

ТРИ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ТРОЙНУЮ ПРОПОРЦИЮ

Клепиков Валерий Николаевич,

ведущий научный сотрудник Института изучения детства, семьи и воспитания РАО, методист Малой академии наук «Интеллект будущего», учитель математики, физики и этики средней школы № 6 г. Обнинска, кандидат педагогических наук, г. Обнинск, klepikovvn@mail.ru

ВПЕРВЫЕ ПРЕДЛОЖЕННЫЕ, МЕТОДИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫЕ И ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ТРОЙНУЮ ПРОПОРЦИЮ, КОТОРЫЕ ПОМОГАЮТ УЧАЩИМСЯ ЛЕГКО РЕШАТЬ И ПЕРЕПРОВЕРЯТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ («ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ»), А ТАКЖЕ СПОСОБСТВУЮТ ГЛУБИННОМУ ПОНИМАНИЮ ТАКОГО УНИВЕРСАЛЬНОГО УЧЕБНОГО ДЕЙСТВИЯ (УУД), КАК ПРОПОРЦИОНИРОВАНИЕ.

• тройная пропорция • «часть — доля — целое» • прямо пропорциональная зависимость • обратно пропорциональная зависимость • пропорционирование

Взяться за решение задач на тройную пропорцию нас побудили следующие обстоятельства. Во-первых, в методической литературе мы не нашли подробных сведений. Во-вторых, в Интернете попадаются в основном интуитивные, неточные, ошибочные или неполные сведения по решению данных задач. В-третьих, предлагаемые в Интернете решения достаточно непростые и громоздкие. В-четвёртых, участники математических турниров, которые мы проводим на базе Малой академии наук (МАН) «Интеллект будущего», часто задают вопросы относительно решения именно таких задач.

Но, пожалуй, самое главное, почему обратились к этой метапредметной теме, — это то, что именно деятельность пропорционирования выводит нас на понимание того, что такое универсальное учебное действие [2]. Почему практически на всех предметах участники образовательного процесса обращают свой взор на идею пропорционирования? Дело в том, что в этом слове сопряжены, совмещены, интегрированы два очень важных понятия: «пропорция» и «деятельность». Мы можем применять разные слова — «настройка», «координация», «артикуляция», «центрация», «гармонизация», но в основе их лежит операция пропорционирования. Другими словами, речь идёт о практическом и повсеместном применении пропорции в многоплановой жизнедеятельности человека.

Более того, очень важно, чтобы эта универсальная деятельность приносила учащимся чувство глубокого удовлетворения и способствовала их духовно-нравственному воспитанию [3].

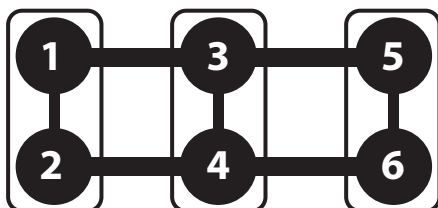
Где же применяется операция пропорционирования:

- в математике — это применение обычной, геометрической, арифметической, гармонической, золотой пропорции;
- в литературе — это навыки неожиданных поэтических сопоставлений;
- в химии — это расчёт и учёт меры смешиваемых веществ;
- на физике — выявление прямо и обратно пропорциональных величин;
- на физкультуре — это развитие чувства равновесия и эстетическое восприятие физической красоты человека;
- на уроках технологии — это создание гармоничной и устойчивой конструкции;
- на уроках рисования — это использование «формулы красоты», или «золотого сечения»;
- на уроках музыки — её ритмическая организация (гармония, полифонизм);
- на этических занятиях — опора на «золотое правило нравственности»;
- в географии — использование такого понятия, как «масштаб»;
- на уроках истории — это выработка сбалансированной «меры» в трактовке событий;

- в биологии и экологии — это стремление к установлению чуткого баланса между природным и человеческим мирами;
- в психологии — адекватное осознание себя в развивающихся социальных контекстах;
- уроках русского и иностранного языков — это аутентичная интерпретация и перевод, смысловой баланс, соответствие между словом, предложением, абзацем и текстом в целом.

Сразу отметим, что термин «тройная пропорция» условный. Данную конструкцию можно было бы назвать «сложная пропорция», «задачи на сложное тройное правило», «задачи на пропорциональные величины», «задачи на смешанные пропорции». Все эти названия в какой-то степени отражают суть данных задач. Но мы остановимся на термине «тройная пропорция», так как у нас при решении будут фигурировать три отношения, из которых мы будем брать два, другая же пара будет постоянной величиной. «Ключевой» данного типа задач будет выступать отношение двух соответствующих величин, «целым» — взаимообусловленная структура, состоящая из трёх отношений [5].

