Решения и подсчёты: логично, точно, красиво

Борис ДРУЖИНИН, педагог

В этом номере, так же как и в предыдущих (см.: НО, 2000, № 2; 2001, № 2, 5–8), школьникам предлагает задания автор развивающих мышление задач.

14 сентября

Эта задача встречается во многих книгах. Наиболее удачно она сформулирована, на мой взгляд, у Мартина Гарднера.

— Однажды в аптеку небольшого городка прибыл груз — 11 ящиков с пилюлями снотворного. Через несколько минут в аптеку пришло сообщение, что в одном ящике все пилюли бракованные и весят 11 граммов каждая вместо положенных 10 граммов, то есть на 1 грамм больше, чем надо. В аптеке есть весы, на них можно взвесить сразу несколько пилюль, причём очень точно. Но, к сожалению, взвесить можно только один раз, а потом несколько дней настраивать для нового взвешивания. Вопрос: как побыстрее определить, в каком ящике бракованные пилюли?

— Надо брать по одной пилюле из каждого ящика, — предлагает самое простое решение Миша, — запоминать, из какого ящика взяли, и взвешивать.

— На это уйдёт слишком много времени, — напоминаю Мише. — Аптекарь взвесит одну пилюлю и потом будет несколько дней настраивать весы для второго взвешивания. Надо умудриться определить ящик с бракованными пилюлями за одно-единственное взвешивание.

«Задачи определены, цели поставлены», но...

— А куда торопиться? — спрашивает Катя. — Если первая же взвешенная пилюля окажется бракованной, то во всех остальных ящиках пилюли правильные, их можно спокойно продавать. Если первая пилюля будет правильная, то пилюли из этого ящика можно продавать и спокойно настраивать весы для второго взвешивания.

— Хорошо, изменим условие задачи, — начинаю сдавать позиции. — Аптекарь должен сегодня же раздать пилюли жителям города. Для этого одного ящика мало.

Надеюсь, что такая формулировка условия задачи не допускает побочных решений. Зря...

— Тогда сделаем так, как с отравленным вином короля Артура, — предлагает Оля. — Помните? Возьмём по одной пилюле из половины ящиков. Если их общий вес будет правильным, аптекарь может раздавать пилюли из этих ящиков. А если...

— А если у них вес будет неправильный, — подхватывает Настя, — то аптекарь будет раздавать пилюли из остальных ящиков.

Ничего не поделаешь, приходится сдаваться.

— Не будем ничего придумывать. Просто надо определить ящик с бракованными пилюлями за одно взвешивание.

— Может, их подкладывать на весы? — спрашивает Валя. — Положить на весы одну пилюлю и определить её вес. Потом рядом с ней положить вторую и посмотреть их общий вес.

— Это всё равно, что пилюли по очереди на весы класть, — возражает Тамара. — Получится много взвешиваний.

Дети правильно поняли условие задачи, теперь важно направить обсуждение возможного решения в нужную сторону. Оля очень кстати вспомнила задачу, связанную с определением отравленного вина в одной из бутылок. Эту задачу мы решали прямым испытанием. В роли отравленного вина выступал очень слабый раствор щёлочи. Занятие превратилось в интересную лабораторную работу. Тогда Катя сумела определить бутылку с отравленным вином при помощи только одной капли фенолфталеина, предложив метод, не описанный ни у одного из классиков. Валя, предложив постепенно увеличивать число пилюль на весах, пользуется методом Кати, но он для решения этой задачи не подходит. Однако в задачах много общего.

— Когда вы определяли бутылку с отравленным вином, — напоминаю детям, — имело значение, сколько вина вы выливали в общий стакан из разных бутылок?

— Нет. Главное, попало ли в стакан отравленное вино, — вспоминает Саша, — или его там нет. А сколько из какой бутылки наливали — никакого значения не имело.

— Я, кажется, поняла, — не вполне уверенно говорит Александра. — Да, точно. Надо на всех ящиках поставить номера и из каждого ящика взять для взвешивания столько пилюль, какой у него номер.

