

Мы решаем уравнения...

Борис ДРУЖИНИН, педагог

В этом номере, так же как и в предыдущем (см. «НО» № 9, 2000; № 2, 5–7, 2001) автор общедоступной технологии «изобретения» развивающих мышление задач предлагает задания адресно — ученикам четвертых-пятых классов.

18 сентября

Занятие заканчивается, дети играют в MEMORY. Мы со старшей сестрой Насти Аней пытаемся найти ошибку в решении задачи. Задача такая.

Грузовые машины перевозили груз. Машины были двух типов — маленькие и большие. В маленькие помещалось 1,7 тонны груза, в большие — 2,4 тонны. Всего было девять машин. Машины нагружались полностью, и в них всех вместе было нагружено 18,1 тонны груза. Сколько машин каждого типа перевозили груз?

Аня записывает своё решение на доске:

x — число маленьких машин;

y — число больших машин;

всего машин $x + y = 9$;

в маленькие машины нагрузили $1,7x$ т груза;

в большие машины нагрузили $2,4y$ т груза;

всего было погружено $1,7x + 2,4y = 18,1$ т груза;

получается система из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$x + y = 9$$

$$1,7x + 2,4y = 18,1,$$

из первого уравнения следует $y = 9 - x$;

при подстановке этого выражения во второе уравнение получается

$$1,7x + 2,4(9 - x) = 18,1,$$

или

$$1,7x + 21,6 - 2,4x = 18,1.$$

Тут Аня немного напутала со знаками:

$$-0,7x = 39,7.$$

Разобравшись, она легко получила правильный ответ. Дети давно бросили игру и с интересом следят за нами.

— Мы похожие задачи уже решали, — замечает Катя, — только не знаем, что с такими числами делать.

Дроби дети ещё не изучали. Заменяю дробные числа целыми, и теперь задача выглядит так.

Грузовые машины перевозили груз. Машины были — маленькие и большие. В маленькие машины помещалось две тонны груза, в большие — три тонны. Всего было девять машин. Машины нагружались полностью, и в них всех вместе было нагружено 22 тонны груза. Сколько машин каждого типа перевозили груз?

— Мы сделаем так, — сразу предлагает Саша, — все машины будут одинаковые, только к большим машинам ещё прицеп сзади приделаем. В прицеп как раз лишняя тонна помещается. Машин — девять штук и в каждую по две тонны погрузим. Всего — 18 тонн.

— А в прицепы оставшиеся 4 тонны поместятся, — продолжает Настя. — В каждый прицеп по одной тонне.

Останавливаю Настю и спрашиваю у всех.

— Сколько прицепов получается?

— Ясно сколько, четыре прицепа, — первым отвечает Костя.

— Мы договорились, что большая машина — это машина с прицепом, — напоминаю детям и продолжаю спрашивать. — Так сколько больших машин в ответе получается?

— Больших машин получается четыре штуки.

— А маленьких машин было пять штук.

— Здорово получается! — Аня вполне довольна разбором задачи. — А как мне всё это в тетради записать?

— Умножь первое уравнение твоей системы на 1,7 и потом вычти его из второго, — предлагаю Ане проделать на языке алгебры то, что дети выполнили с помощью простых арифметических действий.

Аня производит вычисления на доске:

$$x + y = 9 \quad | \cdot 1,7$$

$$1,7x + 2,4y = 18,1 \quad | \cdot$$

Теперь система уравнений выглядит так:

$$1,7x + 1,7y = 15,3$$

$$1,7x + 2,4y = 18,1$$

После вычитания получилось уравнение с одним неизвестным:

$$0,7y = 2,8$$

$$y = 4.$$

2 октября

— Дюймовочка, Мальчик-с-пальчик и Маленький Гномик завтракали. Дюймовочка съела два кукурузных зёрнышка, выпила две капли росы и поправилась от этого на пять граммов. Мальчик-с-пальчик съел восемь кукурузных зёрнышек, запил шестью каплями росы, от чего поправился на 19 граммов. Маленький Гномик съел десять кукурузных зёрнышек и выпил восемь капель росы. На сколько граммов поправился Маленький Гномик?

— Мы ничего не успели запомнить, — первой реагирует Катя.

— У нас все задачи в задачнике записаны, — поддерживает её Дима. — Мы на все числа сколько угодно раз посмотреть можем.

Дети правы, это моя оплошность. Условия подобных задач надо предлагать в письменном виде. Чтобы исправить положение, записываю на доске числовые данные задачи в виде таблицы. Конечно, можно составить систему из двух линейных уравнений, решив её, определить вес одного зёрнышка кукурузы и одной капли росы, а после этого определить прибавку в весе Маленького Гномика. Но дети в своё время научатся составлять и решать системы уравнений и без наших занятий. Опережать школьную программу совсем ни к чему. Идея этих задач совсем другая.

