

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПОРНЫХ ЗАДАЧ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Засядко Ольга Владимировна,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета

Косярский Александр Алексеевич,

педагог дополнительного образования, МАОУ ДО Центр детского творчества «Прикубанский», г. Краснодар

Протченко Надежда Николаевна,

студентка 2 курса магистратуры Кубанского государственного университета

В СТАТЬЕ РАССМОТРЕНЫ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КЛЮЧЕВЫХ (ОПОРНЫХ) ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ, А ТАКЖЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОДБОРА ОПОРНЫХ ЗАДАЧ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИХ ПРИМЕНЕНИЮ. АВТОРАМИ ПРИВЕДЕНА КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПОВ ОПОРНЫХ ЗАДАЧ, А ТАКЖЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ МЕТОДЫ ОТБОРА ТАКОГО РОДА ЗАДАЧ ПО ИЗУЧЕННОЙ ТЕМЕ. ТАКЖЕ АВТОРАМИ РАССМАТРИВАЕТСЯ КОНКРЕТНЫЙ ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, НА ОСНОВАНИИ ЗАМЕЧАНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ КОНКРЕТНОЙ КЛЮЧЕВОЙ ЗАДАЧИ.

• геометрия • школьный • курс математики • опорные задачи

Одно из важнейших мест в школьном курсе математики по праву занимают математические задачи. Каждая задача имеет определенное содержание и различные подходы к её решению, а также характеризуется дидактическими целями и ролью в формировании у учащихся устойчивой системы знаний, умений и навыков.

Важно понимать, что задачи в процессе обучения математике выступают одновременно и как цель, и как средство. При этом место и функции задач в процессе обучения математике определяются целями самого процесса обучения и принимают одно из 3 значений, представленных на рисунке 1.

Образовательное значение задачи состоит в первую очередь в формировании обширного математического аппарата, содержащего способы, методы и алгоритмы решения тех или иных групп задач. В результате формирования такого аппарата одновременно происходит выполнение требований, установленных рабочей программой и образовательными стандартами в части предметных умений и навыков.

Практическое значение задачи состоит в формировании навыка применения полученных теоретических знаний при решении повседневных задач. Так, например, низкий уровень навыка решения математических задач, в совокупности со слабо развитым логическим и алгоритмическим мышлением приводит к невозможности выполнения правильных конструкторских и иных расчетов.



Рис. 1. Значения задач

Воспитательное значение задач обеспечивается посредством построения грамотной, продуманной системы математических задач, ориентированных на развитие логического, творческого мышления, а также познавательного интереса. Особое место в таких системах занимают межпредметные задачи, позволяющие показывать не только взаимосвязь между разными дисциплинами школьного курса [6], но и формировать конкретные прикладные навыки.

Пример 1. На платформах AB и CD (в точках B и D) стоит по одному игроку. На землю (линия AC) брошен мяч. На каком удалении от платформ он должен упасть, чтобы оба игрока достигли его одновременно. Скорость движения игроков считать одинаковой.

Решение. На рисунке 1а представлено геометрическое решение поставленной задачи.

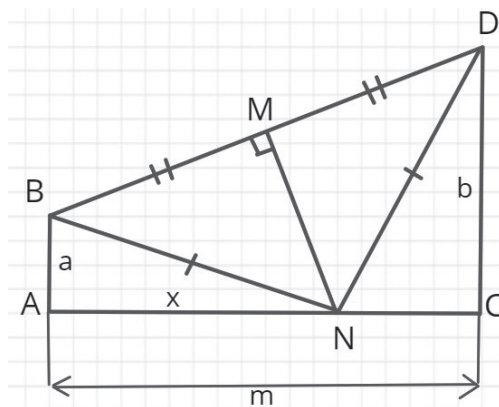


Рис. 1а. Геометрическое решение задачи

Образовательное значение задачи состоит в том, что она может быть использована при изучении темы «серединный перпендикуляр».