— Правильно, — подхватывает Костя. — Сколько у нас всего ящиков? Одиннадцать. Значит, всего будет... будет 66 пилюль. 66 правильных пилюль весят 660 грамм, а...

Останавливаю Костю и прошу кого-нибудь продолжить.

— А если 66 пилюль будут весить, например, 666 граммов, — отвечает Миша, то бракованные пилюли находятся в шестом ящике.

— И вообще, на сколько общий вес пилюль будет больше 660 граммов, — объясняет решение Лена, — из ящика с таким номером и взяты бракованные пилюли.

— Конечно, они лежат в шестом ящике, — неожиданно говорит Валя. — Ещё в старину знали, что 666 — число зверя.

21 сентября

— Вернёмся к нашим пилюлям. В следующий раз ситуация усложнилась. В аптеку доставили 6 ящиков с пилюлями, а следом пришло сообщение, что бракованные пилюли могут находиться не в одном, а в нескольких ящиках. Сколько именно было ящиков с бракованными пилюлями, никому не было известно. Надо за одно взвешивание точно установить, в каких ящиках находятся бракованные пилюли.

— Так мы эту задачу в прошлый раз решали, — вспоминает Миша. — Возьмём из каждого разное число конфет, то есть пилюль, и спокойно взвесим, а потом и номер ящика определим.

Предлагаю Мише определить, в каких ящиках были бракованные пилюли, если взвешенные пилюли оказались на 6 граммов тяжелее, чем положено.

— Из шестого, — сразу отвечает Миша.

— А может, из первого и пятого?

Миша растерялся.

— Или из второго и четвёртого, — поддерживает меня Оля.

— А если твои пилюли на 14 граммов весят больше, чем надо, что тогда? — спрашивает Александра.

Идея Миши критики не выдержала.

— А что, если из первого ящика взять 1 пилюлю, из второго ящика взять 10 пилюль, из третьего — 100, из четвёртого — 1000 и так далее, — предлагает Лена. — Тогда при взвешивании легко определить, в каких ящиках бракованные пилюли.

— Что покажут у тебя весы, если плохие пилюли в первом, третьем и шестом ящиках?

Лена задумывается, ей на помощь приходит Дима.

— Весы покажут на 100101 грамм больше, чем надо, — утверждает он.

Дети принимаются вычислять показания весов для разных комбинаций ящиков с бракованными пилюлями. Наконец, Катя обращает внимание на физическую сторону этих чисел.

— Где же аптекарь столько пилюль в одном ящике найдёт?

— И сколько такой ящик будет весить? — спрашивает Саша.

— Десять тонн, если в ящике миллион пилюль, — успевают подсчитать Валя и Тамара.

— Похожую задачу мы уже решали, вспомните, — начинаю подсказывать. — Капитан Врунгель подбирал подходящие гири, чтобы сахарный песок взвешивать. Попробуйте начать с меньшего числа ящиков, например, с трёх.

— Ну, если ящика всего три, то задача легко решается, — сразу заявляет Саша. — Из первого ящика возьмём 1 пилюлю, из второго ящика возьмём 2 пилюли, а из третьего — 4. Тогда все варианты будут различаться.

Предлагаю сделать таблицу. Рядом с номером ящика в скобках записано количество пилюль, взятых из этого ящика. Единичкой будем отмечать ящики, в которых находятся бракованные пилюли. Если в ящике пилюли правильные, его будем отмечать ноликом. Первую строчку заполняю сам, остальные — дети.

превышение веса (в граммах)	ящики		
	3(4)	2(2)	1(1)
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0

Предлагаю детям подумать, как добавить сюда четвёртый ящик.

— Из четвёртого ящика надо взять 8 пилюль, тогда он никому мешать не будет, — говорит Валя. — Мы с Тамарой уже все варианты заполнили.

Таблица на доске переделывается под четыре ящика.

превышение веса (в граммах)	ящики			
	4(8)	3(4)	2(2)	1(1)
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

— Я вспомнила ту задачу, — сообщает Александра, — про капитана Врунгеля. Только там запись другая была. Мы не единицами гири отмечали, а сразу вес записывали.

