Капризная индивидуальность понятия

Окончание. Начало см.: НО, 2000, № 7, 8.

Сергей КУРГАНОВ, учитель-методист гимназии “Очаг”

Возможно ли теоретическое математическое понятие?

Вернёмся к В.В. Давыдову, обустраивающему дочисловой период. Натуральное число — это математическое понятие, отношение математической величины к мере. Физические приборы — натянутая верёвочка или динамометр — сводят разные качества вещей к физической длине, к протяжённости. Чтобы поставить задачу воспроизведения величин, приводящего к математическому понятию натурального числа (числа “живут” на числовой прямой, мера — это математический отрезок этой же прямой, и всё это — идеальные объекты), нужно свести физическую длину — к длине математической. Нужно построить предметно-деятельностное, теоретическое понятие математической величины.

Здесь возникает парадокс, впервые отмеченный А.М. Ароновым [*Аронов А.М.* Об особенностях учебной деятельности младших подростков // Л.С. Выготский и школа. М., 1994]. Нововременное понятие математической величины, с одной стороны, должно быть понятием теоретическим, то есть возникать в ходе предметно-практического действия и моделирования. С другой стороны, оно должно оставаться математическим понятием. В традиции математики Нового времени лежит стремление быть “царицей наук”, то есть строиться на основе априорных, доопытных предположений. Культура нововременного математического размышления строится по схеме: введём такой-то и такой-то математический объект. Он имеет (по определению) такие-то и такие-то априорные характеристики. Тогда...

Те способы формирования теоретических понятий, которые приводили к открытию физической величины, не годились при работе с величиной математической. С подобной трудностью встретился Я. Дадоджанов, когда попытался выстроить систему теоретических понятий геометрии в развивающем обучении. Он различил геометрию как физику и геометрию как математику. Для построения учебных задач, открывающих школьникам геометрию как физику, достаточно известных методов работы с понятиями. А вот для построения математических понятий точки, прямой, плоскости и пр. требуются новые методы, связанные с “выдумыванием”, изобретением возможных идеальных миров. Здесь нельзя поставить учебно-практическую задачу. Задачи сразу носят учебно-теоретический характер. Квазиисследование сразу осуществляется с идеальными, воображаемыми конструктами. Можно ли сохранить содержательность (предметно-деятельностный характер) усвоения математических (априорных) понятий? Возможны ли теоретические математические понятия?

Ответ неочевиден. В.В. Давыдов лишь сформулировал гипотезу о такой возможности. В практике развивающего обучения дети работают с физическими величинами. Знаковые конструкции (отрезки и буквы) возникают в первом классе как эмпирические обобщения. Натуральное число строится в первом классе как приспособление для решения задачи воспроизведения физических величин. Модель натурального числа — числовая прямая — возникает как понятие эмпирического типа. Учебных задач, открывающих для первоклассника теоретическое понятие прямой и числовой прямой, не ставится. Числовая прямая выступает не как модель теоретического понятия математической величины, а скорее как изображение реальной дороги, на которой откладываются реальные образцы физической длины — мерки.

Иногда возникает трагическое недоумение: а есть ли в экспериментах В.В. Давыдова с понятием хоть один “ведущий частный случай” осуществления, сбывания мечты о возможности теоретического понятия? Или теоретическое понятие есть лишь мечта, “регулятивная идея”, задающая горизонт для психодидактических исследований, а на практике мы вместо теоретических понятий всегда имеем нечто иное? Существуют ли теоретические понятия?

Учитель читает лекции

В исследованиях профессора Красноярского университета А.М. Аронова наметился следующий ответ. Да, теоретическое математическое понятие возможно. Для ребёнка оно возможно не в первом классе, а, скажем, в пятом. В пятом классе ученики развивающего обучения встречаются с построением математической действительности и фигурой математика-профессионала, роль которого играет учитель, но возможна и встреча с настоящим математиком. Он изменяет форму учебной деятельности. Вместо проведения привычных для начальной школы уроков-дискуссий математик начинает читать лекции. Лекция — это особый жанр. Вопросы можно задавать только в конце лекции, а затем обсуждать на семинаре. Перед тем как сформулировать свои вопросы, нужно понять, на какие вопросы отвечает лектор, напряжённо двигаться вместе с его мыслью, законспектировать лекцию в тетради (одновременно усваивая приёмы конспектирования).