Заполненная таблица выглядит так (см. табл. 1).

	Зёрна	Капли	Граммы
Дюймовочка	2	2	5
Мальчик-с-пальчик	8	6	19
Маленький Гномик	10	8	?

Предлагаю детям внимательно посмотреть на эту таблицу и попытаться сделать какие-нибудь выводы.

— Так капли разные бывают, — замечает Костя. — Может, у Дюймовочки и Мальчика-с-пальчика капли совсем маленькие были, а у Гномика по полведра каждая капля была. Так он сразу толстым станет.

— Давайте договоримся, — отвечаю Косте, — что все кукурузные зёрна имеют один и тот же вес и все капли росы тоже одинаковые. И вообще в подобных задачах подразумевается, что все предметы с одинаковыми названиями обладают одинаковыми свойствами и параметрами: весом, размером, объёмом и т.д. Если они разные, то это специально отмечается.

Дети задумываются, с такими задачами они ещё не встречались. Первой догадывается

Лена.

— Посмотрите, — говорит она, — Маленький Гномик один съел за завтраком столько же, сколько Дюймовочка и Мальчик-с-пальчик вместе. Значит, и поправился он на столько же граммов, на сколько поправились вместе Дюймовочка и Мальчик-с-пальчик. **Маленький Гномик поправился на 24 грамма.**

Лена выходит к доске, вместо знака вопроса вписывает в таблицу число 24 и отдельно пишет действие задачи:

$$5 + 19 = 24.$$

15 октября

Учитывая ошибки прошлого, задачи с большим количеством чисел в условии распечатываю в нескольких экземплярах и вручаю детям. Очередная задача такая:

— **Пятачок, Винни-Пух и Крошка Ру собирались в поход на Северный полюс. Пятачок купил три банки сгущённого молока и две булочки и заплатил за это 14 шишек. Винни-Пух купил пять банок сгущённого молока и три булочки и заплатил за это 23 шишки. Крошка Ру купил две банки сгущённого молока и одну булочку. Сколько шишек заплатил Крошка Ру за свою покупку?**

Дети быстро составляют таблицу, не подозревая, что тем самым составляют систему линейных уравнений.

	Банки	Булочки	Шишки
Пятачок	3	2	14
Винни-Пух	5	3	23
Крошка Ру	2	1	?

Решение объясняет Тамара.

— Из таблицы видно, — говорит она, — что Пятачок и Крошка Ру вместе купили ровно столько, сколько Винни-Пух купил один. Значит, и заплатить они вдвоём должны столько же, сколько Винни-Пух.

— **Винни-Пух заплатил за свои покупки 23 шишки, — продолжает Валя, — Пятачок заплатил 14 шишек за свои. Значит, Крошка Ру заплатил 9 шишек.**

$$23 - 14 = 9 \text{ или } 14 + 9 = 23.$$

Напоминать, что все банки одинаковые, булочки одинаковые и шишки одинаковые, уже не надо, это дети усвоили с первого раза.

28 октября

Предлагаю детям задачу, очень похожую на предыдущие. Отличается она тем, что системе уравнений, составленную по условию задачи, решить подстановкой просто нельзя. Однако этого для решения задачи и не требуется.

— **Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алёша Попович остановились переночевать в гостинице «Богатырский Приют». Илья Муромец заказал себе на ужин семь жареных кур, три бочонка пива, три каравая хлеба и три воблы. Добрыня Никитич заказал четыре жареные курицы, один бочонок пива, два каравая хлеба и три воблы. Алёша Попович заказал три жареные курицы, два бочонка пива и один каравай. Добрыня Никитич заплатил за свой ужин 34 гривны, Алёша Попович заплатил 31 гривну за свой. Сколько стоит ужин Ильи Муромца?**

Дети уже, можно сказать, привычно заполняют таблицу (см. табл. 3), нисколько не задумываясь о существовании каких-то там систем уравнений и возможности их решить.

	Куры	Бочонки	Каравай	Вобла	Гривны
Илья Муромец	7	3	3	3	?
Добрыня Никитич	4	1	2	3	34
Алёша Попович	3	2	1	0	31

Сравнить между собой числа в таблице — дело одной минуты. Способ решения таких задач дети уже освоили, правда, для специально подобранных начальных данных.

Решение задачи объясняет Настя.

— **Илья Муромец заказал на ужин столько же, сколько Добрыня Никитич и Алёша Попович вместе. Значит, ужин Ильи Муромца стоит столько, сколько заплатили его товарищи вместе:**

$$34 + 31 = 65.$$

15 ноября

Новая задача не сложнее тех, что мы уже решали. Однако помимо закрепления навыков решения она готовит детей к решению будущих задач.

