

ОБ ЭМПИРИЧЕСКОМ КОМПОНЕНТЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

С.Р. Коголовский

ИССЛЕДУЕТСЯ ВОПРОС О МЕТОДАХ РАЗВИТИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ПОСРЕДСТВОМ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ. ПОКАЗЫВАЕТСЯ СУЩЕСТВЕННАЯ РОЛЬ ЭМПИРИЧЕСКОГО КОМПОНЕНТА В РАБОТЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ. ПОКАЗЫВАЕТСЯ ПРЕОБРАЖАЮЩАЯ РОЛЬ ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКИХ СРЕДСТВ. РАССМАТРИВАЕТСЯ ПРИМЕР ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ. В КАКОЙ МЕРЕ МОГЛА БЫ СООТВЕТСТВОВАТЬ СЕГОДНЯШНИМ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ СТАНДАРТАМ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ, ОТВЕЧАЮЩАЯ ВЕДУЩЕЙ РОЛИ ПРИНЦИПА ОТ ОБЩЕГО К ЧАСТНОМУ И НИЗВЕДЕНИЮ РОЛИ ПРИНЦИПА ОТ ЧАСТНОГО К ОБЩЕМУ ДО РОЛИ ПРИЕМА КАК НАПРАВЛЕННЫХ НА ПРЯМОЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ? ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ЛИ ТРАДИЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАЛО СПОСОБСТВУЕТ РАЗВИТИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ? ВОЗМОЖНО ЛИ РАЗВИТИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ БЕЗ РАЗВИТИЯ ИХ ЭМПИРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ? НАСТОЯЩАЯ РАБОТА ПОСВЯЩЕНА НАЧАЛЬНОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ЭТИХ ВОПРОСОВ ПРИМЕНительно К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ. ТАКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОПРАВДАНО УЖЕ ТЕМ, ЧТО ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКИ, САМА ЕЕ ПРИРОДА НЕСЕТ ОСОБЫЙ ХАРАКТЕР ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЭМПИРИЧЕСКОГО И ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ КАК В НАУЧНОЙ, ТАК И В УЧЕБНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.

- обучение математике • развивающее обучение • теоретическое мышление • эмпирическое мышление
- метапредметность • компоненты теоретического мышления • преобразующая роль формальной логики

Среди классов задач, рассматриваемых в курсе математики старшей школы, не так уж много таких, для которых существуют общие методы решения *всех* относящихся к ним задач. Намного больше таких классов, для которых существуют широко применимые методы решения относящихся к ним задач. К тому же никакие методы не создают возможности лобового движения от общего к частному скрытому. Не существуют лобовые пути освоения общих методов. Процесс освоения метода — это процесс накопления опыта его использования в разнообразных, и, не в последнюю очередь, в «нестандартных» ситуациях, это процесс наращивания опыта поиска возможностей его использования. Это процесс развития форм его использования посредством осуществления многосторонних взаимодействий общего с частным, с особенным, с единичным, с уникальным. И потому это процесс широкого использования принципа *от частного к общему*, а значит, использующий эмпирическое, или рассудочное, мышление.

Попыткой применения какого-либо общего метода к решению некоторой задачи, вообще говоря, задаются лишь возможные направления поиска ее решения как частного по отношению к этому

методу. И потому применение принципа *от общего к частному* отнюдь не исключает трудностей. Оно может нуждаться в поисковой деятельности (хоть при этом и помогать ей). Способность к использованию принципа *от общего к частному* формируется посредством решения разнообразных задач. Освоение этого принципа возможно только посредством развития эмпирического мышления¹. Отсюда ясно, что освоение общего метода как содержательного обобщения в смысле В.В. Давыдова [4, с. 66], то есть как полученного в форме решения подходящей *учебной задачи*, может не нести ни укорочения, ни какого-либо упрощения пути его освоения. Более того, такой путь его освоения может быть более сложным и менее продуктивным, чем путь, начинающийся с его открытия эмпирическими средствами. Так, изучаемые в школе комбинаторные понятия и формулы легко вводятся в форме содержательных обобщений. А это вынуждает использование теоретико-множественного языка, позволяющего придать им более общую, более строгую и более компактную форму.

¹ Уже отсюда ясно, что формирование продуктивных форм взаимодействий эмпирического и теоретического мышления должно быть важным предметом педагогики.

Школьники легко воспринимают их (сами по себе) в теоретико-множественной форме, но многие из них при этом испытывают трудности при решении даже таких задач, которые решаются прямым применением известных им комбинаторных формул. Причина этого в том, что теоретико-множественная форма комбинаторных понятий и теорем формируется «скрытием» процедурного плана, «скрытием» тактик внимания и способов действий. Общая форма является результатом абстрагирования от них. Теоретико-множественная форма выражения комбинаторных методов и принципов — результат радикального абстрагирования от тактик внимания и способов действий, относящихся к комбинаторной деятельности. А значит, и при достаточно высоком уровне освоенности комбинаторики сохраняется необходимость обращения к схемам-посредникам, действиям-образцам и иным мостам между живым комбинаторным содержанием и теоретико-множественной формой. Проясним сказанное на примерах.

Задача А. (см.[2, с. 34]): Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы никакая из них не могла быть сбита какой-нибудь другой?

При каждом таком расположении в каждой (горизонтальной) строке может располагаться не более одной ладьи. А так как ладей 8, то в каждой строке должна находиться в точности одна ладья. (То же верно и для каждого столбца). А значит, каждый способ расположений 8 ладей, удовлетворяющий условию задачи, представим таблицей вида

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_8, \end{array}$$

где a_i — номер клетки i -ой строки, занимаемой ладьей.

Ясно, что вместо такой таблицы можно рассматривать только вторую ее строку. Членами каждой такой строки являются попарно различные цифры из первой строки. Иначе говоря, каждая такая строка является перестановкой из цифр 1, 2, 3, ..., 8. Верно и обратное: всякая перестановка из этих цифр представляет требуемого вида взаиморасположение ладей. Следовательно, количество таких расположений равно 8!

Какие явные и неявные средства использует учащийся, решая эту и подобные ей задачи? Нередко он начинает с (эмпирических) шагов-проб. Осознавая затруднительность пересчета требуемых расположений, он обращается к поиску работоспособных в заданной ситуации теоретических средств, содер-

жательных обобщений. Уже имеющийся первичный опыт решения комбинаторных задач позволяет усмотреть комбинаторный характер этой задачи. И потому естественно в качестве подходящего (среди уже освоенных) содержательного обобщения пытаться использовать комбинаторное правило умножения (или легко выводимые из него формулы, например, формулу для числа размещений).

