



Учись выигрывать. Игры и стратегии с точки зрения математики

Проект выполнил:

Николай Ермаков,

4 «Б» класс, МБОУ г. Мурманска «Гимназия № 1»

Руководитель:

Ефимова Анна Владимировна,

учитель начальных классов МБОУ г. Мурманска «Гимназия № 1»

1. Введение

Я спросил у своих одноклассников, любят ли они играть, в какие игры и почему?

Все дети любят играть, и даже некоторые взрослые... А что такое игра? Это новый сюжет, новые игроки, новые друзья, споры. И самое интересное — выигрыш.

Люди придумали очень много разных игр: спортивных, подвижных, настольных, логических, математических и т.д. Эти игры бывают командные, могут быть рассчитаны на двух игроков, например нарды, шахматы, и игры, в которых могут участвовать более двух игроков, например лото. Я буду рассматривать игры, рассчитанные на двух игроков, где игроки делают ходы по очереди и обдумывают каждый ход, потому что он зависит от действий соперника (например, шашки, шахматы).

Математические науки выделили особую дисциплину — теорию игр. Эта наука занимается исследованием вопросов поведения и разработкой оптимальных правил (стратегий) поведения каждого из участников в конфликтной ситуации.

Цель: исследовать возможность прогнозирования результата игры с помощью математических методов.

Гипотеза: математические методы позволяют рассчитать выигрышные ходы в игровых задачах.

Задачи

1. Познакомиться с классификацией игровых задач.
2. Изучить новые методы решения игровых задач.
3. Моделировать ход игры с помощью Scratch — программы.

Методы исследования:

- метод интервью;
- изучение типов математических задач и обобщение способов решения;
- моделирование процесса игры в среде программирования.

Объект исследования: игровые задачи.

Предмет исследования: актуальность темы обусловлена тем, что решение игровых задач с помощью математических методов развивает способность логически мыслить, умение ориентироваться в необычных ситуациях, предвидеть и действовать.

2. Основная часть

2.1 Основные методы решения игровых задач

Игровая, стратегическая задача — это не совсем обычная математическая задача. В ней часто нет ничего числового, т.е. непонятно, что нужно решать или, точнее, что писать в решении таких задач.

В ряде задач задаются вопросы:

— Кто из двух игроков выиграет при правильной игре?

— Всегда ли выигрывает тот игрок, который начинает игру (или имеет второй ход)?

Слова «правильная игра» означают, что у кого-то из игроков есть стратегия, позволяющая выигрывать при любых ходах другого игрока, и он не делает «глупых» ходов, а стремится выиграть и следует своей выигрышной стратегией.

В каждой задаче необходимо придумать такую стратегию для одного из игроков.

Для решения игровой задачи нужно уметь правильно записать его. И эта запись зависит от того, кто выигрывает в данной игре.

Поэтому сначала рассмотрим общие правила записи решения игровых задач.

Итак, если необходимо убедиться, что выиграет первый игрок, тогда в решении игровой задачи нужно записать:

- 1) его первый ход;
- 2) алгоритм его ходов в ответ на каждый ход соперника, т.е. стратегию победы;
- 3) показать, что у него найдётся, независимо от хода соперника, возможность сделать ход, т.е. его последний ход будет победным.

Если же выиграет второй, тогда в решение нужно записать:

1) алгоритм его ходов в ответ на каждый ход соперника, т.е. стратегию победы;

2) показать, что у него найдётся, независимо от хода соперника, возможность сделать ход.

Иногда необходимо записать ещё и последний ход, который может не вписываться в общую стратегию.

Игровые задачи

Я рассмотрел следующие игры:

- игры-шутки;
- игры, в которых стратегия — дополнение до фиксированного числа;
- игры, использующие метод выигрышных позиций.

2.1.1. Игры-шутки

Игры-шутки — это такие игры, где для построения выигрышного алгоритма можно ничего и не знать, т.к. в них результат будет зависеть не от игры партнёров, а от начальных условий. Как бы кто ни ходил, либо всегда выиграет первый игрок (тот, кто начинает игру), либо всегда второй. Задача в том, чтобы математически доказать такую закономерность. Для доказательства обычно находится какая-то величина, значение которой известно в начале и конце, и понятно, как изменяется на каждом ходу. Часто число ходов до конца однозначно можно посчитать. Это величина называется инвариантом. Инвариант (от лат. *invariants* — неизменяющийся), в математике — величина, остающаяся неизменяемой при тех или иных преобразованиях.

Задача 1. Двое по очереди ломают шоколадку 5×8 . За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение

Долек *всегда* будет $5 \times 8 = 40$ штук, а шоколадка вначале была одна. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, т.е. *количество различных кусков* шоколадки увеличивается на 1. В начале это количество было равно 1, а в конце 40. Значит, игра продолжалась *ровно* 39 ходов. Поэтому последний (39-й) ход был обязательно ходом первого (его ходы — первый, третий и все с нечётными номерами) — и первый выиграл. Вот такая получилась шутка — как ни ходи, первый всегда выигрывает.