Александра выходит к доске и пишет:

7 = 1 + 2 + 4
13 = 1 + 4 + 8
38 = 32 + 4 + 2

Дети, вслед за Александрой, вспоминают старую задачу и, что важнее, находят соответствие между прежней записью и новой таблицей. Теперь они приступают к составлению таблиц для пяти, шести и т.д. ящиков. Приходится их останавливать, это займёт слишком много времени и места.

— Попробуйте обойтись без таблицы, — предлагаю детям. — Мы её составляли, чтобы понять ход решения задачи. Сколько пилюль вы возьмёте из шестого ящика?

— Мы с Валей уже посчитали, — говорит Тамара, заглядывая в листок бумаги, — из шестого ящика надо взять 32 пилюли.

— А если ящиков семь будет, то из седьмого сколько взять надо? — жестом останавливаю Тамару.

— В два раза больше, — сразу отвечает Дима.

— Тогда определите ящики с бракованными пилюлями, если вес отобранных пилюль превышает правильный на 27 граммов?

Несколько минут дети заняты подсчётами. Первыми свой ответ сообщают Валя и Тамара.

— Бракованные пилюли взяты из пятого, четвёртого, второго и первого ящиков.

Интересуюсь способом решения.

— А мы как раз таблицу до шестого ящика составили, — отвечает Валя, — в ней легко это число отыскать. 27 надо представить как сумму чисел, которые в скобках написаны.

27 = 16 + 8 + 2 + 1

— Какие числа в эту сумму вошли, — продолжает Тамара, — в тех ящиках и находятся бракованные пилюли.

— Если в задаче ящиков будет побольше, штук 25, то в вашей таблице несколько миллионов строчек должно получиться, — пытаюсь успокоить подруг. — Такой таблицей пользоваться будет весьма затруднительно.

— Так из двадцать пятого ящика вы должны будете больше миллиона таблеток взять, — сразу замечает Саша, — и, главное, всё точно пересчитать.

Приходится признаваться, что для большого числа ящиков этот метод практического значения не имеет. Но вопрос остаётся: как по превышению веса определить нужные ящики без помощи вспомогательных таблиц?

— Обратите внимание, когда в таблице в столбце, соответствующем первому ящику, появляется единица?

— Когда общее превышение веса нечётное, — после небольшого раздумья первым замечает Саша.

— Смотрите, а во втором ящике нули и единицы парами меняются, — сообщает о своих наблюдениях Оля.

— А в третьем ящике — четвёрками.

— Итак, мы установили, что одна бракованная пилюля взята из первого ящика, потому что превышение в весе — число нечётное, — начинаю подсказывать. — А что значит нечётное число? Что получится в результате, если мы нечётное число разделим на 2?

— Целого числа не получится.

— Или в остатке будет единица.

— Прекрасно! 27 разделили на 2 и получили 13 и в остатке 1. Что означает эта единица?

27 = 2 • 13 + 1

— То, что это число нечётное. То, что одна бракованная пилюля взята из первого ящика, — это ребята усвоили хорошо.

— Обратите внимание: из третьего, четвёртого и всех остальных ящиков мы берём чётное число пар пилюль и только из второго ящика мы берём одну пару. Воспользуйтесь этим фактом.

После небольшого обсуждения дети приходят к выводу: число бракованных пар нечётное потому, что одна бракованная пара взята из второго ящика. Потом так же дети разбираются с четвёрками.

28 сентября

— Мы, кажется, разобрались, как бракованные ящики находить, — говорит Костя и показывает на доске способ, который приводится почти во всех книжках.

27 = 2 • 13 + 1	**1**	**1-й ящик**
13 = 2 • 6 + 1	**1**	**2-й ящик**
6 = 2 • 3 + 0	**0**	**3-й ящик**
3 = 2 • 1 + 1	**1**	**4-й ящик**
1 = 2 • 0 + 1	**1**	**5-й ящик**

Дети просят загадать им ещё какое-нибудь число, чтобы попробовать его разгадать и определить ящики с бракованными пилюлями. Предлагаю 242. Ребята расправляются с ним довольно быстро.