Сами лекции могут проходить в форме построения на глазах у слушателей математического понятия величины как априорного и вместе с тем содержательно-теоретического.

Реконструируем логику одной из таких лекций. Цикл лекций, формирующих у пятиклассников содержательно-теоретическое понятие математической величины, был прочитан в гимназии “Универс” г. Красноярска в рамках построения подростковой школы развивающего обучения. Учителя — С. Курганов и О. Францен, руководитель эксперимента А.М. Аронов.

Представим себе, что математик имеет возможность порождать из ничего (вытягивать из точки) сколь угодно длинную прямолинейную конструкцию бесконечно маленькой ширины. Идеальное “вещество”, из которого “изготовляется” подобная конструкция, способно извлекаться из точки и непрерывно распространяться (“ползти”) в одном и том же направлении. Созданная воображением математика конструкция называется математической величиной. С ней математик может производить действие “замораживания”. Он произвольно прерывает процесс непрерывного получения величины и помещает продукт в некий “математический холодильник”. В результате математического замораживания появляется конкретное значение величины a, способное сохранять самотождественность при любых условиях $(a = a)$. С помощью замораживания математик может получить в принципе бесконечное количество различных значений математических величин, которые можно сравнивать, складывать и вычитать. Мы получаем мир отдельных значений математической величины, сохраняющих самотождественность.

В каждом замороженном значении математической величины a — отрезке АВ скрыто движение, впервые порождающее этот отрезок, движение идеального вещества из начала А в конец В. Когда математик выполняет сложение $a + в$ (или АВ + ВС), он выкладывает отрезок АВ сразу весь, так, что путь от А до В проходится мгновенно. Необходимость процесса, некоторого времени для перемещения из А в В скрадывается математическим изделием (произведением математика) — отрезком $a = AB$. Мы сталкиваемся со скрытой процессуальностью скалярной величины. Не случайно В.В. Давыдов говорил, что измерение задаёт динамическую модель величины.

Математик конструирует число

Только теперь математик может поставить перед собой и перед слушателями следующую задачу. Зададим определённое значение скалярной величины и назовём её мерой e. Мы знаем, что любое значение математической величины a может быть получено непрерывным порождением из точки (ползающим, а не шагающим движением) с последующим замораживанием. Нужно ответить на вопрос: возможно ли научиться получать любое значение математической величины иначе, а именно путём откладывания меры e или её долей?

Можно предположить, что эта задача имеет решение. В качестве решения выступает действительное число, которое возникает как теоретическое математическое понятие. Действительное число образуется в ходе решения определённой задачи. Это решение предполагает разворачивание длительного математического эксперимента — преобразования созданной математиком предметной действительности (особой протяжённости), обнаружения её оснований — особенно в ситуации несоизмеримости величины с мерой. Поэтому действительное число возможно как содержательно-теоретическое понятие. Вместе с тем оно возникает как априорно-математическое понятие, так как исходная задача и предметно-преобразующее действие производятся в особом “математическом заповеднике”, в воображаемом, идеальном (единственном, уникальном) пространстве, априорно введённом математиком. Предметное действие здесь является мысленным экспериментом.

Теперь, кажется, всё готово для построения “заповедника”, в котором сможет жить теоретическое понятие натурального числа. Как мы уже знаем, В.В. Давыдову построить такой заповедник не удалось и что таится за теоретическим понятием натурального числа, осталось загадкой. Попытаемся эту загадку отгадать.

Мы вместе с математиком и пятиклассниками, которые слушают его лекции и посещают семинары, задумались над проблемой: можно ли любое значение скалярной математической величины выразить через одно из значений, принимаемых в качестве меры? Или по-другому: существует ли в мире значений скалярной величины мера? Являются ли значения величины некими уникальными “монадами” или они есть продукт отмеривания: качественным своеобразием обладает лишь мера, эталон математической протяжённости, как только она получена — остальное “дело техники”, дело промышленного производства любого значения величины.

Размышления В.В. Давыдова о воспроизведении величин сдвигаются в плоскость обсуждения возможностей измерения как идеального математического экспериментального действия. Ведь пока не изобретены натуральные числа, дроби и иррациональные числа (т.е. конкретные математические понятия), ответ на вопрос о возможности измерения как познавательного математического действия, открывающего нам новые числовые миры, остаётся открытым.