— **На дне рождения у Крошки Ру Пятачок съел одну банку сметаны, один торт и четыре конфеты. Винни-Пух съел три банки сметаны, два торта, 22 конфеты и выпил две бутылки рыбьего жира. Тигра съел шесть банок сметаны, четыре торта, 38 конфет и выпил четыре бутылки рыбьего жира. Кролик съел две банки сметаны, один торт, 12 конфет и выпил две бутылки рыбьего жира. Пятачок поправился на один кг, Винни-Пух поправился на пять кг, Кролик поправился на три кг. На сколько поправился Тигра?**

Число действующих лиц в задаче увеличено, но заполнение таблицы ни у кого не вызывает затруднений.

	Сметана	Торты	Конфеты	Рыб. жир	Кг
Пятачок	1	1	4	0	1
Винни-Пух	3	2	22	2	5
Тигра	6	4	38	4	?
Кролик	2	1	12	2	3

Из аккуратно составленной таблицы видно, что Тигра съел столько же, сколько его три друга вместе. Значит, и поправился он на столько же килограммов, на сколько Пятачок, Винни-Пух и Кролик вместе.

Тигра поправился на $1 + 5 + 3 = 9$ кг.

20 ноября

Постепенно усложняю задачи.

— **При осаде форта Ла-Рошель Атос захватил в качестве трофеев сто пленных, две бочки вина, два флага, одну пушку и один платочек для королевы. Трофеи Портоса — двести пленных, одна бочка вина, два флага, одна пушка и два платочка для королевы. Арамис захватил сто пленных, три бочки вина, один флаг, две пушки и четыре платочка для королевы. Д'Артаньян захватил двести пленных, пять бочек вина, два флага, три пушки и пять платочков для королевы. Король за эти подвиги наградил их. Атос получил 16 дукатов, Портос — 28 дукатов, Арамис — 48 дукатов. Сколько дукатов получил от короля Д'Артаньян?**

Таблицу дети заполняют быстро, но с ответом никто не торопится.

	Пленные	Бочки	Флаги	Пушки	Платки	Дукаты
Атос	100	2	1	1	1	16
Портос	200	1	2	1	2	28
Арамис	100	3	1	2	4	48
Д'Артаньян	200	5	2	3	5	?

— Что же делать? — спрашивает Саша. — Если сложить Атоса, Портоса и Арамиса, то Д'Артаньян никак не получается.

— Попробуйте посмотреть на таблицу внимательнее. Из неё ответ задачи получить можно довольно легко.

После небольшой паузы к верному решению первой приходит Оля.

— Д'Артаньян захватил трофеев ровно столько же, сколько Атос и Арамис вместе, — говорит она. — Получить в награду он должен дукатов столько же, сколько и Атос с Арамисом вместе.

Д'Артаньян получил $16 + 48 = 64$ дуката.

27 ноября

Продолжаю усложнять задачи.

— Атос шесть раз дрался на дуэли, рассказал семь анекдотов про кардинала, два раза уснул в карауле, три раза чихнул в присутствии королевы, за что получил в общей сложности 89 суток ареста. Портос дрался на дуэли четыре раза, рассказал один анекдот про кардинала, уснул в карауле двенадцать раз и одиннадцать раз чихнул в присутствии королевы, за что получил 85 суток ареста. Арамис два раза дрался на дуэли, рассказал шесть анекдотов про кардинала, семь раз уснул в карауле и чихнул в присутствии королевы двенадцать раз, за что и получил 109 суток ареста. Что касается Д'Артаньяна, то он дрался на дуэли восемь раз, рассказал два анекдота про кардинала, уснул в карауле семь раз и два раза чихнул в присутствии королевы. Сколько суток ареста получил Д'Артаньян?

Заполняют таблицу дети быстро.

	Дуэль	Анекдот	Сон	Чихнул	Арест
Атос	6	7	2	3	89
Портос	4	1	12	11	85
Арамис	2	6	7	12	109
Д'Артаньян	8	2	7	2	?

Однако дальше дело слегка тормозится. Как дети ни пытаются «складывать мушкетёров», Д'Артаньян не получается ни в каком варианте. Наконец Катя обращает внимание на некоторые особенности подбора чисел в таблице.

— Атос и Портос вместе вели себя точно так же, как Арамис и Д'Артаньян вместе, — объясняет она. — Атос и Портос заслужили вместе $89 + 85 = 174$ суток ареста. Столько же заслужили вместе и Арамис с Д'Артаньяном.

$$89 + 85 = 109 + ?$$

$$? = 89 + 85 - 109 = 65.$$

Д'Артаньян самостоятельно заслужил 65 суток ареста.

2 декабря

— Собираясь в далёкое путешествие, друзья закупили продукты. Крошка Ру купил одну банку сгущённого молока, один пряник, одну конфету и заплатил за это одиннадцать шишек. Пятачок купил три банки сгущённого молока, четыре пряника, десять конфет и заплатил за это 43 шишки. Винни-Пух купил пять банок сгущённого молока, шесть пряников, двенадцать конфет. Сколько шишек заплатил Винни-Пух за свои покупки?