242 = 2 • 121 + 0	**0**	**1-й ящик**
121 = 2 • 60 + 1	**1**	**2-й ящик**
60 = 2 • 30 + 0	**0**	**3-й ящик**
30 = 2 • 15 + 0	**0**	**4-й ящик**
15 = 2 • 7 + 1	**1**	**5-й ящик**
7 = 2 • 3 + 1	**1**	**6-й ящик**
3 = 2 • 1 + 1	**1**	**7-й ящик**
1 = 2 • 0 + 1	**1**	**8-й ящик**

— Бракованные пилюли во втором, пятом, шестом, седьмом и восьмом ящиках, — подводит итог Настя.

— Если, конечно, столько ящиков привезли, — уточняет Лена.

4 декабря

— Борис Львович, мне сестра задачку загадала, — говорит Настя. — Мы эту задачку с ней вместе решали, решали, но так ничего и не поняли. Задачка про Ахилла и черепаху.

Настя выходит к доске и продолжает рассказывать.

— Ахилл пытается догнать черепаху. Конечно, бегает он гораздо быстрее, чем черепаха ползает. Когда Ахилл прибежит на то место, где вначале была черепаха, она успеет немного проползти дальше. Ахилл опять прибежит на новое место черепахи, а та опять успеет отползти. Получается, что Ахилл никогда не догонит черепаху, правда?

Вопрос застал меня врасплох. К таким темам надо тщательно готовиться, как, впрочем, и ко всем остальным. Стараюсь вспомнить всё, что мне известно по этому поводу.

— Это *апория*[1], так называются подобные задачи. Они появились ещё в Древней Греции, когда учёные стали задумываться о бесконечности и обо всём, что с ней связано. Проблемы бесконечности связаны не только с математикой, но и с физикой, и с философией. Задачу, рассказанную Настей, и ещё несколько подобных задач придумал Зенон около двух с половиной тысяч лет назад. Обо всём этом вы можете прочитать в «Энциклопедии для детей» издательства «Аванта+». Обсудим другую задачу Зенона. Идея её та же самая, но в ней, в отличие от первой задачи, её герои передвигаются по очереди и за ними легче следить.

[1] В переводе с древнегреческого апория означает трудность, непонятность.

Вспоминаю эпизод из жизни Диогена, стараясь придать ему форму небольшого рассказа.

«Однажды к бочке, служившей домом великому мыслителю Диогену, подошла толпа древних греков.

— Видишь дерево? — спросили Диогена жители города Афины, желая поставить философа в тупик. — Прежде чем достигнуть его, ты пройдёшь половину пути. После этого ты должен пройти половину оставшегося пути, но до дерева ты ещё не дойдёшь. Затем тебе придётся снова пройти половину оставшегося расстояния и так каждый раз ты обязан проходить половину пути от тебя до дерева. Получается, что до дерева ты ***никогда*** *не дойдёшь. Что ты на это скажешь, философ?*

— Никогда не говори «никогда», — буркнул Диоген, кряхтя вылез из бочки и спокойно прошёл мимо дерева.

— Но ведь мы тебе только что доказали обратное, — не унимались жители Афин. — Объясни, в чём мы не правы? Ты же не будешь отрицать, что у любого отрезка, даже самого маленького, есть середина.

Диоген скрылся в бочке, пошарил в самом тёмном углу и вытащил небольшие песочные часы.

— Возьми, — протянул он их самому бородатому и горластому жителю города Афины, — и пройди с ними половину расстояния до дерева.

Бородач прошёл.

— Теперь переверни часы, стой на месте и жди, пока весь песок не пересыплется вниз.

Бородач послушно выполнил и это указание. Когда весь песок пересыпался, Диоген про-

должал:

— Пройди следующий отрезок твоего пути, равный половине оставшегося расстояния от тебя до дерева, и остановись в конце его.

Бородач сделал нужное число шагов и, без всякой подсказки, снова перевернул часы.