Итак — к делу. В каждом замороженном значении величины *е* сокрыто движение от абсолютного нуля до *е*, от А до В (АВ = *е*). Выкладывая меру *е*, мы получаем возможность бесконечно быстрого перехода от А к В, так как концы математического отрезка А и В касаются математической поверхности (плоскости, на которой производится откладывание) одновременно. Очень многие величины можно легко строить, образуя суммы типа *АД = е + е + е*. Непрерывное “ползание” от А до Д заменяется сложением. Для понимания сложения приходится выстраивать особый “заповедник”, где порождается и живёт идея целого, части, суммы.

Но чем отличается сложение АД = АК + КД (или *АД = а + в*) от сложения: *АД = е + е + е* ? В случае обычного сложения мы имеем образцы величин, меньших данной. Мы образуем из этих частей целое. Движение от А до К закодировано в отрезке АК. Его мы выкладываем сразу весь. Затем следует пауза, остановка, фиксируемая знаком “+”. В паузе мы прилаживаем второй отрезок к первому, ориентируясь на определённую геометрическую структуру (это может быть отрезок, ломаная, но не “крест”). После паузы мы выкладываем сразу весь отрезок КД, то есть сразу всё (мгновенное) образование величины КД (движение от К до Д).

Уже в сложении различных величин: *АД = АК + КД = а + в* воспроизведение величины АД приобретает вполне ощутимый ритм. Натуральное число уже имманентно содержится в акте сложения. Можно сказать, что у целого АД есть части: АК и КД, а можно сказать: у целого есть часть и ещё часть. Ещё очевиднее, если мы предпримем более опосредованное уравнивание: АД = АК + КМ + МД, или *АД = а + в + с*. Мы скажем: АД есть часть, и ещё часть, и ещё часть. Или мы скажем отмеривателю: величина строится (существует) в таком ритме: отложи — прервись, отложи — прервись, отложи — прервись. Чтобы складывать, шагать (а не ползти), необходимо неявно втаскивать в решение задачи воспроизведение величин — идею ритма, то есть представление о чередовании атома и пустоты, действия и остановки, звука и тишины, заполненного и пустоты, наличия вещи и её отсутствия.

Что это за идея? Применительно к задачам измерения — это идея времени. Разные значения величины, с помощью которых мы её воспроизводим, — это разные скорости воспроизведения. Сравнивая части вытянутой из точки величины, то есть сравнивая величину внутри себя самой, мы сравниваем пространственные интервалы, работаем с чистым пространством. Сравнивая замороженные отдельные значения величины друг с другом (*а* больше *в*), мы сравниваем различные скорости измерения.

Чтобы свободно переключать эти скорости, а затем выстроить специальную "коробку передач" (умножение, многоразрядное число, дроби), необходимо научиться складывать одинаковые мерки, то есть воспроизводить величины с постоянной скоростью, равномерно (и прямолинейно). То, что кинематика Ньютона (идея равномерного прямолинейного движения) столь тесно связана с ньютоновской идеей числа, с решением задач "на движение", прошло мимо внимания В.В. Давыдова. Вместе с тем он соединял порождение числа с идеей движения: "Когда человек оперирует со словом, он действует не в идеальном, а лишь в словесном плане. Это обстоятельство было продемонстрировано нами на материале экспериментального исследования, направленного на изучение закономерностей формирования математического действия сложения чисел у детей дошкольного возраста. Было показано, что с "идеальным бытием" словесно заданных чисел — слагаемых — соотносится особая форма идеального действия сложения, связанная со своеобразным ("сквозным") движением руки ребёнка вдоль предполагаемого ряда предметов, которые создают требуемое слагаемое" [*Давыдов В.В.* Проблемы развивающего обучения. М., 1986. С. 33].

Переход к равномерному прямолинейному движению — измерению — связан с идеей постоянной скорости измерения и особым ритмом чередования откладывания одной и той же меры *е* и перерыва между откладываниями. Важен переход от формулы $A = e + e + e$ к формуле $A/e = ooo$, в которой каждый математик и физик с лёгкостью обнаружит длину (А), скорость (*е)* и время (натуральное число).