Соединим точки B и D построим серединный перпендикуляр к отрезку BD . Точка пересечения серединного перпендикуляра к AC обозначим точкой N .

Воспитательное значение задачи состоит постановке перед учащимися вопроса: «Всегда ли данная задача имеет решение?». Учащиеся, используя логическое мышление, найти обоснование для ответа на поставленный вопрос.

Пусть $AB = a$, $CD = b$, $AC = m$, а $AN = x$. По теореме Пифагора, учитывая, что имеем:

$$x = \frac{b^2 - a^2 + m^2}{2m} \quad (1)$$

Практическое значение задачи состоит в её возможной прикладной интерпретации. Предположим, имеется два жилых дома, необходимо определить оптимальное место расположение детского сада, чтобы расстояние от ближайших домов (точки B и D) было одинаковым.

К сожалению, большинство современных школьных учебников хоть и содержат большое число практических задач, но они как правило однотипны, т.е. отличаются либо числовыми значениями, либо буквенными обозначениями. Решение такого рода задач не позволяет учащимся установить взаимосвязь между теорией (теоремы, аксиомы, леммы) и практикой (способы и методы решения геометрических задач), что приводит к неспособности решения обучающимися задач более высокого уровня сложности. Такое недостаточное методическое обеспечение в свою очередь крайне негативно сказывается не только на качестве математического образования в целом, но и в первую очередь не позволяет учащимся полноценно развивать логическое и творческое мышление.

Следовательно, можно сделать вывод о необходимости включения в школьный курс комплексов математических заданий и упражнений в совокупности с методами преподавания, ориентированных на развитие у обучающихся активной мыслительной деятельности, креативности и навыка математического обобщения[1].

В качестве примера такого комплекса можно рассматривать некоторую систему ключевых задач, отражающих те или иные теоретические вопросы. Такая целостная система взаимосвязанных задач позволяет сформировать у обучающихся наиболее полное представление о теоретическом и практическом аппаратах геометрии, а также выявить их взаимосвязь. Ведущей целью этой системы в процессе обучения геометрии, на наш взгляд, является не только повторение и систематизация знаний, но и формирование аналитического, творческого мышления.

Грамотно выстроенная работа с данной системой позволяет учащимся не только своевременно повторять пройденный ранее материал, тем самым закрепляя его, но и обобщать полученные ранее знания с опорой на новые, в конечном итоге систематизируя все полученные знания в виде единого практико-теоретического аппарата, включающего в себя базовые приемы решения основных типов задач.

Еще одним важным преимуществом системы опорных задач является возможность дифференцирования работы обучающихся. Данный вывод строится в первую очередь на том факте, что овладение умением решать ключевые (опорные) задачи гарантирует выполнение требований, установленных рабочей программой, по отношению к уровню сформированных знаний и умений. При этом нужно отметить, что учащиеся, которые интересуются математикой, используя эти задачи и опираясь на выявленные в них закономерности, свободно переходят к следующему качественному этапу работы с математическими задачами.

Рассмотрим пример такого дифференцирования на примере конкретной системы опорных задач.

Учащимся даётся следующее утверждение: «Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника». После чего для решения предлагается 5 разноуровневых задач.

Задача 1. Дан параллелограмм $MFKL$, точка T середина MF , а N середина FK . Зная, что $S_{TFNL} = S$, найдите S_{MFKL} .

Задача 2. В произвольного четырехугольнике проведены отрезки, соединяющие середины сторон этого многоугольника. Зная площади трех из полученных четырехугольников, найдите площадь четвертого.

Задача 3. Середины двух параллельных сторон параллелограмма соединены с противолежащими вершинами. Какая часть площади параллелограмма ограничена проведенными отрезками?

Задача 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Середины сторон AB и CD обозначены точками K и M , точка пересечения BM и CK обозначена точкой P , а O — точка пересечения AM и DK . Докажите, что $S_{MOKP} = S_{BPC} + S_{AOD}$.