Частный по отношению к правилу умножения (или к названной формуле) характер задачи не проявлен настолько, чтобы оставалось лишь непосредственно применить это правило (или подходящее следствие из него). В такой ситуации прямое применение принципа *от общего к частному* невозможно и потому естественен поиск средства, ведущего к проявленности частного характера задачи по отношению к правилу умножения (точнее говоря, поиск средства преобразования задачи в явно частную по отношению к этому содержательному обобщению). Такое средство ищется как представление условий задачи в подходящей знаковой форме, а представление искомого — как относящегося к этой знаковой форме. Успешность поиска такой формы и ее возможного упрощения обеспечивается опытом решения подобных задач, а значит, опытом работы эмпирического мышления. В немалой степени ей способствуют осуществленные пробы, с которых учащийся начинает.

Таким образом, общая стратегия поиска решения подобных задач состоит в поисках и испытаниях тех или иных освоенных содержательных обобщений и отвечающих им форм моделирования задач. Обращения к таким задачам помогают понять, что *полнокровное освоение содержательного обобщения, несущее возможность его широкого использования применением принципа от общего к частному не может не предполагать широкого использования принципа от частного к общему, а значит, развития эмпирического мышления.*

И не говорит ли все это о том, насколько кричаще ложным является укоренившийся термин «нестандартная задача»? Не говорит ли это о том, что «нестандартные» задачи должны быть не просто необходимым, но стандартным средством освоения содержательных обобщений, стандартным средством обучения?

Но к этому естественно добавить, что освоение содержательного обобщения — это процесс, не могущий осуществляться без рутинной работы, направленной на овладение новыми формами деятельности (в частности, знаковой деятельности), на развитие координации действий и приводящей к кристаллизации «стандартных блоков» операций

и действий и их свертыванию, к превращению их в элементарные действия, что приводит к развитию «дальновидения» и «дальнодействия» мышления и тем способствует овладению более сложными и более масштабными формами поисково-исследовательской деятельности. (Такие средства широко используются при традиционном обучении математике). Все это рождается как результат «критической массы» количества и разнообразия упражнений и задач, разнообразия их уровней. А значит, «лобовые», «линейные» методы развития как эмпирического, так и теоретического, или разумного, мышления учащихся не продуктивны.

Задача В. Сколько имеется отображений n -элементного множества в k -элементное?

Если ситуация, рассматриваемая в этой задаче, и является частной по отношению к правилу умножения, то ее частный характер скрыт. Поэтому приходится начинать не с применения принципа от общего к частному, а с поиска средства сведения задачи к правилу умножения (так как эта задача также имеет комбинаторный характер).

Как и в случае задачи **А** такое средство будем искать в виде способа кодирования отображений, делающего удобным рассмотрение совокупности кодов всех отображений как целого. Пусть $A = \{a, b, \dots, c\}$ — n -элементное, а B — k -элементное множество. Всякое отображение A в B может быть задано таблицей

$$a \ b \ \dots \ c$$

$$u \ v \ \dots \ w,$$

где u — элемент B , в который отображается элемент a , v — элемент B , в который отображается элемент b , и т.д.

Удобно занумеровать элементы A и элементы B и задавать отображения A в B таблицами вида

$$1 \ 2 \ \dots \ n$$

$$b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n,$$

где b_1 — номер элемента B , в который отображается элемент A с номером 1, b_2 — номер элемента B , в который отображается элемент A с номером 2, и т.д.

Всякая такая таблица взаимноопределима с кортежем $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$. Все такие кортежи образуют n -ю декартову степень множества $\{1, 2, \dots, k\}$, или, что то же, множество всевозможных кортежей длины n , члены которых принадлежат последнему множеству. Согласно правилу умножения их количество равно k^n . Столько же отображений A в B .

Для осуществления возможности использования принципа *от общего к частному* здесь пришлось осуществить последовательность из трех сведений. Если первые два из них подсказываются уже только опытом, обретенным при решении задачи **А**, то третье является продуктом креативного мышления.

Решения рассмотренных задач при всей простоте и при всей естественности их решений не очень отвечают форме учебной деятельности в смысле [4]. Отход от этой формы состоит в том, что эти решения не являются продуктами прямого применения соответствующих содержательных обобщений. Возможности прямого их применения открываются посредством преобразований рассматриваемых ситуаций, характеризуемых сочетанием общего и особенного, в такие, в которых особенное «снимается», то есть в которых общее становится представленным в «чистом» виде.

Задача С. Найти количество всех 17-членных возрастающих последовательностей, членами которых являются числа множества $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$.

— Несложно подсчитать количество возрастающих двучленных последовательностей с членами из M : всего имеется 19 таких последовательностей с первым членом 1, 18 — с первым членом 2, 17 — с первым членом 3, ..., 2 — с первым членом 18 и 1 — с первым членом 19. Таким образом, имеется $19+18+17+\dots+2+1$, то есть 190 таких последовательностей.

— Более трудоемким является подсчет трехчленных возрастающих последовательностей с членами из M . Такие последовательности со вторым членом 2 — это последовательности вида $(1, 2, n)$. Таких последовательностей 18. У последовательностей со вторым членом 3 первым членом может быть 1 или 2, а третьим всякое число из M , большее 3. Используя правило умножения, находим, что таких последовательностей 217. Аналогично находим, что имеется 316 последовательностей со вторым членом 4, 415 — со вторым членом 5, ..., 181 — со вторым членом 19. Таким образом, всего имеется $1 \cdot 18 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 16 + \dots + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 1$ трехчленных возрастающих последовательностей с членами из M . Еще более трудоемким является подсчет четырехчленных возрастающих последовательностей с членами из M и т.д.

— А ведь каждая возрастающая последовательность взаимноопределима с множеством ее членов. А значит, искомое количество последовательностей равно количеству 17-элементных подмножеств множества M , то есть числу сочетаний из 20 по 17. Последнее равно числу сочетаний из 20 по 3, то есть $20 \cdot 19 \cdot 18 / 6$, или 1140.

— А значит, $1 \cdot 18 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 16 + \dots + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 1 = 1140$.