Ещё очевиднее связь натурального числа с идеей времени обнаруживается в классических заданиях В.В. Давыдова, которые он предлагает детям, чтобы убедиться, что у них сформировано понятие числа. Он предлагает изменить мерку и проанализировать, как изменяется число с изменением мерки. Теоретически мыслящий ребёнок, во-первых, отказывается характеризовать величину определённым натуральным числом, если ему не дана мерка, и, во-вторых, понимает, что с увеличением мерки число уменьшается, и наоборот.

Идея скорости в кинематике Ньютона связана не столько с оформлением интуиции движущегося тела, имеющего определённое количество движения, сколько с отделением скорости от количества движения, что превращает измерение движения в движение измерения. Измерение Ньютона — Давыдова порождает абсолютное (кантовское) пространство — математическую величину и использует идею абсолютного времени мерами зажигающегося и мерами угасающего чередования "бытия" и "ничто". Два этих мира — пространство и время — можно рассматривать независимо друг от друга. Аксиомы математической величины в явном виде идеи числа не содержат. Аксиомы Пеано, которые можно трактовать как описание мира чистых ритмов — мира времени как такового — в явном виде не содержат пространственных характеристик. Можно сказать и иначе. Актом измерения, актом встречи пространства со временем, пространство и время впервые порождаются как независимые миры. Именно благодаря своей независимости они могут взаимодействовать, образуя декартово пространство — время: систему координат, в которой одна из осей — временная, а вторая — пространственная.

С другой стороны, вне идеи ритма пространство может описываться лишь топологически. Переход к метрическому пространству, как мы уже видели, неявно эксплуатирует идею ритма. И наоборот, натуральное число как чистое время, как смена единицы и нуля, атома и пустоты, события и его отсутствия достаточно легко ускользает при исследовании, если его не изображать с помощью пространства, не вписывать в пространство. Так возникают метки — одинаковые протяжённые вещи, разделённые пустотой. Метки, в отличие, скажем, от метронома, настраивающего наш слух, способны ритмизировать и наше зрение. Мы можем изобразить и увидеть ритм как протяжённость. Вообще часы — это интересный прибор, который, являясь заповедником для поддержания бытия времени, равно как и заповедником для натурального числа, настраивает наше зрение и наш слух на восприятие и удержание ритма. Заметим также, что изображение события понятия на доске (или на тетрадном листе), к которому всегда стремится учитель, организуя диалог с детьми, можно трактовать как обустроение пространства жизни понятия (в смысле М. Хайдеггера).

В пифагорейской математике число, возможно, рассматривалось и вне идеи времени, как пространственная структура, как прекрасное произведение, как скульптура. Д.Я. Стройк замечает, что пифагорейские фигуры значительно старше пифагорейского числа, так как некоторые из них мы находим в неолитической керамике [*Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1990]. Да и само движение мыслилось как покой, как статичное напряжение, как орудие, чреватое возможным движением. Декартова переменная величина разрушила этот мир, возникший как ответ на апории Зенона, и вместе с этим внесла в математику движение и диалектику (Ф. Энгельс). Последствия диалектического понимания математики мы и попытались здесь проанализировать.

В.В. Давыдов и вечные проблемы бытия

Деятельностный подход, разворачивающий акты познания и выращивающий понятия — орудия осуществления этих актов, учит нас понимать число как отношение величин. Мы попытались понять "давыдовское" число не только как орудие, но и как проблему. Понять как проблемное, не равное себе, удивительное, парадоксальное орудие — "давыдовское" число оборачивается "вечными проблемами" бытия пространства и времени, протяжённости и ритма. Но эта вечность — особая. Речь идёт о вечных проблемах, которые возникают в мире, понятом как предмет научного познания. "Давыдовскую" математику можно развернуть диалогически. Но это всё же будет диалог внутри познающего разума. Конечно, учитель математики, идущий к первоклассникам или к пятиклассникам с идеей построения "заповедника", в котором будет жить проблемное, не равное самому себе, внутренне-вопросительное понятие числа как отношения величин, — окажется в более выгодном положении, чем учитель, который полагается только на учебники развивающего обучения и методические пособия к ним. Но всё же, отправляясь к детям, учитель способен сделать ещё один шаг — начать разбираться с современным диалогическим понятием и с историей становления понятий. В.В. Давыдову не удалось даже в снятом виде включить в нововременное понятие числа античное, средневековое и современное понимания. Как ни проблематизируй практику измерения, не вырвешься из кантовского абсолютного пространства, которое само себя измеряет с помощью чисел — ритмов, живущих где-то вне пространства и, по существу, непознаваемых. Натуральное число остаётся "вещью в себе".