— Ты хорошо освоил мои указания, — похвалил его Диоген. — Каждый раз, достигнув середины лежащего перед тобой пути, стой на месте, пока в часах сыплется песок. Вот теперь ты действительно ***никогда*** *не достигнешь дерева.*

— Но ты же сам нас предупреждал, чтобы мы никогда не говорили «никогда», а сам...

— Древние греки должны употреблять только те слова, значение и смысл которых они понимают, — проворчал Диоген, скрываясь в своей любимой бочке».

В классе стоит тишина. Детям нравится слушать такие истории, хотя они уже подросли и в сказках особенно не нуждаются. Скоро Миша найдёт в какой-то книге легендарную историю про Диогена и Александра Македонского, потом ребята увлекутся разными случаями из жизни великих учёных и мыслителей прошлого, благодаря чему им всем будет обеспечена пятёрка по истории Древнего мира. А сейчас они попробуют разобраться, чем Бородач отличается от Диогена. Почему Диоген смог дойти до дерева, а Бородачу суждено всю жизнь переворачивать песочные часы (если он, конечно, за это время не поумнеет).

— Но ведь действительно, — нарушает тишину Катя, — середин оставшихся отрезков будет очень много, больше, чем...

— Их будет бесконечно много, — перебивает её Саша. — Правильно?

— Правильно, — соглашаюсь с Сашей. — Кто пройдёт большее расстояние, Диоген или Бородач?

Никто не сомневается в равенстве путей обоих, хотя объяснить этого толком не может. Предлагаю оценить длину этого пути.

— Пусть расстояние от бочки Диогена до дерева равно 100 метрам...

— Тогда метров не было, — поправляет меня кто-то.

— Хорошо, одна стадия. Это — немного меньше 200 метров, если измерять в наши дни в привычных нам единицах длины. Чему будет равен первый отрезок, пройденный Диогеном?

— Половине стадии, — первой отвечает Лена, — он же сначала должен пройти половину всего расстояния до дерева.

— Чему будет равен второй отрезок?

— Четверти стадии. Четверти, — похоже, дети уже разобрались в отрезках, — половине от половины.

— Третий?

— Одной восьмой стадии. Половине от четверти.

— А дальше?

— Ещё в два раза меньше, потом ещё в два...

— Каждый пройденный отрезок будет в два раза короче предыдущего, — грамотно определяет Катя.

— Теперь мы можем записать путь, пройденный Диогеном, как сумму всех отрезков.

$$\mathbf{S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 + ... = 1}$$

— Почему вы решили, что единица получится? — спрашивает Валя.

— Во-первых, я просто знаю, чему равна эта сумма, а во-вторых, её можно сосчитать. Вы и сами это умеете.

— Так это же сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, — замечает Саша, — со знаменателем 1/2.

Вспомнив подходящую формулу, ребята быстро убеждаются, что сумма посчитана правильно.

11 декабря

— Попробуем оценить время, затраченное Диогеном. Первый отрезок своего пути, а он равен половине всего расстояния до дерева, он прошёл, допустим, за 5 минут. За какое время он пройдёт второй отрезок? Скорость его передвижения будем считать, естественно, постоянной.

— За две с половиной минуты.

— А следующий — за минуту с четвертью, — дети наперёд знают, какие вопросы им будут заданы. — А потом за... за тридцать семь с половиной секунд.

— Запишем всё время, которое потратил Диоген на путь до дерева, в виде суммы.

$$\mathbf{T = 5 + 5/2 + 5/4 + 5/8 + 5/16 + 5/32 + 5/64 + 5/128 + 5/256 + \ldots = 10}$$

Дети, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получают тот же результат и интересуются, как мне удалось так быстро подсчитать.