Общей чертой решений всех трех рассмотренных задач является моделирование рассматриваемых в них комбинаторных объектов, превращающее каждую из этих задач в явно частную по отношению к используемому содержательному обобщению. Точнее говоря, моделирование является средством сведения исходной задачи к задаче, относящейся к иным объектам и являющейся явно частной по отношению к используемому содержательному обобщению. И потому лишь с большей или меньшей натяжкой можно утверждать, что решения этих задач основывались на использовании принципа от общего к частному.

При всей отмеченной общности решение задачи С существенно отличается от решений задач А и В тем, что моделями комбинаторных объектов, рассматриваемых в ней, являются комбинаторные объекты иного характера, иной «природы». Тем самым решение задачи С использует более радикальное сведение.

Задача D. Верно ли, что произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на $k!$?

— Надо доказать, что для всякого натурального n произведение $n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)$ делится на $k!$. Для значений k , равных 2, 3, 4 и 5, это так. Похоже, что ответ на поставленный вопрос положителен. Естественно попытаться это доказать использованием метода математической индукции.

— Такие попытки нами предпринимались, но ни к чему не привели. Может быть, ответ на поставленный вопрос отрицателен?

— Итак, верно ли, что частное от деления $n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)$ на $k!$ есть целое число?

— Но ведь это частное есть число сочетаний из $n+k-1$ по k , то есть число k -элементных подмножеств у $(n+k-1)$ — элементного множества, а значит, целое число!

Весьма простое решение задачи найдено посредством обращения к знаковой форме, выражающей фигурирующую в нем дробь. Ассоциирование этой формы с формулой для числа сочетаний привело к погружению задачи в комбинаторный контекст. Арифметическая задача на делимость представила как частная по отношению к содержательному обобщению, относящемуся к комбинаторике. И решение задачи действительно получено как его прямое следствие. Но квалифицировать это решение как основанное на использовании принципа от общего к частному было бы сокрытием существа дела, утаиванием того существенного обстоятельства,

что здесь был использован в качестве ведущего средства принцип от частного к общему. В задачах А, В и С этот принцип тоже использовался, но существенно иной характер решения задачи D состоит в существенно ином, *метапредметном* характере использования этого принципа, делающем его использование ведущим средством решения этой задачи, а именно в форме поиска и нахождения подходящего содержательного обобщения, «иноприродного» по отношению к характеру постановки задачи.

На «предметном» же уровне способ решения задачи D характеризуем как сведение задачи на делимость к комбинаторной задаче.

Задача E. Вычислить с точностью до 10^{15} сумму

$$S = (4 - \sqrt[3]{2})(4 - \sqrt[3]{9})(4 - \sqrt[3]{12}) + \sqrt[3]{2}(4 - \sqrt[3]{9})(4 - \sqrt[3]{12}) + \\ + (4 - \sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9}(4 - \sqrt[3]{12}) + (4 - \sqrt[3]{2})(4 - \sqrt[3]{9})\sqrt[3]{12} + \\ + (4 - \sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2}(4 - \sqrt[3]{9})\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{9}(4 - \sqrt[3]{12}).$$

— Прежде всего надо узнать, с какой точностью следует вычислять слагаемые для достижения требуемой точности вычисления суммы. И тогда откроется возможность узнать для каждого слагаемого, с какой точностью следует вычислять входящие в него множители.

— После этого предстоит длительный процесс громоздких вычислений.

— В этом может помочь использование компьютера.

— Использование компьютера тоже потребует немало времени.

— А не стоит ли прежде попытаться упростить выражение S ?

— А я предлагаю разделить почленно выражение S на 4^3 :

$$S/4^3 = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) + p_1(1-p_2)(1-p_3) + \\ + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 + p_1p_2(1-p_3) + \\ + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3,$$

где $p_1 = \sqrt[3]{2}/4$, $p_2 = \sqrt[3]{9}/4$, $p_3 = \sqrt[3]{12}/4$. Правую часть последнего равенства естественно рассматривать как выражающую вероятность события B , состоящего в том, что происходит не более двух из независимых событий A_1, A_2, A_3 , вероятности которых — p_1, p_2, p_3 . Так как $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p_1p_2p_3$, то $S = 4^3(1 - p_1p_2p_3) = 58$.

Приведенное решение задачи E использует ее погружение в теоретико-вероятностный контекст.

Но было бы неестественно квалифицировать ее как теоретико-вероятностную задачу. Решение ее как арифметической задачи, как задачи на вычисление, основано на сведении ее к теоретико-вероятностной задаче. Возможность и эффективность такого сведения подсказывается теоретико-вероятностной формой, усматриваемой за алгебраической формой заданного выражения.

Рассмотренное решение основывается на методе, который естественно назвать методом *от особенно-го к общему*. Он состоит в сведении задачи к такой, которая является частной по отношению к содержательному обобщению, подсказываемому той или иной ее (данной задачи) структурной особенностью. Подобные подходы к решению задач несут развитие теоретического мышления учащихся посредством развития их способностей к продуктивному ассоциированию разноприродных задач, идей, знаковых форм, содержательных обобщений и его реализации как подходящей формы моделирования. Приобщение учащихся к методу *от особенного к общему* требует и активной работы и развития эмпирического мышления.

Итак, не только освоение новых орудий математической деятельности, но и расширение возможностей уже освоенных орудий посредством использования метода моделирования несет расширение возможностей использования принципа *от общего к частному*, а тем самым развитие теоретического мышления учащихся. Метод моделирования проявляет себя как метатеоретическое орудие математической деятельности.

Эффективным средством математического развития школьников является обращение к широкому разнообразию задач, эффективные решения которых находятся поиском подходящих содержательных обобщений и сведений к задачам, являющимся частными по отношению к таким содержательным обобщениям. Это средство несет такое развитие эмпирического мышления учащихся, которое является и развитием их теоретического мышления.

Как уже отмечено выше, сказанное в особой степени относится к задачам, эффективность решения которых достигается использованием содержательных обобщений, «иноприродных» по отношению к ним.

Развитие теоретического мышления невозможно без развития мышления эмпирического² [7]. Да и освоенные теоретические знания функционируют в форме эмпирического мышления.