Наши наблюдения показывают, что только часть учащихся младших и подростковых классов склонна мыслить и представлять математический мир таким, каким его видит и мыслит В.В. Давыдов. Другие интуиции детей, которые могли быть культурно проинтерпретированы как близкие к античному, средневековому и современному пониманию математики, не могут подхватываться и включаться в работу учителями развивающего обучения в силу их ориентации исключительно на нововременное понимание числа. Мало того, даже в рамках этого подхода забываются исходные математические проблемы, загадки и парадоксы (нововременного разума), ради разрешения которых В.В. Давыдов построил свою величинную версию математики. Его величинная математика начинает выступать как полностью завершённая, лишённая внутренних парадоксов и трудностей, как то, что написано в учебниках и требует лишь присвоения.

Так, В.В. Давыдов, В.И. Слободчиков и Г.А. Цукерман пишут: "...уникальной попыткой решения вопроса о том, в какой форме ребёнку может быть представлено его меняющееся Я (вчерашнее, сегодняшнее, завтрашнее), является опыт С.Ю. Курганова [*Курганов* С.Ю. Ребёнок и взрослый в учебном диалоге. М., 1989], разработавшего технику порождения и фиксации детских "монстров" (термин И. Лакатоса) — промежуточных образов, гипотез, догадок, которые становятся реальным орудием ненормированной мысли ребёнка, средством удержания и обнаружения своего индивидуально-неповторимого видения мира. Но своеобразная “майевтика” С.Ю. Курганова имеет своё жёсткое ограничение: она работает в области “вечных” вопросов, которые заведомо не имеют однозначных, нормативных ответов и возникают на границе известного и не известного никому. Мы же, строя учебную деятельность, говорим о движении ребёнка от известному к не известного ему лично, но написанному в учебниках, о том, как ребёнок делает фиксированный в учебнике (ничей, анонимный) культурный опыт своим собственным (осваивает его)” [*Давыдов В.В., Слободчиков В.И., Цукерман Г.А.* Младший школьник как субъект учебной деятельности//Вопросы психологии. 1992. № 4. С. 17].

Не время и не место обсуждать, как выглядят в системе координат выдающихся специалистов развивающего обучения наши исследования учебного диалога. Для этого нужно развернуть встречную аргументацию и изложить теоретические основы Школы диалога культур. Удивляет другое. Противопоставляя развивающее обучение и школу диалога культур, учебную дискуссию и учебный диалог, В.В. Давыдов, В.И. Слободчиков и Г.А. Цукерман чрезмерно суживают представление о РО, хотя бы в сравнении с ранними работами В.В. Давыдова. С точки зрения В.В. Давыдова, изложенной в классических исследованиях, неверно полагать, что в учебной деятельности ребёнок движется к тому, что написано в учебниках. Может быть, такая редукция и произошла при обучении русскому языку, когда вместо многообразия возможного учебного содержания и дискуссий об основаниях исходных понятий разработчики перешли к одной (и единственно верной) концепции В.В. Репкина. Может быть. Но в области преподавания математики ничего похожего, к счастью, не произошло. О каком учебнике идёт речь? Если в лингвистике таким учебником, к которому можно редуцировать норму размышлений о родном языке, можно считать книгу М.В. Панова “Русская фонетика” [*Панов М.* Русская фонетика. М., 1967], то в математике учебника, в котором излагалась бы давыдовская концепция величины и числа, не существует. В.В. Давыдов создал не учебник под названием “Вот, уважаемые разработчики, как теперь надо понимать число”, не новую норму понимания числа. Он публично размышлял о сущности натурального и действительного числа, искал ту родовую предметную деятельность, которая с необходимостью приводит к теоретическому понятию числа. Ни в каких учебниках “норма” этой деятельности не дана, ибо авторы учебников математики вовсе не озабочены деятельностным построением своего предмета. В.В. Давыдов призывал математиков, физиков, психологов, педагогов начать исследования родовой предметной деятельности воспроизведения величин, которая, по гипотезе В.В. Давыдова, должна была ввести ребёнка и взрослого в мир теоретического понятия числа. Эта работа была начата В.В. Давыдовым и поддерживалась его учениками. Было выстроено несколько учебно-практических ситуаций, деятельностно порождающих разные грани понятия числа: введение умножения, многоразрядного числа, обыкновенной и позиционной дроби, отрицательного и комплексного числа. При этом вскрылись существенные трудности и проблемы, о которых мы частично сказали выше. Даже в начальных классах при построении самых элементарных числовых форм далеко не весь математический материал “упаковывался” в соответствии с логикой восхождения от абстрактного к конкретному. На каждом этапе “сведения — восхождения” возможность существования содержательно-теоретического понятия числа выступает не как норма, а как проблема.