Дети аккуратно заполняют таблицу.

	Банки	Пряники	Конфеты	Шишки
Винни-Пух	5	6	12	?
Пятачок	3	4	10	43
Крошка Ру	1	1	1	11

Эта задача им кажется проще предыдущих. В ней меньше героев и меньше разных чисел. Но в отличие от тех задач сумма покупок Пятачка и Крошки Ру не совпадает с суммой покупок Винни-Пуха. Дополнительных вопросов дети не задают, так как знают ответ: «Посмотрите внимательно на таблицу». Собираюсь обратить внимание детей на то, что если

сложить по пунктам покупки Пятачок и Крошки Ру, то легко заметить, что до Винни-Пуха им не хватает как раз покупок Крошки Ру. Значит, стоимость покупок Крошки Ру надо учесть два раза.

В этот момент Катя предлагает своё решение.

— К друзьям присоединился Кролик, — говорит она, — и купил всё то же, что и Крошка Ру. Кролика надо вписать в таблицу.

	Банки	Пряники	Конфеты	Шишки
Винни-Пух	5	6	12	?
Пятачок	3	4	10	43
Крошка Ру	1	1	1	11
Кролик	1	1	1	11

— Теперь Пятачок, Крошка Ру и Кролик все вместе купили ровно столько, сколько один Винни-Пух, — продолжает Катя. — Значит, они все вместе заплатили столько, сколько Винни-Пух.

Запись самого решения у Кати ничем не отличается от того, что я хотел предложить.

$$43 + 11 + 11 = 65 \text{ шишек.}$$

10 декабря

— За завтраком Дюймовочка съела один лепесток розы, одно кукурузное зёрнышко и запила двумя каплями росы. Маленький Гномик съел семь лепестков розы, пять кукурузных зёрнышек и выпил шесть капель росы. Мальчик-с-пальчик съел четыре лепестка розы, три кукурузных зёрнышка и выпил четыре капли росы. После этого Дюймовочка поправилась на четыре грамма, Маленький Гномик поправился на 20 граммов. На сколько граммов поправился Мальчик-с-пальчик?

Заполненная таблица выглядит так.

	Лепестки	Зёрна	Капли	Граммы
Дюймовочка	1	1	2	4
Гномик	7	5	6	20
Мальчик-с-пальчик	4	3	4	?

Дети, уже освоившие некоторые способы решения подобных задач, складывают, вычитают различные числа из таблицы, надеясь получить набор Мальчика-с-пальчика, но у них ничего не получается. Наконец Саша обращает внимание на то, что Дюймовочка и Маленький Гномик вместе съели за завтраком в два раза больше, чем один Мальчик-с-пальчик. После этого решение становится понятным всем.

— Надо сложить прибавки в весе Дюймовочки и Маленького Гномика и разделить пополам. Это и будет привес Мальчика-с-пальчика, — объясняет Тамара и записывает на доске:

$$\text{ке: } \frac{(4 + 20)}{2} = 12 \text{ граммов.}$$

16 декабря

Немного изменяю вопрос задачи.

— Собираясь в космический полёт на Марс, друзья запаслись продуктами. Винни-Пух купил пять банок сгущённого молока и десять пряников и заплатил за них 45 шишек. Пятачок купил три банки сгущённого молока и шесть пряников и заплатил за них 27 шишек. Крошка Ру купил одну банку сгущённого молока, четыре пряника и заплатил за них 13 шишек. Сколько шишек стоит одна банка сгущённого молока?

	Банки	Пряники	Шишки
Винни-Пух	5	10	45
Пятачок	3	6	27
Крошка Ру	1	4	13

Можно составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными и решить её методом подстановки. С этим дети легко справятся, когда будут изучать соответствующий раздел математики. Сейчас мы осваиваем другие методы.

Сумма покупок Пятачка и Крошки Ру не совпадает с суммой покупок Винни-Пуха, и это детей немного смущает. Введение, по методу Кати, дополнительных героев здесь не помогает. Напоминаю вопрос задачи: определить стоимость одной банки сгущёнки.

— Банка сгущёнки стоит пять шишек, — неожиданно заявляет Тамара.

— А один пряник стоит две шишки, — добавляет Валя.

Оказывается, пока мы рассматривали таблицу и рассуждали о методах решения, подруги просто подобрали подходящие для условия задачи числа.

— Конечно, так задачу решить можно, — соглашаюсь с девочками, — но если числа в условии будут большими, сколько времени у вас уйдёт на подбор ответа? Обратите внимание, сколько пряников купили Пятачок и Крошка Ру?

— Десять.

— А Винни-Пух?