Средоточием теоретического мышления школьника при изучении математики являются процессы восхождения на новые уровни мышления и освоения новых форм мышления. Таков процесс восхождения от арифметики, изучаемой в начальной школе, к алгебре. Таковы процессы освоения понятия функции и начальных понятий математического анализа. Эффективные способы построения таких процессов характеризуются тем, что *чем выше теоретический уровень осваиваемого понятия, тем большую роль в процессе его освоения играет эмпирическое мышление; чем выше осваиваемый уровень теоретического мышления, тем в большей степени оно должно обретать форму эмпирического мышления.*

«Формальная логика признает лишь методы рассудочного мышления. Для «развитого» же человека специфично разумное мышление, предпосылкой которого выступает исследование природы самих понятий (рефлексия). Формально-логический подход к мыслительным процессам не вскрывает специфики образования понятий, которая внутренне связана с исследованием самой их природы, с рефлексией» — говорится в [4, с. 61]. За этой позицией стоит убеждение, что теоретическое мышление функционирует за пределами мышления эмпирического, что оно противостоит последнему, являясь более высокой формой мышления: «Выход за пределы рассудочного мышления осуществляется мышлением разумным ...» [там же, с. 60]. В действительности эмпирическое мышление является необходимым компонентом, необходимым аспектом мышления теоретического, пронизывающим его. Оно предстает и как форма проявления теоретического мышления, как предметная форма метапредметного начала. Так, в приведенном ниже сценарии занятий со школьниками, посвященного формированию понятия касательной к кривой³, сценарии процесса восхождения к этому понятию и его начального освоения, играют существенную роль наивные геометрические представления. Этот процесс есть процесс развития эмпирического мышления

² Мышление, в частности, мышление теоретическое, является «непрерывно совершаемым взаимным переводом с языка образов на символически-операторный язык» 1, с. [134]. Уже в этом усматривается неразрывность связи между эмпирическим и теоретическим мышлением.

³ При всем том, что от сценария, приведенного в [5], он отличается лишь незначительным укорочением, целесообразность приведения его здесь объясняется не только удобством для читателя, но и тем, что он рассматривается здесь в новом контексте и к тому же сопровождается и новыми комментариями.

(более того, — наглядно-образного мышления), венчающийся его преобразованием, продуктом которого является понятие касательной как эффективное и широко применимое орудие поисково-исследовательской деятельности.

Именно средства формальной логики, которая якобы «признает лишь методы рассудочного мышления», рождают и помогают раскрывать неожиданные для учащихся ситуации, не согласующиеся с их исходными представлениями о касательной, раскрывают агентичность сформированного понятия касательной как творческого продукта в смысле А.Ф. Лосева [8], расхождение его содержания с исходными представлениями о касательной к кривой. Это «проявители» теоретической природы понятия касательной. Это «проявители» того, что за эмпирическим мышлением, работу которого венчает сформированное понятие, скрывается теоретическое мышление, «вскрывающее <ими же рождаемые> переходы, движение, развитие» [4, с.61]. Это необходимые средства формирования и освоения ведущих математических понятий.

Точнее говоря, это средства *логической семантики*, несущие возможность восхождения к над- или вне-контекстному рассмотрению сформированного *определения* понятия, а посредством этого к поликонтекстному его рассмотрению. Тем самым это средства, несущие возможность усмотрения «разноприродных» его моделей, средства, несущие «единство различных его определений» (Гегель). Это средства, особенно зримо и полнокровно реализуемые при использовании аксиоматического метода. Это средства, несущие (некоторое) оправдание тезису «Математика — это логика».

Процессы освоения фундаментальных математических понятий должны выстраиваться и как направленные на свое «само»-постижение, на постижение логики своего развертывания. Они должны быть направлены и на постижение учащимися как субъектами такой деятельности своего познающего «Я». А значит, они должны быть процессами осуществления феноменологической редукции [6, с. 161], близкой к феноменологической редукции в смысле Э. Гуссерля. Это процессы теоретического мышления, которое «вскрывает переходы, движение, развитие. Благодаря этому оно может изучать <математические понятия> согласно их собственной природе» [4, с.61].

При прямом приобщении учащихся к математическому понятию, то есть приобщении, начинающемся с обращения к его определению, понятие

«вырывается из его естественной связи, берётся в застывшем, статическом виде, вне связи с теми реальными процессами мышления, в которых оно ... рождается и живёт» (Л.С. Выготский [3, с. 189]). «Прямое обучение понятиям ... оказывается ... педагогически бесплодным» [там же]. Ведь логическое без исторического мертво. Говоря здесь об историческом, мы имеем в виду путь обучения, направляемый на приобщение к изучаемому понятию и на его *освоение* (а не на мертвое *усвоение*). В особой степени это относится к таким понятиям, процессы формирования которых сопровождаются радикальными преобразованиями представлений, являющихся их истоками. Таковы первичные понятия математического анализа.

Сказанное относится к процессам начального освоения понятий. Более глубокое освоение понятия сопровождается нарастанием его связей, приводящим к их преобразованиям в связи иного качества, иного характера, иной природы. Это влечет развитие работы механизмов понимания, сопровождающееся ее преобразованиями. И потому используемое на таких стадиях учебного процесса повторение начальных связей как средство закрепления и средство проверки усвоения материала не просто бесплодно, но разрушительно.

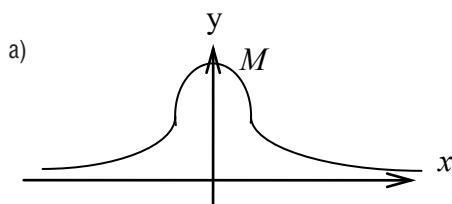
Приведенный ниже сценарий демонстрирует продуктивный и природосообразный способ восхождения от интуитивных представлений, от протопонятий к строгим математическим понятиям как носителям эффективных методов решения широкого круга задач. Схема осуществления *феноменологической редукции* служит мета-моделью описываемого процесса восхождения.

В этом процессе теоретическое мышление отнюдь не поднимается над эмпирическим, не преодолевает его, а выступает как наив, «выращиваемый» в лоне эмпирического мышления и преобразуемый формальной логикой. Направление его «выращивания» задается как прагматическое требование, как искомый способ решения подходящей задачи и работает как неуклонно действующая интенция.

1. Обращение к задаче 1 является прологом к описываемому ниже процессу. Ее постановка имеет, казалось бы, эмпирический характер. Но уже первичный ее анализ показывает необходимость работы теоретического мышления для отыскания ее решения.