Задача 5. На продолжении сторон треугольника ABC построены отрезки $AA_1 = AC$, $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} = 7S_{ABC}$.

Поскольку задачи имеют различный уровень, их можно распределить между более сильными и слабыми учащимися. При этом для более слабых учащихся имеется возможность постепенного наращивания сложности решаемых задач, что позитивно сказывается на развитии предметных знаний, умений и навыков.

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных примеров конструирования опорных задач, необходимо их классифицировать. Но для того, чтобы это сделать, выделим основные компоненты любой задачи (рисунок 2).

Ю.М. Колягин [6] по величине проблемности выделяет типы задач, представленные на рисунке 3.

Также задачи можно разделить по иным основам для классификации:

По числу объектов в условии задачи и связей между ними:

- простые;
- сложные.

По компонентам учебной деятельности:

- организационно-действенные;
- стимулирующие;
- контрольно-оценочные.

Классификаций геометрических задач много, поэтому для удобства представим их в виде схемы (рисунок 4).

Остановимся более подробно на рассмотрении задач по величине проблемности, а именно опорных задач. Опорная (ключевая) задача — это задача, идея решения которой применяется при решении других задач темы.

Приведем пример опорной задачи и стандартной задачи школьного курса.

Пример опорной задачи. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая сторону AD в точке E . Докажите, что прямая CE разбивает четырёхугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

При решении данной задачи учащиеся приходят к формулировке следующего факта: если два треугольника имеют равный угол, то отношение площадей данных треугольников равно отношению произведений длин их сторон, заключающий этот угол. Полученный факт применим при решении следующей классической задачи.

Пример классической задачи. Точки K , M , T расположены соответственно на AB , BC и AC на сторонах треугольника. Причем $AK:KB = BM:MC = CT:TA = 2:5$ (рисунок 4а). Найдите площадь ABC треугольника, если $S_{KMT} = 38$.