— Тоже десять.

— А со сгущёнкой как у них обстоят дела?

— Сгущёнки Винни-Пух на одну банку больше купил, — замечает Саша, — чем Крошка Ру и Пятачок. Всё, я понял.

Через минуту он сообщает ответ и объясняет.

— Винни-Пух купил всё то же самое, что его друзья, и ещё одну банку сгущённого молока. Пятачок и Крошка Ру заплатили за свои покупки вместе 40 шишек, а Винни-Пух за свои покупки заплатил 45 шишек. Винни-Пух купил одну лишнюю банку сгущённого молока и заплатил на пять шишек больше. **Это значит, что одна банка сгущённого молока стоит пять шишек.**

19 декабря

Ещё одна похожая задача. По условию задачи можно составить систему уравнений, но решить её методом подстановки нельзя. Однако этого для решения задачи и не требуется.

— За завтраком Дюймовочка съела два лепестка розы, два кукурузных зёрнышка и запила тремя каплями росы. Мальчик-с-пальчик съел четыре лепестка розы, три кукурузных зёрнышка и выпил шесть капель росы. После этого Дюймовочка поправилась на 14 граммов, а Мальчик-с-пальчик поправился на 25 граммов. Сколько граммов весит одно зёрнышко кукурузы?

	Лепестки	Зёрна	Капли	Граммы
Дюймовочка	2	2	3	14
Мальчик-с-пальчик	4	3	6	25

У детей уже достаточно богатый опыт обращения с уравнениями, о чём они ещё и не догадываются, и решение они находят быстро. Лучше всех своё решение объясняет Лена.

— Если Дюймовочка повторит свой завтрак, то поправится ещё на 14 граммов, а всего на 28 граммов, — говорит она. — При этом она съест всего четыре лепестка розы — как и Мальчик-с-пальчик, выпьет всего шесть капель росы — как и Мальчик-с-пальчик, а съест всего четыре кукурузных зёрнышка — на одно зёрнышко больше Мальчика-с-пальчика. После своего двойного завтрака Дюймовочка поправится на 28 граммов, а Мальчик-с-пальчик после своего завтрака — на 25 граммов. Лишних три грамма весит зёрнышко кукурузы.

25 декабря

— На Рождество Белоснежка и Снегурочка устроили зимнюю распродажу. Белоснежка продала шесть сосулек, три снежка и четыре сугроба и выручила за это 28 гультенов. Снегурочка продала четыре сосульки, два снежка и три сугроба и выручила

за это 19 гульденов. Сколько стоит один сугроб?

	Сосульки	Снежки	Сугробы	Гульдены
Белоснежка	6	3	4	28
Снегурочка	4	2	3	19

Пожалуй, самая сложная задача такого типа. После нескольких неудачных попыток предлагаю детям такую схему решения.

— Представьте, что Белоснежка и Снегурочка торговали ещё один день с тем же успехом. Как тогда будет выглядеть наша таблица? Занесите в неё нужные числа.

Вторая таблица получилась такой.

	Сосульки	Снежки	Сугробы	Гульдены
Белоснежка за 2 дня	12	6	8	56
Снегурочка за 2 дня	8	4	6	38

Предлагаю детям сравнить эту таблицу с первой.

— Всё ясно, — через пару минут заявляет Костя. — Если сложить эту Снегурочку со Снегурочкой из первой таблицы, то у неё на один сугроб будет больше, чем у Белоснежки, а всё остальное то же самое.

Лена придаёт этому решению вполне изящную форму.

— Белоснежка продала за два дня всего 12 сосуллек, шесть снежков и восемь сугробов и выручила за эти два дня 56 гульденов. Снегурочка торговала ещё один день и всего за три дня продала 12 сосуллек, шесть снежков и девять сугробов и получила за все эти три дня 57 гульденов. Снегурочка продала на один сугроб больше Белоснежки и получила на один гульден больше. Получается, что один сугроб стоит один гульден.

Эти рассуждения были быстро оформлены в третью таблицу.

	Сосульки	Снежки	Сугробы	Гульдены
Белоснежка за 2 дня	12	6	8	56
Снегурочка за 2 дня	12	6	9	57

Из аккуратно заполненной таблицы видно, что Белоснежка за два дня и Снегурочка за три дня продали по 12 сосуллек, по шесть снежков и только сугробов Снегурочка продала на один больше и именно за него получила лишний гульден.

11 января

На новогоднем празднике детишки участвовали в спектакле «Чёртова школа» в роли учеников этой школы — маленьких чертенят и ведьмочек. **В спектакле ученики школы вместо приветствия давали друг другу лёгкий подзатыльник.**

Предлагаю детям задачу для разминки.