Приведём совсем простой пример “капризности” конкретного математического понятия. Понятие дроби, по исходному замыслу В.В. Давыдова и Ф.Г. Боданского, формируется у учащихся третьих классов. Именно в третьем классе были размещены две принципиальные для развития теоретического мышления детей учебные ситуации: воспроизведение величин, меньших, чем стандартная мера, и воспроизведение направленных величин. Обе ситуации радикально изменяли сложившееся у детей понятие натурального числа и позволяли входящим в подростковый кризис учебному сообществу с новых позиций посмотреть на своё ученичество в начальной школе. Способом решения задачи воспроизведения величин, меньших, чем мера, является переход к измерению величин, происходящему в два этапа. На первом этапе стандартная мера изменяется так, чтобы ею было удобно измерять величину. На втором этапе производится измерение величины изменённой мерой. Результатом этого предметно-преобразующего действия является новый математический объект — пара натуральных чисел. Первое число “рассказывает” о том, как мы изменяли стандартную меру, а второе число — как применять новую меру. В первом и втором классе подобный способ действия активно использовался для решения задачи воспроизведения величин, много больших меры, и приводил к понятиям произведения (умножения) и многоразрядного числа. В третьем классе этот способ нужно конкретизировать. Первое натуральное число (знаменатель) указывает, на сколько равных долей нужно раздробить меру, а второе число (числитель) указывает, сколько раз нужно взять уменьшенную меру.

Мы получаем теоретическое понятие “дроби вообще”, исходную клеточку для построения содержательного понятия дроби во всех её модификациях, вплоть до позиционной систематической дроби — двоичной, десятичной и пр. Но получаем ли мы здесь теоретическое понятие обыкновенной дроби, например, такой, как 1/3? Думается, нет. И вот почему. Чтобы третьеклассник образовал понятие обыкновенной дроби, он должен так конкретизировать сложившееся в учебном сообществе умение воспроизводить величины, чтобы научиться делить меру на 3 равные доли, на 5 равных долей и так далее. Это обстоятельство прошло мимо внимания В.В. Давыдова и Ж. Цветковича, которые активно критиковали “наглядную концепцию дроби”, принятую в школьной математике, как раз за то, что детям предлагают работать с объектами, уже разделёнными на равные доли, и называть эти объекты новыми словами. Состав предметного действия, порождающего конкретное, частное, индивидуальное понятие обыкновенной дроби, В.В. Давыдов не исследует, как и не исследует состав предметного действия, порождающее конкретное понятие натурального числа. Нормативный ответ на вопрос о том, как разделить отрезок e на нужное количество равных долей, в математических учебниках имеется. Решение этой задачи нашёл древнегреческий философ Фалес. Он предложил построить угол. На одной стороне этого угла Фалес откладывал тот отрезок, который нужно раздробить, скажем, на 3 равные доли. А на второй стороне угла откладывал три любых равных отрезка. Соединяя конец последнего отрезка с концом того отрезка, который нужно раздробить, Фалес проводил параллельные прямые, рассекающие наш отрезок на нужное количество частей.