Задача 1.

Гладким или заостренным является график функции $y = \frac{1}{1+x^2}$ в верхней его точке M , таким, как на левом рисунке или таким, как на правом?



– Если найти значения функции в точках, например, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{1000}$, и построить соответствующие точки графика, то это поможет уточнить его форму.

– Это не поможет разрешить поставленный вопрос, потому что не позволит выяснить, какой является форма той части графика, которая соответствует интервалу $(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$, такой, как на левом рисунке или таким как на правом.

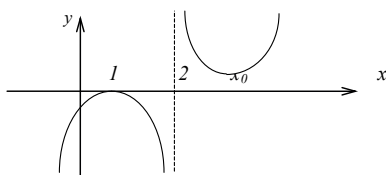
– А тогда мы найдем значения функции в точках $\frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \dots, \frac{1}{2000}$ (использование компьютера позволяет это осуществить достаточно быстро) и, пользуясь этим, уточним форму графика.

– Но это не позволит выяснить, какой является форма той части графика, которая соответствует интервалу $(-\frac{1}{2000}, \frac{1}{2000})$, такой, как на левом рисунке или таким как на правом. Как видим, для решения поставленного вопроса нужны средства, позволяющие выявлять особенности формы графика функции в «бесконечной близости» к той или иной его точке, в «бесконечно малой» ее окрестности.

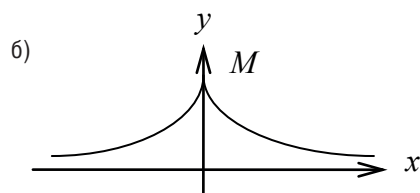
2. Задача 2 вместе с порождаемыми ее первичным обсуждением задачами 3 и 4 будет служить не только побудительным средством для формирования строгого понятия касательной как модели начальных представлений о касательной к кривой. Возможных вариантов такой модели бесконечно много. Но эти задачи будут нести и прагматическое требование к искомой модели: она должна нести метод их решения. Осуществленное обсуждение задачи 1 будет подсказывать направление поиска.

Задача 2.

Найти область значений функции $f(x) = \frac{(x-1)^4}{x-2}$



Множество всех значений этой функции, принимаемых в интервале $(-\infty, 2)$, есть $(-\infty, 0]$. В некоторой точке x_0 интервала $(2, +\infty)$ функция принимает наименьшее в нем



значение. Так как она в нем непрерывна и не ограничена, то множество всех ее значений в этом интервале есть $[f(x_0), +\infty)$. Значит, областью значений функции является множество $(-\infty, 0] \cup [f(x_0), +\infty)$.

– Но как найти $f(x_0)$?

– Этот вопрос сводится к следующему: как найти самую низкую точку $M(x_0, f(x_0))$ правой части графика?

– Надо попытаться выразить особенность положения этой точки на графике в такой форме, которая подсказывала бы путь ее отыскания.

– Касательная к графику в точке M параллельна оси Ox .

Это отнюдь не «логичное» утверждение, это всего лишь «кажимость». Но следование этим наивным интуитивным представлениям сыграет существенную роль. И это покажет также, насколько далек от истины тезис «Математика — это логика», насколько механистичным является представление о математической деятельности (и о ее продуктах), отвечающее этому тезису.

А так как касательная к графику в точке M параллельна оси Ox , то задача 2 сводится к следующей:

Задача 3.

На правой части графика найти точку, в которой угловой коэффициент касательной равен 0.

– А эту задачу мы сможем решить, если сможем решить следующую:

Задача 4.

Для произвольно взятой точки M графика найти угловой коэффициент касательной к нему в этой точке.

Казалось бы, переход к задаче 4 усложняет дело. В действительности обращение к ней как к задаче более общего характера будет способствовать приведению учащихся к осознанию необходимости «уточнения» представлений о касательной для решения задачи 3.

Учащиеся понимают уточнение как осознание и использование неявных знаний в их представлениях о касательных, тогда как в самом деле в качестве «уточнения» будет использоваться продуктивное моделирование этих представлений.

Пуристов едва ли не возмутит кричаще наивная постановка задачи 4. Но эта наивность здесь вполне оправдана. К тому же она делает естественным и продуктивным отметить ее как наивность и снять на соответствующей стадии описываемого процесса.

О той же ли функции идет речь в задаче 4, что и в предшествующих ей задачах, или о произвольной функции? Во втором случае постановка задачи была бы еще более наивной. Но эта наивность была бы настолько же оправданной. На рассматриваемой стадии процесса эти варианты понимания постановки задачи равносильны в дидактическом плане.

3. В этой части сценария осуществляется столкновение с пограничными ситуациями как радикальное средство приведения к осознанию размытости представлений о касательной и необходимости их «уточнения».

— Через всякую точку P графика проходит бесконечно много прямых. Как найти угловой коэффициент той из этих прямых, которая является касательной к графику функции в точке P ?

Так поставленный вопрос рождается представлением, что такая касательная единственна. И следствие этой всего лишь «кажущести», этим наивным интуитивным представлением сыграет существенную продуктивную роль. Впереди — еще не одна такая продуктивная «кажущест».

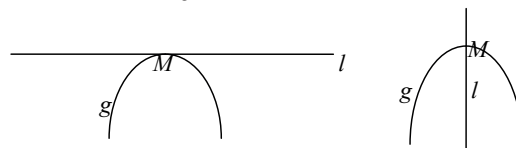
— Для этого условие, что рассматриваемая прямая есть касательная к графику в точке M , надо попытаться выразить в такой форме, которая подсказывала бы путь отыскания ее углового коэффициента.

— А для этого необходимо, прежде всего, уметь четко объяснить, что такое касательная к линии в данной точке.

Итак, казалось бы, чисто технический вопрос о том, как найти угловой коэффициент касательной, сведен к явно теоретическому вопросу. точнее говоря, к такому, теоретический характер которого будет раскрываться.

— Касательная к линии в данной ее точке M — это прямая, имеющая с этой линией единственную общую точку — точку M .

— На каком из следующих рисунков прямая l является касательной к линии g ? Может быть, на обоих?



— Нет, только на левом.