— Обратите внимание, что у всех слагаемых есть общий множитель 5, — приступаю к объяснению, — вынесем его за скобки.

$$\mathbf{T = 5 \bullet (1+ 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 + \ldots) = 10}$$

— Сумма в скобках отличается от той, что мы считали на прошлом занятии, только на первую единицу, — продолжаю объяснение. — Та сумма была равна 1, прибавим новую единицу и умножим на 5. Теперь посчитаем время, которое затратил Бородач на прохождение того же пути. Вспомните: каждый раз, пройдя очередной отрезок, он останавливался, переворачивал песочные часы и ждал, когда весь песок пересыплется сверху вниз.

— А сколько времени пересыпается песок в его часах?

— Сколько хотите, допустим, 1 минуту.

— Тогда на первый отрезок он затратит 6 минут, — сразу говорит Дима, на второй — три с половиной, на третий...

— Надо взять формулу, по которой мы время Диогена подсчитывали, — предлагает Катя, — и к каждому слагаемому единицу прибавить.

$$\mathbf{T_Б = 5 + 1 + 5/2 + 1 + 5/4 + 1 + 5/8 + 1 + 5/16 + 1 + 5/32 + 1 + 5/64 + 1 + \ldots =}$$

Буква Б означает, что $T_Б$ — время Бородача.

— Как такую сумму подсчитать? — спрашивает Костя. — Ведь это уже не прогрессия.

— А чем отличается эта сумма от той, где время Диогена подсчитывалось?

— Единицы добавились...

— Всё понятно, — говорит Саша, — надо взять время Диогена и прибавить к нему столько единиц, сколько середин отрезков ему надо пройти.

— Но ты же сам говорил, — напоминает Тамара, — что таких середин бесконечно много.

— Значит, и минут будет бесконечно много, — продолжает Валя.

— *Получается, что Бородач никогда не дойдёт до дерева*, — делает вывод Катя, — *а Диоген спокойно дойдёт.*

18 февраля

— Некоторое время назад мы с вами обсуждали задачу про Ахилла и черепаху, помните? Рассмотрим ещё несколько таких задач. На всякий случай проверим, умеете ли вы вычислять площади и объёмы. Чему равна площадь простого прямоугольника?

— Произведению основания на высоту.

— Подсчитайте объём кругового цилиндра.

— Тоже произведению основания на высоту. — Ребята всё это прекрасно знают и отвечают, как от назойливой мухи отмахиваются. Тем приятнее поймать их на неточности.

— Что же у вас получается? Площадь — произведение основания на высоту и объём — произведение основания на высоту.

— Но ведь ясно, что объём равен произведению площади основания на высоту.

— Хорошо. Сейчас будем решать задачу, в которой понятия площади и объёма надо очень точно различать. Чему равна площадь основания цилиндра радиуса R?

Ответ πR^2 вполне всех удовлетворяет. Предлагаю задачу из «Энциклопедии для детей», которая там называется «Парадокс маляра».

«Рассмотрим бесконечную ступенчатую пластинку, состоящую из прямоугольников:

первый из них — квадрат со стороной 1 см, второй имеет размеры 0,5 см х *2 см, а каждый следующий вдвое уже и вдвое длиннее предыдущего».*

Свой рассказ сопровождаю рисунком, стараясь выполнить его как можно аккуратнее.

— Какая площадь этой пластинки?

— Площадь первой ступеньки — 1 см^2, — сразу берётся за дело Дима, — площадь второй — тоже 1 см^2, площадь третьей...

— У каждой ступеньки площадь — 1 см^2, — перебивает его Костя, — произведение высоты на основание остаётся постоянным.

— Точно, — поддерживает его Оля, — основание каждый раз уменьшаем в 2 раза, а высоту в 2 раза увеличиваем, получается, что их произведение не меняется.

— Так какая площадь всей пластинки? — напоминаю вопрос.

— Число ступенек бесконечное, — говорит Катя, — значит, и площадь всей пластинки будет бесконечная.

— Но такую пластинку сделать нельзя, — возражает Саша, — её ширина станет, в конце концов, меньше размера атома. Из чего же тогда её делать?

— Сомнения Саши правильные, но мы рассматриваем не физическую, а чисто математическую модель. Здесь возможно всё. Такие модели помогают лучше разобраться в физических процессах, но только помогают, а не заменяют собой эти процессы.