Рис. 2. Основные компоненты задачи

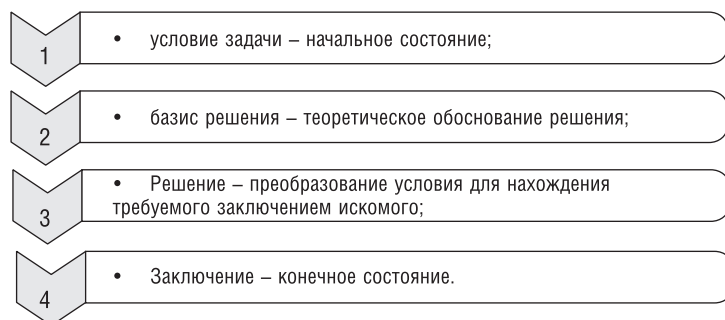


Рис. 3. Классификация задач по величине проблемности

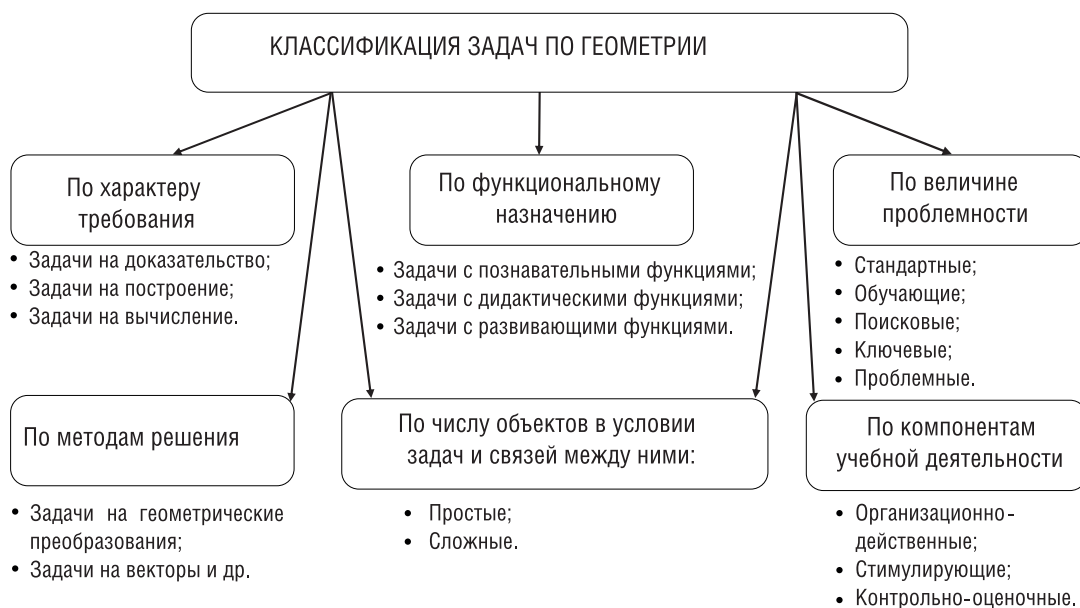


Рис. 4. Классификация задач по геометрии

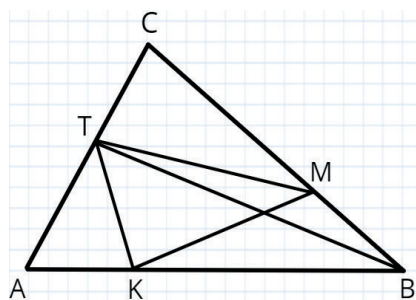


Рисунок 4а. Рисунок к задаче

Метод ключевой (опорной) задачи И.Ф. Шарыгина — это такой метод составления системы задач, при котором последние подбираются по следующему принципу: при решении каждой задачи используется результат решения одной какой-либо задачи (в некоторых случаях несколько взаимосвязанных задач) — опорной для этой системы.

Выделяют две точки зрения на понятие опорных задач (Рисунок 5):

Задача-факт — это задача, в которой формулируется определенный факт (формула или утверждение), который часто встречается в других задачах. Зачастую такая опорная задача оказывается дополнительной теоремой школьного курса геометрии.

Например: «В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой».

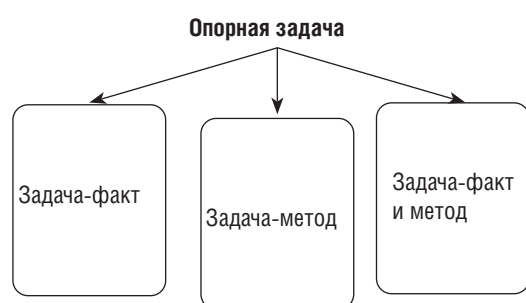


Рис. 5. Опорные задачи

Вторая точка зрения состоит в рассмотрении опорной задачи как задачи-метода. Примером такой опорной задачи может быть решение задачи методом дополнительного построения. Правильное построение дополнительных элементов в исходном рисунке, значительно упрощают решение задачи. Задача нахождения медианы треугольника по его

сторонам — классический пример решения задач на построение. При этом необходимо отметить, что на практике часто встречаются комбинации этих двух точек зрения, в результате чего имеют место задачи типа «Задача-факт и метод».

Важно заметить, что отбирать опорные задачи можно различными способами, кроме того, возможно построение различных систем опорных задач, отражающих уровень подготовки класса или конкретных обучающихся.

Среди таких методов можно выделить следующие:

Метод ориентации на умения, которые должны быть сформированы у обучающихся

Задачи отбираются таким образом, что их число было от 3 до 6 и они отражали все умения, которые планируется сформировать в рамках данной темы. Существенно, чтобы наиболее сложные умения должны быть задействованы не в одной, а в нескольких задачах.