Общая структура подобных задач выглядит следующим образом.



Для интриги напомним одну из знаменитых задач на тройную пропорцию, которая на первых порах приводит решающих её в некоторое недоумение. Если 1,5 курицы за 1,5 дня снесут 1,5 яйца, то сколько яиц снесут 3 курицы за 3 дня? Отметим, что многие ребята даже не берутся решать данную задачу, так как уверены, что «1,5 курицы и 1,5 яйца не бывают», забывая о том, что в математике средние величины по статистике могут быть вполне дробными, тем более — промежуточными. Однако в конечном итоге всё определяется смыслом математической задачи, её контекстом. Решим её без комментариев одним из трёх способов, о котором мы расскажем ниже: $1,5 : 1,5 : 1,5 = x : 3 : 3$; $x = 6$.

Задачи на тройную пропорцию очень часто встречаются в учебниках и занимательной литературе, но не существует простого и строго продуманного способа решения подобных задач. В старых учебниках формулировалось следующее, несколько запутанное «сложное тройное правило»: «Чтобы получить искомое число, достаточно данное значение той же величины умножить последовательно на отношения данных значений остальных величин, беря отношение нового значения к прежнему, если величина прямо пропорциональна той, значение которой отыскивается, и прежнего значения к новому, когда величина обратно пропорциональна той, значение которой отыскивается».

Автор учебников по математике А.В. Шевкин отмечает: «Запоминать и безошибочно применять это правило было, видимо, не так уж просто. Стоит ли удивляться, что такое обучение было сложным и малополезным для учащихся, вызывало возмущения у учителей и методистов». Так, например, в программе для I и II ступени семилетней школы единой трудовой школы 1921 г. достаточно определённо констатируется: «Все же остальные «правила» представляют собою пережитки прошлого и чепуху даже не натуральную, а искусственную». И дальше: «Сложное тройное правило охватывает коллекцию искусственных задач, которые давно следует выбросить из школьного обихода вследствие их бессмысленности» [6].

Столь резкая категоричность авторов программы, видимо, была связана не столько с самими задачами (их условия вполне можно было приблизить к опыту ребёнка), сколько с малополезной методикой обучения школьников решению задач «по правилам», но без глубокого понимания и осознания. Методические сведения из учебника А.П. Киселёва дают представление о методике изложения интересующего нас материала в дореволюционных учебниках, но здесь рассматривается только «окончательная формула», «универсальное правило», но не формулируется осмысленный и пластичный алгоритм решения подобных задач. Очевидно, что такие формулировки и правила кардинально не решили проблему решения подобных задач [1].

Искусственность формулировок некоторых непродуманных задач на тройную пропорцию подверг критике известный английский писатель-математик Льюис Кэрролл. Он, например, анализирует следующую задачу: «6 кошек съедят 6 мышек за 6 минут. Сколько кошек съедят 100 мышек за 50 минут?». В частности, он пишет: «Но стоит нам более подробно вникнуть в то, как происходило кровопролитное побоище, не упуская из виду ни одной леденящей душу детали, как мы обнаружим, что по истечении 48 минут 96 мышек окажутся съеденными, 4 мышки останутся в живых, и у кошек будет лишь 2 минуты, чтобы съесть и этих мышек. Спрашивается, способны ли кошки на этот подвиг?» [4].

В Интернете обнаруживаются всего несколько источников информации о тройной пропорции. Однако в них явлены лишь приблизительные или ложные сведения о тройной пропорции. Например, в YouTube один из любителей математики, очевидно, заполняя вакуум по решению подобных задач, рассказывает, как решается тройная пропорция, но интуитивно, без алгоритма, при этом совершенно не указывая на очень важное обстоятельство, что в тройной пропорции есть как прямо пропорциональные, так и обратно пропорциональные величины, что принципиально важно с учётом того, что в ходе решения одна (а если берётся отношение, то пара) величина должна оставаться постоянной, константной.

Мы нашли единственный слайд, где говорится, что при решении тройной пропорции одна пара динаковых величин должна быть постоянной. Это единственный образец, но он не даёт полного алгоритма решения подобных задач. Также мы нашли единственный слайд, где говорится о прямо пропорциональной зависимости, приводится без объяснений решение, но в выводах вдруг утверждается, что задачи на «смешанные пропорциональности» легче решать по действиям, не разбивая данные на пропорции. А в одном из интернетных источников содержится явная ошибка: тройная пропорция не раскладывается на три обычные пропорции указанным образом.