Откуда эти знания о касательных у детей, которые до этого знали разве лишь о касательных к окружностям? Эти знания непроизвольно создаются особенно ярко проявляющейся у детей способностью человеческого интеллекта экстраполировать представления, образы за пределы того «эпицентра», того круга рассматривений, в котором они возникли. Конечно, в результате таких экстраполирований возникают представления, образы, которые тем более размыты, чем «дальше» они от «эпицентра». (И весьма важным средством развивающего обучения является создание ситуаций, помогающих учащимся осознать такую размытость). Но такие представления, такие образы несут в себе креативное начало. Нередко они становятся источниками идей, вырастающих в важные математические понятия и мощные методы. К сожалению, эта способность почти не используется в обучении математике. А ее использование позволяло бы естественным образом создавать необходимую содержательную базу, формировать первичные интуитивные представления и, отправляясь от осознания учащимися их размытости и необходимости их уточнения, осуществлять процессы формирования строгих понятий как продуктивных моделей таких представлений. Этому следует онтогенетический подход (см. [5]).

— Но ведь на обоих рисунках прямая l имеет единственную общую точку с линией g . А это говорит о том, что единственность общей точки не является достаточным условием для того, чтобы прямая была касательной к линии.

— Но это условие необходимо, не правда ли?

— Возвратимся к левому рисунку. Продолжим линию g так, чтобы у нее с прямой l стало более одной общей точки. Перестает ли из-за этого l быть касательной к такой линии g в точке M ? Ведь нет же! А значит, вопрос о том, сколько общих точек у прямой с данной линией, никак не связан с вопросом о том, будет ли эта прямая касательной к линии в данной точке.

— Почему же многим из нас эта сторона дела показалась существенной?

— Потому, что мы рассматривали линии, похожие на части окружности.

4. — Естественно рассмотреть линии, не похожие ни на окружности, ни на их части. Рассмотрим, например, график функции $y = x^3$. Какая прямая является касательной к нему в точке O ?

— Может быть, ось Ox ?

— Но ведь она пересекает эту линию в точке O , как и всякая прямая, проходящая через эту точку.

— Так какая же прямая является касательной к этой линии в точке O ?

— А может быть, такой касательной нет?

— Как видно, мы не случайно не могли выразить наше понимание того, что такое касательная. У нас нет понимания этого, а есть лишь нечеткие, расплывчатые представления о касательной. И эти представления тем более расплывчаты, чем больше не похожа линия на дугу окружности. Рассмотрим более простую линию — двузвенную ломаную. Кто может провести касательную к этой линии в вершине M образованного ею угла?

— Касательной к этой линии в точке M является всякая прямая, проходящая через M и не пересекающая эту линию.

— Действительно ли всякая такая прямая является касательной к этой линии и, значит, касательных к ней в точке M бесконечно много?

— Раз есть сомнения, надо осуществить строгую проверку.

— Но как ее осуществить, не располагая четким пониманием того, что такое касательная?

Обращения к пограничным ситуациям приводят к размыванию представлений школьников о касательных и к осознанию ими этого. Такие ситуации выстраиваются здесь посредством обогащения нашего опыта привлечением к рассмотрению привычных для нас линий, но таких, которые не имелись нами в виду, не ассоциировались с исследуемым вопросом. Обращения к таким ситуациям будут использоваться и для испытания сформированного понятия касательной на работоспособность.

5. Осуществляется «уточнение» представлений о касательной, завершающееся формированием строгого понятия касательной как средства решения задачи 4, не решаемой на уровне обыденных представлений о касательных.

— Как, на каких путях искать уточнение наших, как оказывается, весьма нечетких представле-

ний о том, что такое касательная к линии в данной точке?

— Может быть, следует воспользоваться выводом, указанием, к которому нас привело обсуждение поисков решения задачи 1?

— Это хорошая идея: чем меньше, чем короче линия, тем ближе положение прямой MP к положению касательной к ней в точке M . Если линия «бесконечно короткая», то положение PM «бесконечно близко» к положению касательной к этой линии в точке M .

— А значит, чем короче дуга $\overset{\smile}{PM}$, нашей линии, тем она «прямее», тем меньше она отличается от отрезка PM и тем ближе положение прямой PM к положению касательной к точке M .

— Итак, чем ближе точка P к M , тем ближе положение прямой PM к положению касательной к нашей линии в точке M .

— Иначе говоря, при приближении P к M положение прямой PM приближается к положению касательной в точке M .

— А значит, касательная к линии в точке M — это предельное положение прямой PM при приближении P к M .

— Такое уточнение наших представлений о касательных четко, однозначно. Его естественно принять в качестве определения понятия касательной.

— И так как может быть не более чем одно предельное положение прямой PM при приближении P к M , то, согласно этому определению, для всякой линии l и всякой ее точки M не может быть более одной касательной к l в точке M .

Последнее суждение основывалось на интуитивных представлениях о предельном переходе, на «кажущейся», которая получает свое обоснование при принятии классического понятия предела функции в точке.

Апеллируя к соответствующему рисунку, сосредоточиваясь на нем, мы сосредоточиваемся тем самым на рассмотрении, на «принятии во внимание» единственно гладких линий. Мы сужаем поле рассмотрения, осуществляем «зашоривание», а тем самым настраиваем на ту наивность рассмотрения, которая создает благоприятные условия для прорыва на понятийный уровень рассмотрения. «Зашоривание» способствует сосредоточению на ведущем аспекте. Оно «уводит» от того, что важно знать, но целесообразно «забыть» в данной ситуации, забыть с тем, чтобы вер-

нуты к рассмотрению этого «забытого», неучтенного, с «высоты» расположения сформированным строгим понятием. Короче говоря, мы формируем посредством обращения к рисунку такую тактику внимания, которая более прямым образом направляет движение мысли учащихся к тому рубежу, достижение которого приводит учащихся к понятию касательной.

6. С помощью формально-логических средств осуществляется преобразование сформированного понятия. Преобразованное понятие первичным образом испытывается на продуктивность. Происходит осознание того, что преобразованное понятие обрело новое качество, новую природу.

Возвращаемся к вопросам, которые не могли быть решены без уточнения представлений о касательной. Это вопросы о том, как проходит касательная к графику функции $y=x^3$ в начале координат, и о том, как проходит касательная к графику функции $y=|x|$ в начале координат. Использование сформированного строгого понятия касательной дает на них ответы. Но ответы приводят к выявлению «неадекватности» этого определения исходным представлениям о касательной. Тем самым они побуждают к прояснению природы механизмов, направлявших процесс формирования понятия касательной.