Критерии выбора опорных задач:

- Соответствие программе по данной теме;
- Степень использования при изучении последующих тем;
- Затраты времени по обучению учащихся решению задач;
- Оптимальность алгоритмов решения задач;
- Возможность поразить учащихся красотой решения.

Метод исключения и дополнения

Для его реализации обращаемся к задачам из учебника. Читаем первую задачу — она первый кандидат на включение в систему опорных задач. Переходим к следующей задаче. Здесь возможно несколько вариантов:

1. Она аналогична первой. В этом случае сравниваем первую и вторую. Учителю предстоит решить, оставить в списке возможных кандидатов первую или вторую (единого рецепта нет и не должно быть, решать учителю).
2. Она существенно отличается от первой и не включает первую. В этом случае эту задачу следует добавить к возможным кандидатам.
3. Вторая задача отличается от первой, но включает в себя первую. Чаще всего это означает, что

первую следует исключить, а вторую включить в число возможных кандидатов.

Комбинаторный метод

Для его реализации следует выделить объекты, которые фигурируют в задачах той или иной темы, рассмотреть возможные комбинации этих объектов, а потом для наиболее важных комбинаций подобрать задачу.

Итак, отобраны опорные задачи и найдены многие, основанные на различных идеях методы решения. На данном этапе подготовки урока учителю важно выбрать те решения опорных задач, которые будут использованы при работе с классом. Предпочтение отдается тем методам, которые применимы к более широкому множеству задач.

Теперь следует определить последовательность опорных задач, в которой задачи будут разбираться на уроке. При этом следует учитывать следующие рекомендации:

1. Начинать лучше всего с самых простых опорных задач.
2. Задачи, при решении которых приходится выходить за рамки школьной программы, которые наиболее удалены от обязательных результатов обучения, лучше всего разбирать в конце урока.
3. Если при решении какой-либо опорной задачи может быть использована другая ключевая задача (или метод ее решения), то эта задача должна разбираться ранее (в этом случае учащиеся тренируются в распознавании и применении ключевых задач).
4. Самые красивые и яркие задачи лучше отнести на вторую часть урока, чтобы под влиянием работы с ними ученики преодолели естественную усталость.
5. Желательно чередовать задачи, требующие обширных записей, с теми, которые не предполагают громоздких письменных обоснований.
6. Те опорные задачи, которые как-то связаны с предыдущей темой, лучше включить в число первых, а активно используемые в последующих темах желательно разбирать позднее.

Рассмотрим пример системы опорных задач по теме «Медиана треугольника и её свойства». В рамках данной системы учащимся предлагается изучить необходимый теоретический материал и провести доказательство представленных утверждений, по-

сле чего с опорой на полученные выкладки, решить конкретные геометрические задачи.

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Любой треугольник имеет три медианы (Рисунок 6). AM, BK, CN . медианы $\triangle ABC$

Утверждение №1. Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

Доказательство: рассмотрим $\triangle ABC$, представленный на рисунке 7:

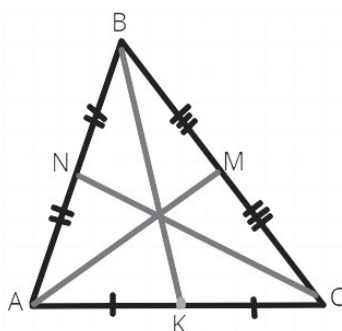


Рис. 6. Медианы треугольника

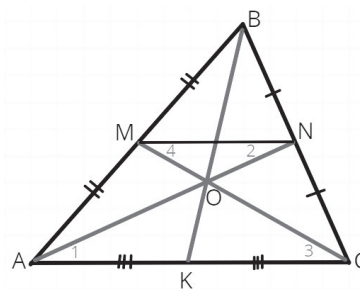


Рис. 7. Утверждение 1

CM — медиана $\Rightarrow AM = MB$; BK — медиана $\Rightarrow AK = KC$; AN — медиана $\Rightarrow CN = NB$. MN — средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$

$$\text{Т.к. } MN \parallel AC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array} \right\}$$

$$\triangle AOC \sim \triangle NOM \Rightarrow \frac{AO}{NO} = \frac{CO}{MO} = \frac{AC}{NM} = \frac{2}{1}$$

Аналогично точка медиан CM и BK делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O .