Очевидно, что ни о каком восхождении от абстрактного к конкретному здесь речи нет. Понятия угла, параллельности, подобия “втягиваются” в ситуацию измерения-отмеривания, а не порождаются из неё. Формирование конкретного понятия обыкновенной дроби требует не конкретизации, а коренного преобразования всей предметной основы сложившегося действия. Ещё в 70-е годы, работая под руководством В.В. Давыдова и Ф.Г. Боданского, мы обратили внимание на то, что каждый новый “узел конкретизации” теоретического понятия числа требует разработать его “геометрическое обеспечение”. Для дробей нужны параллельность и подобие, для отрицательных чисел — векторы и центральная симметрия (поворот на 180о — образование вектора, противоположного направленной мере), для комплексных чисел нужно владеть идеями поворота, гомотетии, перпендикулярности. Опять возникает вопрос: а существует ли на самом деле восхождение от абстрактного к конкретному, описанное Э.В. Ильенковым, или это — недостижимый идеал, к которому должно стремиться формирование теоретических понятий, на деле никогда не достигая чистоты и последовательности?

Но что теперь значит теорема Фалеса, когда она втянута в акт измерения-отмеривания величин? Две “оси” — две стороны угла, соотнесённые параллельными прямыми, есть особый прибор, превращающий время в пространство, а пространство — в измеряемую величину. Этот прибор есть теоретическое понятие числовой прямой.

В учебниках развивающего обучения для первого класса дети работают с эмпирическим понятием числовой прямой. Это та дорожка, на которой располагаются результаты измерения — натуральные числа. Использовать эмпирическое понятие числовой прямой для построения дробей не удаётся: нет способа построения дробей, нет прибора для перехода к дробным мерам. Теоретическое понятие числовой прямой есть способ построения любого целого и дробного числа. Теоретическое понятие числовой прямой есть угол, совокупность двух лучей. Первый луч — это величина, первоначально полученная непрерывным движением точки О. Это — длина или пространственная координата, то, что в математике называют осью *x*. Второй луч — это “ось *t*”, временная ось. Здесь в виде одинаковых пространственных интервалов (отрезков) изображены метки — натуральные числа. В виде бесконечного количества одинаковых отрезков изображён ритм счёта, множество меток — “разов”. Эти “разы” сосчитываются, так появляются (на временной оси) натуральные числа 1, 2, 3 — временные координаты.

Заметим, что время может выражаться только натуральными числами. Половины, трети, четверти единицы (метки, темпа, отдельности) не существует. Единица, метка, отдельность неделима и представляет собой квант времени: “раз”. Временная ось существует вечно, тождественна сама себе и является упорядоченным множеством натуральных чисел — задающих ритм будущего измерения. Измерения ещё нет, но временная ось уже есть, она сама себя измеряет, впрок “тикает”, ожидая величину. Пространственные оси “приходят и уходят”, превращаясь при встрече со временем в шкалы (температуры, веса и пр.), в линейки. Произвольно проводя первую из будущих параллельных прямых, мы разрезаем пространственную ось и получаем меру *е*. Число “один” у нас уже было до измерения, а теперь с помощью этого числа (единицы времени) мы задаём скорость, с помощью которой будем отмеривать величину. Проводя остальные параллельные прямые, мы выстраиваем множество натуральных чисел (скоростей) на оси *x*. Чтобы получить на этой же оси множество рациональных чисел, нужно научиться произвольно замедлять измерение, изменяя угол падения параллельных лучей.

Не очень ясна деятельностная природа этого процесса установления подобия осей. Можно, например, мыслить числа 1, 2, 3... на оси времени как некие “столбики”, а параллельные прямые — как тени этих столбиков, возникающие при освещении данного прибора лучами света. Тогда прибор Фалеса превращается в проективное пространство и мы получаем шанс деятельностного определения проективной геометрии и проективного (а не метрического, как в обычных учебниках) понимания параллельности. Информация о ритме распространяется со скоростью света, а не мгновенно, как при откладывании отрезка. Кроме того, наш прибор очень уж напоминает пространственно-временные диаграммы, на которых обычно иллюстрируют справедливость частной теории относительности. Случайно ли это?

Из-за чего построение столь важной для Г.А. Цукерман нормы научного познания оборачивается процессом открытого, незавершённого (и в этом смысле — принципиально ненормируемого) размышления, так и не приводящего учёного к созданию однозначной и устойчивой знаковой конструкции, которую потом можно поместить в учебник и объявить нормой?