— К строгому понятию касательной мы пришли, исходя из следующего наблюдения: чем короче дуга PM линии, тем она «прямее», тем меньше она отличается от отрезка PM и тем ближе положение прямой PM к положению касательной к точке M . Но ведь это верно не всегда, и график функции $y = |x|$ пример тому. Строгое понятие касательной сформировано, по сути, на базе представлений о касательной к гладкой дуге и для случая гладких дуг вполне адекватно этим представлениям. Оно есть модель этих представлений.

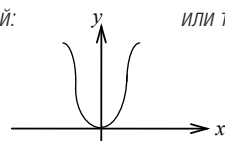
— Таким образом, сформированное понятие относится только к гладким дугам? Но коли так, то прежде чем применять это понятие при рассмотрении, например, графика какой-либо функции, надо узнать, является ли он гладкой линией. А такие вопросы мы решать не умеем.

7. Эта часть сценария посвящена отысканию критерия гладкости графика функции.

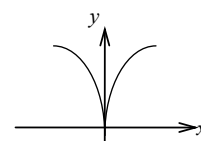
Как мы теперь знаем, касательная может существовать не во всякой точке графика непрерывной функции. Достаточно ясно и то, что график функции гладкий тогда и только тогда, когда во всякой его точке существует касательная. Теперь мы умеем проверить, выполняется ли это условие для какой-либо функции: для всяких точек M и P графика функции существование предела углового коэффициента прямой PM при приближении точки P к M равносильно существованию касательной к графику в точке M . Так, нетрудно установить, что во всякой точке графика функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ существует касательная. Значит, этот график всюду гладкий.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Гладкий или заостренный ее график в начале координат,

такой:



или такой:



При приближении P к O модуль углового коэффициента PO неограниченно возрастает, то есть положение секущей приближается к вертикальному. Ось Oy — предельное положение прямой PO при приближении P к O , то есть касательная к графику в точке O . Значит, график в точке O заострен. Касательная существует в каждой точке графика, но график не является гладким. Значит, неверно, что существование касательной в каждой точке графика функции является достаточным условием его гладкости.

— Но это условие необходимо.

— Пусть это условие выполняется. Если график функции f гладкий, то в близких его точках $P(x_0, f(x_0))$ и $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ угловые коэффициенты касательных $k(x_0)$ и $k(x_0 + \Delta x)$ близки. Это значит, что функция $y = k(x)$ непрерывна. Если же график в какой-то точке $P(x_0, f(x_0))$ заострен, то при переходе через нее угловой коэффициент касательной резко изменяется. А значит, функция $y = k(x)$ в этой точке разрывна. Отсюда ясно, что непрерывность функции $y = k(x)$ является и необходимым, и достаточным условием гладкости графика ⁴.

8. Ставится вопрос настолько же неожиданный, насколько и наивный: имеет ли смысл говорить о касательной к прямой в какой-нибудь ее точке M ?

— Вопрос о том, имеет ли смысл говорить о касательной к прямой в какой-нибудь ее точке M , естественно уточнить так: существует ли касательная к прямой (в смысле нашего определения) в какой-нибудь ее точке M ?

⁴ График первообразной всюду непрерывной и нигде не дифференцируемой функции всюду гладкий. Но насколько эта гладкость, усматриваемая посредством интеллектуального «микроскопа», не похожа на привычную гладкость!

— Какую бы точку P на прямой мы ни взяли, секущая PM совпадает с этой прямой. А значит, предельное положение PM при приближении P к M совпадает с этой прямой. Это означает, что сама эта прямая является касательной к ней в любой ее точке M .

— Неожиданный вывод! Как могло произойти то, что осуществленный процесс уточнения наших представлений о касательных, происходивший под неустанным контролем смысла, привел к понятию, имеющему иной смысл? И почему неадекватность сформированного понятия этим представлениям не усматривалась сразу, а обнаружилась лишь в результате его применения?

— Причина и кроется в применении этого понятия, точнее говоря, в формальном, буквалистском применении его определения, «отключаящем» контроль смысла и тем самым приводящем к абстрагированию от того, что «имелось в виду», но не осознавалось. Более того, оно приводит к размежеванию с этим «имевшимся в виду», неизменно присутствовавшим в нашем опыте, и тем самым выводит нас за его пределы, за пределы рожденных им представлений и смыслов. Оно навязывает иной способ рассмотрения. Оно делает предметом нашего внимания иные, формальные стороны дела. Оно рождает новый контекст и тем самым рождает новый смысл сформированного понятия.

Оправдание строгого понятия не в «адекватности» представлениям, послужившим его истоком, а в его продуктивности. Исторический опыт развития математики дает оправдание строгому понятию касательной.

9. Осуществляется дальнейшее испытание преобразованного понятия на работоспособность и тем самым дальнейшее его освоение, несущее усмотрение новых возможностей, которые оно несет. Тем самым приходит осознание того, что преобразованное понятие является продуктивной моделью исследуемого объекта.

Теперь ясно, как решить задачу 4. Так как касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M — это предельное положение прямой PM при приближении P к M , то ее угловой коэффициент есть предел углового коэффициента прямой PM при приближении точки P к M .

Затем решаются задачи, подобные следующей:

Задача 5.

Доказать, что график всякой квадратичной функции является гладким.

Решение задачи 4 несет решение и задач 5 и 6, и задачи 3, а значит, и задачи 2.

Задача 2, как и порождаемые ее обсуждением задачи 3 и 4, послужила не только побудительным средством для формирования строгого понятия касательной как модели обыденных представлений о касательной к кривой. Но она задала и прагматическое требование, которому должна удовлетворять искомая модель: она должна нести метод решения подобных ей задач.

Задача 6.

Пусть функция f , непрерывная в рассматриваемом интервале, принимает в его точке x_0 наибольшее или наименьшее значение. Доказать, что если существует касательная к графику f в точке $M(x_0, f(x_0))$, то ее угловой коэффициент равен 0.

Задача 7.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 2$ на отрезке $[0, 2]$.

Решение задач 6 и 7 послужит демонстрацией того, что сформированное понятие представляет эффективное орудие поисково-исследовательской деятельности.