Мы решили предварительно проверить, сколько ребят из класса смогут решить данный тип задач. Из 24 человек только 6

смогли решить данную задачу по действиям, т.е. 25%. С помощью знаний о пропорции не решил и не решал никто! Это было удивительно, так как эта задача всё же на пропорцию или даже на пропорции. Поэтому мы решили воссоздать «метод тройной пропорции» и вооружить этим способом ребят. И в результате посмотреть, сколько ребят смогут освоить данный метод. В ходе решения задачи по действиям выяснилось, что у всех ребят не было достаточной уверенности, что они решили правильно, т.е. у них отсутствовала достоверная проверка на верность и точность решения. А это, как мы понимаем, принципиально важно!

Итак, что нужно знать, чтобы решать задачу на тройную пропорцию?

1. Что такое отношение, пропорция, коэффициент пропорциональности.
2. Что такое прямо пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости.
3. Как соотносятся и записываются соответствующие величины.
4. Свойства тройной пропорции.
5. Как нужно выбирать следующий логический шаг, как выбирать следующую «рабочую пропорцию», т.е. пропорцию, с которой нужно работать.
6. Как подвести одну величину под другую (приём пропорционирования).
7. Как сделать проверку верности решения задачи.
8. Как интерпретировать результат задачи, если он получается дробным.
9. Что нужно учитывать, чтобы сочинять адекватные задачи на тройную пропорцию.

Возьмём для анализа следующую задачу: «3 маляра за 5 дней могут покрасить 60 окон. Сколько маляров надо поставить на покраску окон, чтобы они за 3 дня покрасили 64 окна?»

Первоначально нужно создать схему, которая распределит соответствующие величины друг под другом с учётом того, что на первом месте будут величины, характеризующие «количество субъектов действия», на втором — «количество потраченного времени», на третьем — «количество созданных продуктов».

I	II	III
субъекты	время	продукты
3 маяра	5 дней	60 окон
x маяров	2 дня	64 окна

В ходе решения задачи «методом тройной пропорции» существенным стал приём подводки одной величины под другую с помощью пропорционирования: подведение величин одной строки под величины другой строки, с учётом знаний о прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величинах. Принципиально важно учитывать, что «количество субъектов действия» и «количество времени» — это обратно пропорциональные величины. Остальные пары величин образуют прямо пропорциональную зависимость. При этом в ходе каждого шага одну величину мы оставляем неизменной или постоянной. Например, 5 дней, потом — 1 маяр, затем — ещё раз 1 маяр.

Обратим внимание: здесь возможны разные ходы или траектории движения! Но мы движемся так, как нам удобнее и быстрее, и так, чтобы избежать дробных чисел. Верным ответом будет 8 маяров.

I	II	III
субъекты	время	продукты
3 маяра	5 дней	60 окон
1 маяр	5 дней	20 окон
1 маяр	1 день	4 окна
1 маяр	2 дня	8 окон
8 маяров	2 дня	64 окна

Следующий способ мы назвали «методом двойной пропорции». Этот способ не был обнаружен в методической литературе и в Интернете. Здесь мы используем как в первой, так и второй частях два отношения, а в результате «двойную пропорцию». Находим отношение количества продуктов к количеству времени и к количеству субъектов действия. То, что нужно найти, обозначаем за x . Решаем уравнение: $60 : 5 : 3 = 64 ; 2 : x ; x = 8$. Этот метод лёгкий, но у него есть большой недостаток: можно решить задачу, не понимая её сути, т.е. не понимая, что такое пропорция, прямо пропорциональная зависимость, обратно пропорциональная зависимость. Но этот метод делает нам крупную подсказку: как

быстро проверить верность решения задачи.

Решение задачи методом обычной, одинарной пропорции. Запишем соответствующие величины друг под другом с учётом того, что на первом месте — количество субъектов, на втором — количество времени, на третьем — количество продуктов. Обозначим неизвестную величину через x . Тогда отношение произведения количества маяров на количество дней будет равно отношению сделанных окон. Обратим внимание, что количество субъектов и количество времени — это обратно пропорциональные величины. Используя свойства обычной пропорции, легко находим результат.