— **В классе учились два чертёнок и четыре ведьмочки. В этот класс пришёл новенький чертёнок. Ученики радостно его встретили и обменялись с ним приветствиями, то есть подзатыльниками. Сколько подзатыльников получил и сколько подзатыльников раздал сам новенький чертёнок? Сколько всего подзатыльников было роздано при этой встрече?**

— Шесть! Шесть и шесть, а всего — двенадцать, — ответы ни у кого не вызывают затруднений. Продолжаем разминку.

— **В школе праздновали день подарков. Каждый чертёнок подарил каждой ведьмочке по метле, а каждая ведьмочка каждому чертёнку подарила по табакерке. Кто больше получил подарков, одна ведьмочка или один чертёнок?**

— Мальчик, то есть чертёнок. Каждая девочка всего по три подарка получила. Да, а чёртики по четыре табакерки получили, — дети быстро разбираются в ситуации.

— **Чего больше подарили, табакерок или метёлок?**

— Табакерок! Метёлок! Поровну! — дети торопятся, и ответы поступают разные.

— Не надо угадывать, это легко можно подсчитать. Лена, попробуй ты. Сколько подарков получили все ведьмочки?

— Каждая ведьмочка получила по три метёлки, а самих ведьмочек четыре, — рассуждает Лена. — Три сложить четыре раза — получается двенадцать.

— И чёртики получили всего двенадцать табакерок, — сообщает Александра. — Три чёртика и каждый по четыре подарка получил.

— **Получается, поровну подарков было,** — подводит итог Дима. — **Двенадцать табакерок и двенадцать метёлок.**

18 января

— **На следующий день, встретившись в школе, ученики обменялись приветствиями — дали друг другу по подзатыльнику. Сколько всего было роздано подзатыльников?**

— Скорее всего, двадцать четыре подзатыльника, — после некоторого раздумья предлагает свой ответ Саша. — Это как подарки, двенадцать получили ведьмочки и двенадцать — чёртики. Всего двадцать четыре.

— Нет, не так, — возражает Александра. — Ведьмочки дарили подарки только чёртикам, а друг другу не дарили.

— А я вот как предлагаю решать, — вступает в разговор Миша. — Если я буду чёртиком, то получу шесть подзатыльников от двух чёртиков и четырёх ведьмочек и сам дам тоже шесть подзатыльников. Всего получается двенадцать. И точно так у всех семерых. Всего получается подзатыльников семь раз по двенадцать, это сейчас сосчитаем.

— Восемьдесят четыре получается, если так считать, — говорит Оля. — Но это неправильно, по-моему, меньше должно быть.

Предлагаю детям выяснить, сколько подзатыльников потребуется для обмена приветствиями двум ученикам, потом трём, четырём.

— **Вот два чертёнка, Саша и Дима, обмениваются приветствиями. Сколько они для этого используют подзатыльников?**

— Два, конечно, два. Это легко подсчитать, — дети отвечают, перебивая друг друга. — Один подзатыльник даст Саша Диме, а второй, наоборот, Дима Саше.

— **Молодцы, правильно. Если считать так, как предлагал Миша, то получится четыре подзатыльника, по два на каждого чертёнка. Попробуйте подсчитать то же самое для трёх ведьмочек.**

Скоро дети начинают сообщать результаты своих подсчётов. Ответ у всех верный — шесть. Прошу Настю показать ход своего решения.

— Три ведьмочки — это я, Валя и Тамара, — объясняет Настя. — Я дам им по подзатыльнику, это будет два. Валя тоже даст два подзатыльника. И Тамара даст два. Всего шесть.

Предлагаю произвести такие же расчёты для четырёх учеников. Слово берёт Катя.

— **Можно посчитать сразу для семи учеников, — говорит она. — Каждый из этих семи учеников даст подзатыльник остальным шести. Шесть умножить на семь будет сорок два. Сорок два подзатыльника.**

— А если учеников будет 137? — проверяю Катю.

— **Значит, надо 137 умножить на 136,** — вместо Кати отвечает Саша.

25 января

— **Приветствуя друг друга, ученики раздали 56 подзатыльников. Сколько всего было учеников?**

Дети погружаются в расчёты. На этот раз всех опережает Костя.

— Семь человек было, — говорит он.

Прошу его объяснить своё решение.

— Чтобы узнать количество подзатыльников, мы два числа, которые рядом стоят, перемножали, — продолжает Костя. — Помните? Два умножали на три, шесть на семь, сто тридцать шесть на сто тридцать семь. Вот и я искал два соседних числа, **7×8 как раз будет 56.**

— Только ты немного перепутал, — поправляет его Александра. — **Правильный ответ не 7, а 8 учеников. Каждый из этих восьми учеников даёт подзатыльники остальным семи.**

Предлагаю ещё одну задачу.

— **Приветствуя друг друга, ученики раздали 134 подзатыльника. Сколько всего было учеников?**

На некоторое время в классе устанавливается тишина, дети считают. Первым не выдерживает Саша.