Исходные представления о касательной к кривой имеют наглядно-образный характер. И это делает процесс восхождения к искомому подобным сократическим диалогам. Он существенно использует столкновения с пограничными ситуациями, несущими раскрытие размытости как исходных, так и уточненных представлений и тем самым необходимость дальнейших «уточнений». Это позволяет усмотреть непродуктивность уточнений, подобных осуществленным перед этим, и направляет на использование трансцендирования в форме предельного перехода, которое и приводит к работоспособному понятию касательной к кривой.

Восхождение от представлений о касательной к постановке вопроса о том, что такое касательная, — это работа теоретического мышления, осуществляющаяся как работа эмпирического мышления («зашоренного» рамками неосознаваемых представлений о гладких кривых). Оно существенно использует креативное наблюдение, связанное с взаиморасположениями секущих и касательной (в произвольно выбранной точке кривой). И это наблюдение и вывод из него основываются на наивных исходных представлениях о касательных. Сформированное определение понятия касательной — это не продукт экстрагирования знаний, изначально присутствующих в размытых наивных представлениях о касатель-

ных, а продуктивная модель этих представлений, то есть такая, которая отвечает прагматическим требованиям. Оно есть, прежде всего, но не единственно⁵, продукт выделения подходящей эмпирической стороны дела в эмпирическом объекте исследования. Эта сторона дела выявляется как «сущность» этого объекта и подтверждается в этом качестве в процессе ее освоения. Это и есть теоретическое начало, но не противопоставляемое эмпирическому, а «выращиваемое» в его лоне и представляющее в эмпирической форме. Это теоретическое начало в скрытой форме. Зримое проявление его как теоретического начала достижимо выделением его как особого предмета рассмотрения.

Какие же качества этого предмета позволили увидеть в них «сущностное» начало? Как уже сказано, это те, которые отвечают прагматическим требованиям. А именно, это снимающий размытость представлений о касательных (в рамках неосознанно предполагаемых представлений о гладких кривых) характер взаиморасположений касательной и секущих, несущий возможность решить поставленные задачи. В процессе его освоения он раскрывается как несущий эффективный и широко действующий метод решения необозримо широкого класса разнообразных задач. Открывающий широкие возможности использования формально-логических средств он тем самым несет возможность испытывать на надежность создаваемые на его базе орудия поисково-исследовательской деятельности и развивать их.

Еще раз отметим, что средства логической семантики рождают и раскрывают неожиданно новое содержание понятия касательной, его расхождение с исходными представлениями о касательной к кривой. Эти средства несут «очищение» и изъяснение теоретического плана, скрываемого его эмпирической формой. Это необходимые средства формирования и освоения ведущих математических понятий. Это средства созидания эффективных методов поисково-исследовательской деятельности.

Теоретичность мышления — это надпредметное, это метапредметное его качество. А значит, теоретическое мышление многоуровнево. Эмпирическое мышление является необходимым его уровнем. Вместе с тем эмпирическое мышление функционирует и как

аспект теоретического мышления, пронизывающий все его уровни, и как его форма. Впрочем, и развитое эмпирическое мышление многоуровнево, и теоретическое мышление может играть и роль его уровня и роль аспекта. Является мышление преимущественно теоретическим или преимущественно эмпирическим — это определяется тем, какой из его уровней играет стратегическую роль.

Нередко стратегическая направленность мышления, его теоретический уровень скрывается за его наивным предметным уровнем, за его эмпирической формой. И такое скрывание часто используется как продуктивный дидактический прием. Этот прием широко используется в рамках традиционного обучения. Но не в последнюю очередь в этом спешат видеть слабое развитие теоретического мышления учащихся, несомое традиционным обучением.

В последние десятилетия со стороны многих приверженцев инновационных методов обучения проявляется негативное или высокомерно-снисходительное отношение к традиционной системе обучения математике. Они не видят несомого ею богатства эффективных средств математического развития учащихся. Они игнорируют богатый опыт использования этих средств. Этот опыт нуждается в изучении как опыт развития поисково-исследовательской деятельности учащихся, как опыт развития их эмпирического мышления, необходимого для развития теоретического мышления, и как опыт развития их теоретического мышления.

Впрочем, рождение такого отношения к традиционной системе обучения естественно, так же, как естественно ожидать и возрождения ее былого высокого статуса. Это объяснимо следующей общей закономерностью. Развитие всякого направления, всякого компонента культуры сопровождается достижениями, несущими его преобразования. Но нет *развития вообще*, есть развитие в том или ином секторе направлений, сопровождающееся не только достижениями, но и потерями, и даже утратами. Вместе с отжившими планами уходят в прошлое, или «на периферию», или остаются всего лишь как рудименты, одни надолго, другие навсегда, жизнеспособные и значимые достояния, подавляемые победным шествием рождающегося нового. Но дальнейшее развитие приводит к возрождению некоторых из этих достояний, к осознанию их непреходящей ценности, их необходимости, к раскрытию или рождению новых несомых ими смыслов, новых их ценностей и метасмыслов. Так приходят большие и малые Ренессансы. Они воз-

⁵ Переход от исходных представлений (о касательной) к их модели вносит новое содержание в понятие касательной.

рождают такие достояния, но, как правило, в новых формах, в новых статусах, погружая их в новые контексты и метаконтексты. Они восстанавливают нарушенную органичность развития.

Сказанное не следует понимать как отрицание инноваций, как ратование за возвращение в прошлое. Его следует понимать как выражение осознания ценности таких систем развивающего обучения математике, которые сохраняли бы непреходящие достижения традиционной системы и тем самым с большей эффективностью способствовали интеллектуальному развитию учащихся, а посредством этого их личностному развитию. ■

Литература

1. Веккер Л.М. Психические процессы. Т. 2. — Л.: Издательство ЛГУ, 1976.
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969. — 328 с.
3. Выготский Л.С. Мышление и речь / Выготский Л.С. Собрание сочинений. т. 2. — М.: Педагогика 1982. — С. 5–361.
4. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. — М.: Интор, 1997. — 544 с.
5. Когаловский С.Р. К проблеме приобщения школьников к научной деятельности. // Школьные технологии. — 2015. — № 6. — С.42–56.
6. Когаловский С.Р. Онтогенетический подход к обучению школьников математике. — Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. — 316 с.
7. Когаловский С.Р. О традиционном и развивающем обучении математике. // Научный поиск, 2020, № 3. — С. 11–21.
8. Лосев А.Ф. Диалектика творческого акта (краткий очерк)/ Контекст 1981. — М.: Наука, 1982. — С. 48–78.