Продолжаю читать по книге.

«Площадь каждого прямоугольника равна 1 см^2, а общая площадь пластинки бесконечна. Разумеется, чтобы всю её покрасить, потребуется бесконечное (по объёму или массе) количество краски. Но представьте себе «сосуд», получаемый при вращении пластинки вокруг её прямого бесконечного края. Сосуд состоит из цилиндров».

Рисую ещё одну картинку, надеясь, что всем всё будет понятно. Напоминаю, что высота каждого цилиндра равна высоте соответствующего прямоугольника, а радиус — ширине этого прямоугольника. Предлагаю посчитать объём каждого цилиндра по формуле, которую они сами выписали на доске:

$V = пR^2 \bullet H$

здесь R — радиус цилиндра,

H — высота цилиндра.

Совместными усилиями ребята получают такие результаты:

$V_1 = п \bullet 1см^2 \bullet 1см = п \bullet 1см^3$

$V_2 = п \bullet (1/2)^2см^2 \bullet 2см = п \bullet (1/2)см^3$

$V_3 = п \bullet (1/4)^2см^2 \bullet 4см = п \bullet (1/4)см^3$

…

$V_6 = п \bullet (1/32)^2см^2 \bullet 4см = п \bullet (1/32)см^3$

…

$V_{10} = п \bullet (1/512)^2см^2 \bullet 4см = п \bullet (1/512)см^3$

…

Останавливаю ребят и, не настаивая на общей формуле, прошу их сложить эти объёмы и получить полный объём сосуда. После некоторых преобразований получается так:

$V = п \bullet (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ...) =$

Ребята легко узнают в этом выражении сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 1/2, после чего найти ответ не составляет труда.

Теперь предстоит самое интересное. Вычисляя объём сосуда, дети забыли про пластинку. Время про неё напомнить.

$V = п \bullet 2\ см^3$

— Обратите внимание, пластинка имеет бесконечную площадь, а объём сосуда, полученного вращением этой пластинки, — конечный. Туда можно залить 7см^3 какой-нибудь краски, даже лишняя краска останется. Опустим в сосуд, наполненный краской, нашу пластинку, она окрасится, даже с обеих сторон. А ведь площадь этой пластинки, вспомните, бесконечна. *Какой же сделаем вывод? Можно окрасить пластинку или нельзя?*

Ребята растерялись. Действительно, пластинка имеет бесконечную площадь и не хватит никакой краски, чтобы её окрасить. Но стоит опустить эту же пластинку в сосуд с краской, как она окажется окрашенной со всех сторон. Физическая сторона этого процесса уже ни у кого не вызывает протеста. Всё воспринимается как математическая модель.

— Может, мы в формулах ошиблись? — сомневается Валя.

— Или при подсчётах, — добавляет Тамара.

25 февраля

— Удалось покрасить пластинку?

— Я тут немного подумал, — говорит Саша, — так вообще что-то странное получается. Такой сосуд сделать нельзя, его боковая поверхность имеет бесконечную площадь, а объём у него конечный.

За неделю дети проверили все формулы и расчёты, убедились в отсутствии ошибок. Задаю наводящий вопрос:

— Слой краски какой толщины вы собирались наносить на пластинку?

— Любой, — сразу отвечает Саша, — всё равно мы толщину слоя, когда объём краски будем подсчитывать, за скобки вынесем.

Для убедительности Саша пишет на доске формулу:

$\mathbf{V_{кр} = S_{пл} \cdot h_{кр}}$

где $\mathbf{V_{кр}}$ — объём краски,

$\mathbf{S_{пл}}$ — площадь пластинки,

$\mathbf{h_{кр}}$ — высота слоя краски.

Собираюсь обратить внимание детей, что высота $h_{кр}$ в формуле Саши считается постоянной, а на самом деле...

— Я, кажется, знаю, в чём дело, — опережает меня Катя. — Когда мы красим пластинку, то считаем, что слой краски имеет постоянную толщину. Поэтому Саша и вынес её за скобки. Зато когда мы погружаем пластинку в сосуд с краской, толщина слоя краски, которая может быть нанесена на пластинку, всё время меньше радиуса очередного цилиндра. За скобки её выносить нельзя.