— Борис Львович, — говорит он, — тут что-то не получается. Вот смотрите.

Саша выписывает на доске результаты своих вычислений.

$$1 \times 0 = 0$$

$$2 \times 1 = 2$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 3 = 12$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$6 \times 5 = 30$$

$$7 \times 6 = 42$$

$$8 \times 7 = 56$$

$$9 \times 8 = 72$$

$$10 \times 9 = 90$$

$$11 \times 10 = 110$$

$$12 \times 11 = 132$$

$$13 \times 12 = 156$$

— Видите, число 134 здесь не встречается, — объясняет Саша, — а дальше числа можно не выписывать, они все больше 134. **Вы, наверное, ошиблись, когда задачу давали.**

— **Правильно. Приветствуя друг друга, ученики раздали 13 457 подзатыльников. Сколько всего было учеников? Докажите, что здесь тоже есть ошибка.**

1 февраля

— Нам времени не хватило все числа перемножить, — оправдывается Костя, — уроков много было. А как найти ошибку?

— **Сделаем так. Каждый напишет на доске два числа, идущие подряд, и перемножит их. Большие числа не пишите.**

Скоро на доске появляются несколько примеров.

$$5 \times 6 = 30$$

$$21 \times 22 = 462$$

$$100 \times 101 = 10\ 100$$

$$12 \times 13 = 156$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$7 \times 8 = 56$$

$$10 \times 11 = 110$$

$$11 \times 12 = 132$$

$$59 \times 60 = 3640$$

Прошу детей прокомментировать ответы.

— Они все разные.

— Есть большие, есть маленькие.

— Они все чётные, — замечает Катя.

— Какими должны быть два числа, чтобы их произведение было чётным?

— Они должны быть сами чётные, — это знают все.

— Обязательно оба?

— Нет, достаточно одного чётного.

— Вы перемножаете два числа. Эти числа идут подряд. Если первое число чётное, то произведение этих чисел?.. Правильно, чётное. Чётное или нечётное второе число, уже не имеет значения, потому что достаточно одного чётного сомножителя, а он у нас уже есть.

Предлагаю детям продолжить рассуждение самим.

— Если у нас первое число нечётное, — говорит Валя, — то чётным должно быть второе число.

— А оно и будет чётным, — перебивает её Саша, — потому что наши числа идут подряд...

— А чётные и нечётные числа так и идут друг за другом, — заканчивает эту мысль Дима. — Чётное, нечётное, чётное, нечётное...

Напоминаю детям задачу. **Приветствуя друг друга, ученики раздали 13 457 подзатыльников. Сколько всего было учеников? Докажите, что здесь есть ошибка.**

— Это число нечётное, — сразу отвечает Оля, — а должно быть чётное.

8 февраля

Свою задачу предлагает Костя.

— **Приветствуя друг друга, ученики раздали 124 подзатыльника. Сколько всего было учеников? Докажите, что здесь есть ошибка.**

— Это мы легко сосчитаем, — заявляет Лена. — Саша когда-то уже перемножал пары чисел.

— Нет! — возражает Костя. — Надо сразу сказать. Например, числа 34728 тоже быть не может в такой задаче.

Действительно, если 124 проверить просто, то для проверки 34728 потребуется много времени. Что такое квадратный корень, дети ещё не изучали, поэтому предлагать проверку примерно со 180 не стоит. Наконец после долгих и безуспешных попыток решить эту задачу, сдаёмся.

— **Вот что я заметил, — объясняет Костя. — Произведение двух соседних чисел обязательно заканчивается нулём, двойкой или шестёркой. Можете проверить.**

— Что же, нам все числа проверять? — удивляется Миша.

— **Нет, не надо, — поддерживаю Костю. — Последняя цифра произведения однозначно определяется последними цифрами сомножителей. Так что проверить надо только первый десяток.** Лена, ты сегодня вспоминала, как Саша перемножал. Повтори.

Лена, повторяя вычисления Саши, легко выписывает на доске первый десяток пар сомножителей, и все убеждаются в правоте Кости.

$$1 \times 0 = 0$$

$$2 \times 1 = 2$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 3 = 12$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$6 \times 5 = 30$$

$$7 \times 6 = 42$$

$$8 \times 7 = 56$$

$$9 \times 8 = 72$$

$$10 \times 9 = 90$$

15 февраля

— **Для борьбы с нечистой силой собрались былинные богатыри во главе с Ильёй Муромцем. По старой традиции при встрече они пожимали руки друг другу. Собралось семь богатырей. Сколько всего рукопожатий было при встрече?**

— А какая разница, черти или богатыри, — замечает Саша. — Там черти подзатыльниками здоровались, а тут богатыри руки друг другу при встрече пожимают. Главное, что их 7

человек, а чем они обмениваются, подзатыльниками или рукопожатиями, не имеет значения. $6 \times 7 = 42$. Сорок два рукопожатия, это мы уже решали.