Можно решить ту же задачу в общем виде, про шоколадку $M \times N$.

Если число кусочков шоколадки чётно, тогда побеждает первый, если число нечётно, тогда второй.

Наиболее простым и часто встречающимся инвариантом является чётность числа; инвариантом может быть также и остаток от деления не только на 2, но и на какое-нибудь другое число.

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определённую кратность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую кратность, невозможны.

Задача 2. Дана шахматная доска размером 5×5 . Можно ли замостить доску плиточками домино размером 2×1 ?

Решение

Важно знать, что каждая плитка занимает одну чёрную и одну белую клетку, следовательно, количество белых и чёрных клеток должно быть равным. А так как на нашей доске размером 5×5 всего 25 клеток, значит, количество чёрных и белых клеток неравное. Следовательно, этого сделать нельзя.

Ответ: нет. И для решения подобных задач требуется «раскрасить» объекты в два цвета (обычно в чёрный и белый цвета) и сравнить количество объектов разных цветов.

2.1.2. Игры, в которых стратегия — дополнение до фиксированного числа

Другая идея выигрышной стратегии в играх — дополнение хода соперника до некоторого фиксированного числа, уменьшая каждым «совместным» ходом (т.е. ход первого и второго игрока) общее число элементов на некоторое постоянное число. Рассмотрим пример такой стратегии на конкретной задаче.

Задача 3. Двое играют в игру, которая заключается в прибавлении к нулю любого натурального числа, не превышающего девяти. Выигрывает тот, кто скажет число 50. Кто выиграет в данной игре?

Решение

Начинающий первым ходом говорит любое число от 1 до 9, второй игрок может дополнить общую сумму после 1 хода 1 игрока до 10, и при каждом следующем своём ходе будет прибавлять к сумме такое число, которое дополняет сумму до круглого числа. То есть сумма будет увеличиваться после хода первого и второго игрока ровно на 10. Первый игрок не сможет помешать второму игроку, т.к. максимальное число, которое он может прибавить к сказанному первым игроком, — это 9, а минимальное — это 1.



В этой задаче надо получить число 50, оно кратно 10. Поэтому будет выигрывать второй игрок.

Задача 4. Изменится ли ход игры, если итоговое число будет 55.

1 игрок	2 игрок
1 ... 9	10
11 ... 19	20
21 ... 29	30
31 ... 39	40
41 ... 49	50

Решение

В этом случае выиграть сможет первый игрок: сумма максимального и минимального ходов равна 10, поэтому первому игроку первым ходом надо добавить число 5, а при каждом последующем ходе дополнять ход своего соперника до 10, т.е. после ходов первого игрока будут получаться суммы 5, 15, 25, 35, 45, 55.

Итак, если число делится на 10, то выигрывает второй, если не делится, то первый. Докажем это.

Пусть у нас 0 камней. После первого хода игрока, начинающего игру, второй делает ход, после которого станет 10 камней, т.е. число камней в кучке увеличилось на 10. После каждого последующего «совместного» хода общая сумма будет равна $10 \times t$. Несложно понять, что число 50 назовёт игрок, делающий второй ход, и также понятно, что у него всегда есть возможность сделать ход.

Пусть надо дойти до числа $50t + a$, где $1 < a < 9$. Тогда начинающий первым своим ходом добавляет a камней, и остаётся добавить число $10t$, т.е. сводит игру к рассматриваемому выше случаю, где он уже второй игрок. Значит, в этом случае побеждает игрок, делающий первый ход.

2.1.3 Метод выигрышных позиций

В некоторых задачах невозможно выделить инвариант. Игроки могут ходить двумя или тремя способами. В этом случае удобно проанализировать позиции, которые могут получиться в ходе игры, и определить шансы на выигрыш каждого из игроков.

2.2 План исследования

Задача 5. Имеется одна кучка из 5 конфет. За один ход можно добавить в кучку 1 конфету или удвоить количество конфет в куче. Выигрывает тот, кто получит не менее 25 конфет. Кто выиграет?

Цель: можно разработать приложение, реализующее все варианты игры.

Методы исследования:

- 1) анализ всех возможных ситуаций игры;
- 2) построение алгоритма стратегии игры;
- 3) реализация алгоритма в среде программирования;
- 4) проведение компьютерного эксперимента.

Описание исследования

В среде программирования Scratch я создал небольшую программу, моделирующую разные варианты процесса игры. Для того чтобы научить Ваню играть, я определил выигрышные и проигрышные позиции.

25 конфет можно получить только из 24 конфет, а 26 можно получить удвоением из числа 13. Значит, игрок, перед которым окажется куча из 13 и более конфет, может выиграть, удвоив число конфет. Это будут выигрышные позиции. Если перед игроком окажется 12 конфет, то он сможет получить или 13 конфет, или 24, тогда его соперник получает возможность сделать выигрышный ход, значит, позиция 12 — проигрышная.