Отсюда следует, что

$$AO:ON = 2:1; CO:OM = 2:1; BO:OK = 2:1 \quad (1)$$

Что и требовалось доказать. ▀

Утверждение № 2. Медиана делит треугольник на два треугольника с равными площадями.

Доказательство:

Пусть BD — медиана $\triangle ABC$, тогда $AD = DC$. Проведем высоту BH к стороне AC .

► Рассмотрим (Рисунок 8).

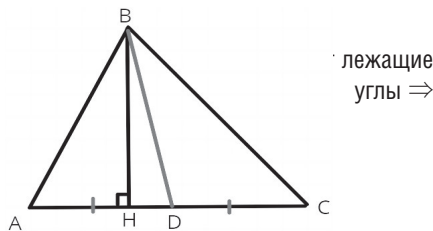


Рис. 8. Утверждение 2

Тогда $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$ (2) и $S_{BDC} = \frac{1}{2}DC \cdot BH$ (3). Т.к. $AD = DC$, то $S_{ABD} = S_{BDC}$, т.е. $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$ равновеликие. Значит, медиана BD $\triangle ABC$ разбивает его на два равновеликих треугольника ABD и BDC . ▀

Утверждение 3. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников и $S_{ABC} = 3S_{AOB} = 3S_{BOC} = 3S_{COA}$.

Доказательство:

Пусть BK, CM, AN — медианы $\triangle ABC$, которые пересекаются в точке O (Рисунок 9). Получим $\triangle AOB, \triangle AOC, \triangle BOC$. Пусть их площади равны соответственно S_1, S_2, S_3 . А площадь $\triangle ABC$ равна S .

► Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle CBK$ — они равной площади, т. к. BK — медиана.

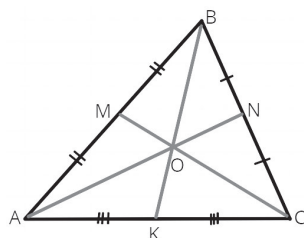


Рис. 9. Утверждение 3

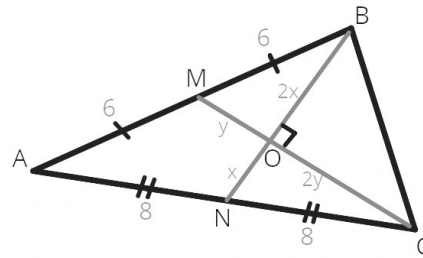


Рис. 10. Задача №1

В $\triangle AOC$ OK — медиана, значит $S_{AOK} = S_{COK}$. Отсюда следует, что $S_2 = S_3$, $S_3 = S_1$ (4). Т.е. $S_{ABC} = 3S_{AOB} = 3S_{BOC} = 3S_{COA}$ (5)

Обозначим площади $\triangle MOB, \triangle BON, \triangle NOC, \triangle COK, \triangle KOA$ и $\triangle AOM$ соответственно $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Т.к. площади $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle AOC$ равны и площади $\triangle AOM, \triangle BOM$ равны, значит $S_1 = S_6$. Аналогично $S_2 = S_3$.

Если $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$ и $2S_2 = 2S_1$, значит $S_2 = S_1$. И так далее. Получим, что все шесть треугольников имеют равные площади, и они составляют шестую часть от площади $\triangle ABC$. ▀

Задача №1. Две стороны треугольника соответственно равны 12 и 16. Медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника (Рисунок 10).