Для проверки Сашиного предложения приглашаю к доске Диму и Мишу.

— Сейчас вы — чертенята, поздоровайтесь.

Ребята обмениваются лёгкими подзатыльниками.

— Сколько получилось подзатыльников?

— Два! Два. Они два раза поздоровались, по одному разу каждый.

— А теперь вы — богатыри.

Дима и Миша пожимают друг другу руки.

— Одно рукопожатие получилось, — не дожидаясь вопроса, определяют дети.

— **Для двух человек расчёты Саши не подтвердились.**

— А давайте такую проверку для семи человек устроим.

Устоять перед подобным предложением невозможно. Дети сами проводят проверки для семи человек, потом для десяти, тщательно подсчитывая рукопожатия и чисто символические подзатыльники. Для семи человек дети насчитали 42 подзатыльника и 21 рукопожатие, для десяти человек — 90 подзатыльников и 45 рукопожатий. Саша признаётся, что он был неправ. Предлагаю детям подумать, как объяснить результаты этого «эксперимента».

— Когда здороваются два чертёнка, каждый по одному подзатыльнику даёт, два подзатыльника получается, — объясняет Катя. — Наоборот, когда два богатыря здороваются, каждый жмёт руку другому, а рукопожатие одно получается.

— У каждого богатыря по одному рукопожатию, — продолжает объяснение Александра, — и на всех в сумме тоже одно прибавляется.

— Точно! — соглашается Саша. — Значит, надо подсчитать число подзатыльников и поделить на два.

Прошу Сашу напомнить, как подсчитывать число подзатыльников.

— **Надо число человек умножить на число, меньшее на единицу,** — уверенно говорит он, — **ведь любой человек приветствует каждого, то есть всех, кроме самого себя.**

21 февраля

Предлагаю детям задачу из книги «Поисковые задачи по математике» (авторы Крысин А.Я., Руденко В.Н., Садкова В.И., Соколова А.В., Шепетов А.С., Колягин Ю.М.).

«Решая задачу: «На плоскости отмечено семь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?», ученик рассуждал так: «Через каждую из семи точек и шести остальных можно провести по прямой, следовательно, всего прямых можно провести $6 \times 7 = 42$ ». Прав ли ученик?»

— Это мы сейчас проверим, — радостно объявляет Миша и торопится к доске, а следом ещё несколько человек. Скоро вся доска покрывается паутиной.

Разобраться здесь довольно сложно, дети всё время сбиваются со счёта, и неудивительно, что ответы у всех получаются разные. Валя и Тамара рисуют вдвоём на листочке.

— Помните, мы задачки про чертей решали, — говорит Валя. — Так это то же самое. Всё равно, как черти здороваются друг с другом, так и прямые через две точки проходят.

— Только не черти, а богатыри, — поправляет подругу Тамара. — У богатырей одно рукопожатие на двоих было, так и здесь на две точки одна прямая получается.

— А ведь и правда, — соглашается Саша. — Чтобы число прямых узнать, надо шесть умножить на семь и разделить на два. Правильно?

Остаётся разобраться в некоторых деталях.

— Подумайте, почему в задаче речь идёт именно о прямых? Сколько прямых можно провести через две точки?

— Только одну, — после долгой паузы не совсем уверенно отвечает за всех Катя.

— Правильно. А сколько кривых можно провести через эти две точки?

Пока дети думают, ставлю на доске две жирные точки и при помощи линейки провожу через них прямую.

— Наверное, две кривые, — робко говорит Миша. — Можно, я их попробую нарисовать? Миша рисует.

— Я тоже хочу нарисовать свои линии, — просит Оля, — у меня немного другие кривые получаются.

Следом за Олей и остальные рисуют свои кривые.

— А кривые могут эту прямую пересекать? — спрашивает Дима и, не дожидаясь разрешения, рисует ещё несколько кривых.

— **Так сколько кривых можно провести через две точки?** — напоминаю детям вопрос.

— Много! Очень много.

— Сколько угодно!

Обращаю внимание детей на такое условие в задаче: **«Никакие три точки не лежат на одной прямой»**. Обозначаю на доске три точки и соединяю их прямыми.

— **Эти три точки не лежат на одной прямой, через них можно провести три прямые. Их легко и пересчитать прямо по чертежу, и сосчитать так, как мы умеем, — умножить два на три и разделить пополам. Что будет, если эти три точки будут лежать на одной прямой?**

— Не будет трёх прямых.

— Ничего не получается.

— Всего одна прямая на чертеже и останется.

— **Правильно, молодцы. Если три такие точки соединить, то все три прямые сольются в одну. В этом случае сравнение с богатырями не подходит.**

Москва