Из позиции 11 конфет ходом $+1$ и из позиции 6 ходом $\times 2$ игрок может отправить своего соперника в проигрышную позицию 12, и значит, позиции 6 и 11 — выигрышные.

Из позиции 10 конфет игрок может получить или 11 конфет, или 20 конфет. Обе эти позиции будут выигрышными для соперника, значит, позиция 10 — проигрышная. Позиция 9 позволяет игроку, который делает ход из этой позиции, отправить соперника в проигрышную позицию 10.

Позиции 7 и 8 можно не рассматривать, т.к. из начальной кучки 5 конфет можно получить 6 конфет — и в этом случае выиграть может соперник, или 10 конфет, и эта позиция будет проигрышной для соперника. Таким образом, я разбил все позиции на выигрышные и проигрышные (рис. 1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Рис. 1. Схема выигрышных и проигрышных позиций

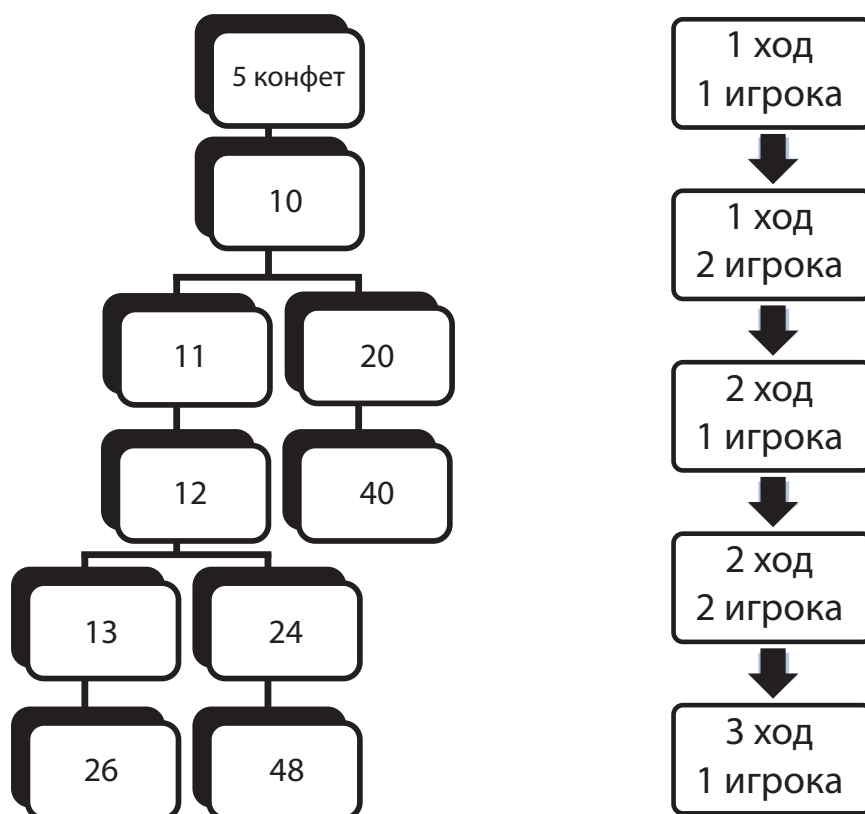


Рис. 2. Дерево игры

Я построил дерево игры (рис. 2) и разработал программу (приложение 1).

Сделал вывод, что при начальном количестве конфет 5 выигрышная стратегия есть у первого игрока — первым ходом он должен получить число 10. Далее после любого хода второго игрока (11 или 20 конфет) удваивает количество конфет и выигрывает. Второй игрок может выиграть при первом неудачном ходе соперника в позицию 6.

Стратегия победителя заключается в том, что он делает ход на «выигрышные» поля. Так как первый может сделать ход на «выигрышное» поле, а хода с одного «выигрышного» поля на другое нет, и с любого «проигрышного» поля за один ход можно попасть на «выигрышное», то побеждает начинающий.

3. Заключение

В своей работе я познакомился с разными игровыми задачами, изучил математические методы решения игровых задач, построил модель игры с помощью среды программирования Scratch.

Я убедился, что с помощью математических и логических приёмов можно построить разные варианты хода игры, определить возможность выигрыша.

Игровые задачи являются одним из самых мощных инструментов развития человеческого интеллекта. Человек в течение всей жизни может оказаться не один раз в затруднительном положении, и ему надо с помощью логических рассуждений предусмотреть разные варианты решения этой задачи, чтобы найти самый лучший выход. Решение нестандартных занимательных задач развивает способность логически мыслить, умение ориентироваться в необычных ситуациях, предвидеть и действовать. 🎮

Литература

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.
2. Гусев В.А., Орлов И.А., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. М.: Просвещение, 1984.
2. Петров Н.Н. Математические игры. Ижевск: УдГУ, (1 изд.) 1994.
4. Гарднер. Математические чудеса и тайны. 1985 г.
5. Шень А. 347 Игры и стратегии с точки зрения математики. 2-е изд., стереотипное. М.: МЦНМО, 2008. 40 с.: ил.



Программа игры

