ivanova O.V., Potapova N.V. Vizual'noe povtorenie matematicheskoy informacii sredstvami interaktivnogo elektronnoego posobiya // Shkol'nye tekhnologii. 2019. № 2. S. 60–69.
13. Ivanova O.V. Vizual'noe povtorenie uchebnoj informacii v srednej i vysshej shkole // Informatika i obrazovanie. 2019. № 5(304). S. 41–50.
14. Vysshaya matematika v skhemah i tablicah: ucheb.-metod. posobie / S.P. Grushevskij, O.V. Zasyadko, O.V. Ivanova, O.V. Moroz. Krasnodar: Kubanskij gos. un-t, 2018. 109 s.
15. Ivanova O.V. Skrajbing kak sredstvo modul'noj vizualizacii pri obuchenii matematicheskimi disciplinam v srednej i vysshej shkole // Shkol'nye tekhnologii. 2018. № 4. S. 72–79.
16. Ivanova O.V. Interaktivnye intellekt-karty kak sredstvo obobshcheniya uchebnoj informacii. 2018. №1. S.46–58.
17. Sarancev G.I. Formirovanie matematicheskikh ponyatij v srednej shkole // Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona. 1998. № 1. S. 134–143.
18. Algebra. 8 klass: uchebnik dlya uchashchihsya obshcheobrazovatel'nyh organizacij / A.G.Merzlyak, V.M. Polyakov. — M.: Ventana-Graf, 2019. — 384 s.
19. Agalakov S.A. Sistema dopolnitel'nyh zanyatij po matematike. 10 klass. Omsk: NOU NOK «Obrazovanie Plyus». 2001. 124 s.
20. Vol'per E.E., Fedorova E.I. Zadachi po matematike dlya podgotovki k testirovaniyu i edinomu gosudarstvennomu ekzameni. Omsk: OmGU, 2002. 97 s.
21. EGE 2020. Matematika. Profil'nyj uroven'. 30 variantov. Tipovye varianty ekzamenacionnyh zadaniy ot razrabotchikov EGE / I.V. Yashchenko, M.A. Volchkevich, I.O. Vysockij, R.K. Gordin, P.V.Semenov, O.N. Kosuhin, D.A. Fedorovyh, A.I. Suzdal'cev, A.R. Ryazanovskij, V.A. Smirnov, A.V. Hachaturyan, S.A. Shestakov, D.E. Shnol': pod red. I.V. Yashchenko. M.: Izdatel'stvo "Ekzamen", 2020/ 231 s.
22. Sadovnichij Yu.V. EGE 2019. 100 balllov. Matematika. Profil'nyj uroven'. Zadachi s parametrom. — M.: Izdatel'stvo "Ekzamen", 2019. 126s.

References:

1. Bradis V.M. Metodika prepodavaniya matematiki v srednej shkole. M.: Prosveshchenie. — 1954. — 505 s.
2. Sitnikova I.V. Formirovanie matematicheskikh ponyatij v srednej shkole: avtoref. dis.... kand. ped. nauk. Kirov, 2000. 24 s.
3. Reznik N.A. Metodicheskie osnovy obucheniya matematike v srednej shkole s ispol'zovaniem sredstv razvitiya vizual'nogo myshleniya: avtoref. dis.... doktora ped. nauk. Moskva, 1997. 34 s.
4. Alekseenko S.N., Gajvoronskaya T.V., Drobot N.N. Integraciya klinicheskogo i klipovogo myshleniya studentov v obrazovatel'nom processe medicinskogo VUZa // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. 2019. № 6. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: elibrary_42405881_75924508.pdf (data obrashcheniya: 20.01.2022).