4 марта

Предлагаю ребятам задачу из «Энциклопедического словаря юного математика».

— *Сегодня поговорим о геометрии. Перед вами равнобедренный треугольник,* — делаю чертёж на доске. — *Впишем в него окружность, радиус этой окружности обозначим* $\boldsymbol{r_1}$. *К окружности параллельно основанию проведём касательную и получим треугольник, подобный данному. В этот новый треугольник снова впишем окружность, диаметр её обозначим* $\boldsymbol{r_2}$, *проведём к ней касательную, параллельную основанию, и в полученный меньший треугольник опять впишем окружность. И так далее. Такие построения можно продолжать неограниченно долго... Чему равна сумма всех радиусов?*

— А как же мы эту сумму сосчитаем? — сомневается Настя. — Про треугольник, кроме того, что он равнобедренный, ничего больше не известно.

— Что вам надо знать про треугольник, чтобы определить радиус вписанной окружности?

После небольшого обсуждения ребята выбирают высоту треугольника H_1 и половину угла при вершине β. Тогда радиус вписанной окружности вычисляется так:

$\mathbf{(H_1 - r_1) \cdot \sin a = r_1}$

$\mathbf{H_1 \cdot \sin a = r_1 \cdot (1 + \sin a)}$

$\mathbf{r_1 = (H_1 \cdot \sin a) / (1 + \sin a)}$

— «Отрежем» от треугольника часть, занятую вписанной окружностью, — напоминаю задание, — и в новый треугольник снова впишем окружность. Определите её радиус r_2 и сравните его с радиусом r_1.

После небольшого обсуждения побеждает идея воспользоваться подобием треугольников.

$\mathbf{r_2/r_1 = H_2/H_1}$,

где H_2 — высота нового треугольника.

H_2 посчитать нетрудно.

$$H_2 = H_1 - 2 \cdot r_1 = H_1 - 2 \cdot (H_1 \cdot \sin a) / (1 + \sin a) =$$
$$= H_1 \cdot (1 - 2 \cdot \sin a / (1 + \sin a)) = H_1 \cdot (1 - b) / (1 + b),$$

где $b = \sin a$.

Значит,

$$r_2 = r_1 \cdot (1 - b) / (1 + b).$$

Предлагаю продолжить вычисление новых радиусов, но дети поступают проще.

— Это же ясно, — говорит Дима, — что все новые треугольники подобны старым. Только индексы у радиусов надо менять.

$$r_3 = r_2 \cdot (1 - b) / (1 + b)$$
$$r_4 = r_5 \cdot (1 - b) / (1 + b)$$

Общими усилиями дети приходят к выводу, что выражения для радиусов представляют собой бесконечно убывающую геометрическую последовательность.

$$r_1 = H_1 \cdot \sin a / (1 + \sin a)$$
$$q = (1 - b) / (1 + b)$$

r_1 — первый член последовательности,

q — знаменатель последовательности.

Ребята приступают к вычислению суммы бесконечно убывающей геометрической последовательности по известной формуле, подставляя в неё выражения для r_1 и q. В этот момент Катя объявляет ответ:

— Сумма радиусов равна половине высоты треугольника.

— Ты что, посчитать успела? — отрывается от своих вычислений Саша.

— Я совсем ничего не считала, — отвечает Катя. — Я просто картинку другую нарисовала.

Она выходит к доске и на готовом чертеже делает небольшие дополнения.

— Сумма диаметров вписанных окружностей даёт как раз высоту треугольника, — объясняет Катя. — Так как радиус в 2 раза меньше диаметра, то и сумма радиусов будет в 2 раза меньше суммы диаметров. *Ответ такой: сумма радиусов всех вписанных окружностей равна половине высоты треугольника.*

Несмотря на полученный Катей ответ, дети доводят свои вычисления до конца. Оба способа определения суммы радиусов дают одинаковый результат, но геометрический — изящнее.