Это происходит именно потому, что учёный (В.В. Давыдов) героически стремится к невозможному: построить содержательно-теоретическое математическое понятие. В.В. Давыдов предлагает гениальную мыслительную авантюру: заново выстроить всю математику (или хотя бы существенный её раздел) так, чтобы это была та же самая математика (например, чтобы в ней были обыкновенные дроби), но при этом все её понятия были деятельностно обоснованы и поняты как развёртывание единой “клеточки”, как решение единой задачи. И это никакая не норма научного размышления, которую можно зафиксировать в учебниках, а очень красивая и спорная исследовательская программа. Причём вовсе не с гарантированным позитивным исходом осуществления. Вполне возможно, утопия. Вполне возможно, теоретическая авантюра, порождающая при попытке последовательного и ответственного осуществления глубокие и продуктивные вопросы, “монстры”, парадоксы. И эти монстры и парадоксы, “вечные проблемы бытия”, возникают не на обочине нормативно обустроенной дороги “восхождения”, а как раз в самой сердцевине строящихся теоретических понятий, на самом что ни на есть магистральном пути их построения.

Именно эта авторская исследовательская программа В.В. Давыдова по созданию иной, деятельностно понятой, математики есть вожделенная “норма” взрослой, идеальной жизни, которая может быть положена в основу развивающего обучения математике. Создание такой “нормы” (идеальной формы) жизни взрослых людей и включение в её построение и удержание школьников сразу вводит нас в область “вечных” проблем, загадок и парадоксов, которых никогда не старался избегать В.В. Давыдов.

В.В. Давыдов создавал новый культурный опыт обращения с понятиями. Этот опыт не является “анонимным”, “ничьим”. Это — авторская версия понимания науки в целом, за которую В.В. Давыдов никогда не боялся нести ответственность. И когда Вы, уважаемая Галина Анатольевна, вводите своих первоклассников в мир отдельных звуков, изображаемых метками, а затем — в мир теоретического понятия фонемы, Вы выступаете отнюдь не как носитель и транслятор анонимного, “ничейного” знания, зафиксированного в учебнике. Нет, Вы предлагаете Вашим детям совершить многолетнюю мыслительную авантюру, вооружившись очень красивой, очень привлекательной, но чрезвычайно сомнительной, антиномичной, парадоксальной, спорной версией понимания того, что есть современный русский язык. И это замечательно, что Вы не транслируете детям нормативные знания, а сразу включаете в сложный процесс создания и удержания особого, оригинального, авторского (автор В.В. Давыдов; автор В.В. Репкин) видения предмета познания. Только будем отдавать себе отчёт, что и при звуковом анализе, и при выделении сильных и слабых позиций звуков, и при составлении орфографической тетради происходит именно это, а вовсе не превращение фиксированного в учебниках анонимного нормированного опыта — в индивидуальное достояние ребёнка.

Добросовестное формирование теоретического понятия, тщательная и без купюр реализация исследовательской программы В.В. Давыдова превращает теоретическое понятие в вариант диалогического понятия, понятие — в проблему, в “вечный вопрос бытия”. Без углубления в вечные вопросы бытия теоретическое понятие уже и понятием не является, превращаясь в средство решения задач. Другое дело, что диалогизм нововременных (“теоретических”) понятий обнаруживается именно в ходе осуществления героической попытки решить возникшую задачу с помощью развития (от абстрактного к конкретному) исходного понятия, без привлечения понятий эмпирического типа. Каждый раз продумывание до конца возможности такого “восхождения” обнаруживает глубинные трудности, странности, парадоксы, “вечные вопросы”, загадки, превращающее “теоретическое” понятие — в нововременное диалогическое понятие. Это понятие всегда стремится стать орудием, машиной, средством решения задач, в конечном счёте — учебником, совокупностью культурных норм. Но это ему никогда не удаётся до конца. В явном виде это борение внутри нововременного диалогического понятия реконструировано (или, вернее сказать, сконструировано) Галилео Галилеем в диалоге Сальвиати, Симпличио и Сагредо и глубоко проанализировано В.С. Библером [*Библер В.С.* Мышление как творчество. М., 1975]. Эти же логические процессы мы обнаруживаем в мышлении и деятельности В.В. Давыдова — “последнего гегельянца XX века”.

г. Харьков