Решение:

Пусть $AB = 12$, $AC = 16$. Тогда медианы CM и BN перпендикулярны и пересекаются в точке O . $S_{ABC} = 3S_{BOC}$, $S_{BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC$ так как $\triangle BOC$ — прямоугольный.

По ключевой задаче: если $BN = x$, то $OB = 2x$; если $OB = 2x$, то $OC = 2y$. Треугольники BOM и CON прямоугольные и по теореме Пифагора:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 64 \\ 4x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{11}}{3}$$

Т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle BOC$ имеют общее основание BC ,

а высота треугольника ABC, проведенная к стороне BC, в 3 раза больше соответствующей высоты треугольника BOC,

$$\text{то } S_{\triangle ABC} = 3 \cdot S_{\triangle BOC}.$$

$$\text{Тогда, } S_{ABC} = 3 \cdot \frac{16\sqrt{11}}{3} = 16\sqrt{11}$$

Ответ: $16\sqrt{11}$

Задача №2. Медианы треугольника 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC$ (Рисунок 11):

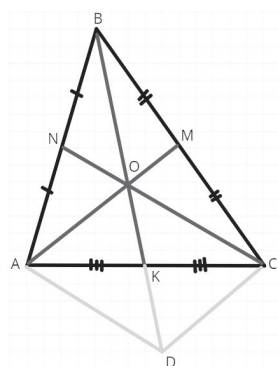


Рис. 1 — Задача №2

AM, BK, CN — медианы.

Пусть $AM = 3$, $BK = 4$, $CN = 5$.

Тогда по ключевой задаче

$$AO = 2, \quad BO = \frac{10}{3}, \quad CO = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad S_{\triangle ABC} = 3 \cdot S_{\triangle AOC}.$$

Достроим $\triangle AOC$ до параллелограмма, отложив на прямой BK от точки K отрезок KD равный KO.

$$\begin{aligned} \text{Тогда, } S_{AOC} &= 3S_{AOD} = \frac{1}{2}S_{A OCD}, S_{AOD} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 2 \cdot \left(4 - \frac{10}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right)} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Следовательно, $S_{ABC} = 8$

Ответ: 8

Таким образом, опорные задачи выступают в качестве мощного метода для повышения качества математического образования, позволяют сформировать у обучающихся логическое и творческое мышление. Методика подбора и использования опорных задач на уроках обладает гибкостью и может быть адаптирована под любой класс и даже под конкретного учащегося, что является несомненным плюсом. ■■

Литература

1. Астреб А.М. Почему трудно решать геометрические задачи на вычисление // Математика в школе. 2009. №5. 58–64 С
2. Атанасян Л.С. Геометрия 7–9 кл: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. — М.: Просвещение, 2010. — 386 С
3. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия 7–9 классы. — С.: МЦНМО, 2006. — 416 С.
4. Зильберберг, Н.И. Ключевые задачи в обучении математике / Н.И. Зильберберг, Р.Г. Хазанкин. — М.: Мир, 1984. — 179 С
5. Ковалева Г.И. Итоговое повторение курса планиметрии с привлечением метода ключевой задачи // Математика в школе. 2008. №8. 26–33 С
6. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе / Ю.М. Колягин. — М.: Мир, 1980. — 375 С
7. Лепехина Т.А. Геометрия 7–9 кл: опорные конспекты. Ключевые задачи / Т.А. Лепехина. — Волгоград: Учитель, 2020. — 154 С
8. Погорелов А.В. Геометрия 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / .В. Погорелов. — М.: Просвещение, 2014. — 240 С
9. Потаскуев Е.В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС / Е.В. Потаскуев. — М.: Экзамен, 2017. — 223 С
10. Смирнова Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решений: Элективный курс для учащихся 9–11 классов. — М.: МЦНМО, 2016. — 416 С
11. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7–9 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. — М.: Дрофа, 2012. — 462 С
12. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учеб. пособие / И.Ф. Шарыгин. — М.: Дрофа, 2006. 201–203 С