I	II	III
субъекты	время	продукты
3 маяра	5 дней	60 окон
x маяров	2 дня	64 окна

$$\frac{3 \cdot 5}{x \cdot 2} = \frac{60}{64} ; x = 8.$$

Ещё раз напомним: когда мы решаем задачи на тройную пропорцию, то очень важно учитывать, какие величины у нас прямо пропорциональные, а какие — обратно пропорциональные. Возьмём следующую задачу: «3 белочки сгрызают за 60 секунд 6 орехов. За сколько секунд 1 белочка сгрызёт 1 орех?» Покажем, как в этой задаче будет «работать» прямая пропорциональность. Здесь постоянной величиной сначала выступают 60 секунд, а потом — 1 белочка. Составляем таблицу:

I	II	III
субъекты	время	продукты
3 белочки	60 секунд	6 орехов
1 белочка	60 секунд	2 ореха
1 белочка	30 секунд	1 орех

Если мы пойдём другим путём в решении данной задачи, т.е. возьмём за постоянную величину количество орехов, то мы столкнёмся с обратной пропорциональностью. В данной задаче количество белочек и количество времени — обратно пропорциональные величины. Значит, когда мы 3 делим на 3, то 60 умножаем на 3. Затем мы уже встречаемся с прямо пропорциональной зависимостью: делим на 6. Здесь

постоянными величинами выступают сначала 6 орехов, а потом — 1 белочка. Итак, что нужно запомнить? Если мы берём за постоянную величину количество продуктов, то мы встречаемся с обратной пропорциональной зависимостью!

I	II	III
субъекты	время	продукты
3 белочки	60 секунд	6 орехов
1 белочка	180 секунд	6 орехов
1 белочка	30 секунд	1 орех

Сделаем быструю проверку решения задачи на основе «метода двойной пропорции»: $6 : 60 : 3 = 1 : x : 1$; $x = 30$. Таким образом, для понимания и проверки желательно решить задачу на тройную пропорцию двумя способами.

Нельзя не вспомнить знаменитую задачу Ньютона из «Всеобщей арифметики»: «Если писец может за 8 дней написать 15 листов, сколько понадобится писцов, чтобы написать 405 листов за 9 дней?» Составим таблицу и решим задачу «методом одинарной пропорции»:

$$\frac{1 \cdot 8}{x \cdot 9} = \frac{15}{405}; x = 24.$$

I	II	III
субъекты	время	продукты
1 писец	8 дней	15 листов
x писцов	9 дней	405 листов

Итак, мы предложили вашему вниманию три способа решения задач на тройную пропорцию: «метод тройной пропорции», «метод двойной пропорции», «метод одинарной пропорции». Суть всех этих способов состоит в том, чтобы выработать такое универсальное учебное действие, как пропорционирование.

Обратим внимание на то, что пропорция в ходе применения данного универсального учебного действия просто «оживает»: она становится динамичной, гибкой, насыщенной смыслами. Осмысленная деятельность по решению задач на тройную пропорцию — это одна из ярких возможностей продемонстрировать всю пластическую мощь пропорции и вспомнить, что древнегреческая культура была в своей основе

пластической (отсюда такой потрясающий взлёт в области скульптуры, архитектуры, музыки, математики). Очевидно, что пропорционирование широко применяется в различных науках, искусстве и жизни. И, самое главное, способствует духовно-нравственному воспитанию учащихся. **ШТ**

Список использованных источников:

1. Киселёв А.П. Систематический курс арифметики. М., 1915.
2. Клепиков В.Н. Метапредметный подход в современном образовании // Школьные технологии. 2020. №1.
3. Клепиков В.Н. Духовно-нравственное воспитание на уроках математики в школе // Школьные технологии. 2019. № 2.
4. Кэрролл Л. Логическая игра. М.: Наука, 1991.
5. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. Киев: Радянська школа, 1989.
6. Шевкин А.В. Текстовые задачи по математике. М.: Просвещение, 2015.

Spisok ispol'zovannykh istochnikov:

1. Kiselov A.P. Sistematischeskiy kurs arifmetiki. M., 1915.
2. Klepikov V.N. Metapredmetnyy podkhod v sovremennom obrazovanii // Shkol'nyye tekhnologii. 2020. №1.
3. Klepikov V.N. Dukhovno-nravstvennoye vospitaniye na urokakh matematiki v shkole // Shkol'nyye tekhnologii. 2019. № 2.
4. Kerroll L. Logicheskaya igra. M.: Nauka, 1991.
5. Osinskaya V.N. Formirovaniye umstvennoy kul'tury uchashchikhsya v protsesse obucheniya matematike. Kiyev: Radyans'ka shkola, 1989.
6. Shevkin A.V. Tekstovyye zadachi po matematike. M.: Prosveshcheniye, 2015.