Математика, на которой не только решают…

Борис ДРУЖИНИН, педагог

Задания, которые предлагает своим ученикам Борис Львович Дружинин, — это своего рода «ящики с секретом»: всё здесь как будто налицо, условия как на ладони, но начнёшь ими смело оперировать и чего-то, оказывается, не хватает для решения. Или чего-то не учёл. Так и есть: не учёл. И вот же оно! Всё так просто. Нет! Задачи (в этом номере журнала Дружинин предлагает задания и для младших (см. также «НО» № 9, 2000; № 2, 2001), и для учеников

5–7-х классов) учат находить в данных тебе условиях ещё и другие, сначала неприметные, но именно те, необходимые условия, которые и позволяют юным математикам с весёлым торжеством решить очередную «сложно-простую» задачку. И что важно и ценно: каждое такое решение доставляет ребятам настоящую радость, потому что оно — не на отметку, а на истинное удовольствие от счастливой догадки, от эвристического озарения. Опыт такой математики — желанный импульс школьному курсу — и физики, и химии, и биологии, и даже гуманитарных дисциплин: учитель учебного школьного предмета может, «взяв за основу» саму дружининскую технологию обучения, предложить ученикам на своих уроках такие же стимулирующие творческое мышление детей задачи. Таким образом и создаётся реальная и общедоступная технология «изобретения» развивающих задач, технология творчества.

По учебному курсу Б. Дружинина успешно работают многие московские школы, а издательство «Учебный центр «Перспектива» выпускает учебное пособие.

Эти упражнения с обыкновенными игральными кубиками не предполагали знакомство с началами теории вероятностей, такие слова даже не употреблялись — детей пугать ни к чему. Просто хотелось на практическом примере показать, что не стоит автоматически переносить решение одной задачи на другую, пусть очень похожую, и нельзя доверяться первому впечатлению.

Кубик с числами дети встречают как старого знакомого.

— Ура! В кубик поиграем. Чур, я последняя! Нет, я!

— Играть будем, но в другую игру. Назовём её «Гонки чисел». Каждый выберет себе число: единицу, двойку, тройку, четвёрку, пятёрку или шестёрку. Потом будем по очереди бросать кубик много-много раз и считать, какое число сколько раз выпало. Победит тот, чьё число выпадет больше раз, чем другие.

Начинаем игру. По очереди бросаем кубик, на доске появляются вереницы палочек. Первую таблицу заполняю сам, следующие будут заполнять дети. Поначалу чаще других выпадает четвёрка, к ней подтягивается единица, потом «делает рывок» пятёрка…

Прошу детей сказать своё мнение о результатах «гонки».

О л я. Пятёрка самая везучая.

Д и м а. Пятёрка и единица выпадали чаще других чисел.

С л а в а. Двойке не повезло, она самая редкая.

С а ш а. А почему они все не поровну получились? Помните, вы говорили, что у всех чисел одинаковые шансы.

— Правильно, одинаковые. Перед каждым броском мы не знаем, какое число выпадет. Брось кубик... Так, двойка. А после следующего броска двойка может появиться? Правильно, может. Вот если бы она не могла появиться, пока все числа не подравняются, тогда бы мы удивлялись, что пятёрка чаще тройки выпадала. Все числа ждали бы друг друга.

— А так бывает?

— Бывает. Вы в домино играли? Там за игру пусто — два, или три — четыре, или шесть — шесть и любая другая кость появляется на столе только один раз. Двадцать три раза сыграем — двадцать три раза каждая кость появится. А в нашей игре любое число в любой момент появиться может, поэтому было бы удивительно, если бы все числа поровну выпали.

17 сентября

— Продолжим наши «Гонки чисел», не возражаете? Только немного изменим правила. **Например, я выбираю себе четыре и когда четвёрка выпадет мне, сразу четыре очка прибавляется, а если Катя, как в прошлый раз, двойку себе выберет, то ей по два очка прибавлять будем, когда двойка выпадет.**

Дети выбирают себе числа, начинаем игру. Очень скоро выясняется разница с прошлыми «гонками». Первой это заметила Оля, выбравшая себе единицу.

— Конечно, тебе хорошо, — обратилась она к Диме, — ты за один раз четыре очка набираешь, а мне для этого надо, чтобы единица четыре раза выпала.

— Вале с Тамарой лучше, — ответил он, — они ещё быстрее очки набирают, у них шестёрка.

Предлагаю сыграть ещё раз. Все выбирают пятёрку или шестёрку.

— Почему никто не выбрал тройку или четвёрку? Они же выиграли у пятёрки в прошлый раз.

— Но это было в прошлый раз, а сейчас этого не получится, — говорит Александра, — пятёрка у них должна сейчас выиграть.

— Катя, Саша, а почему же вы выбрали себе пятёрку, а не шестёрку? Ведь шестёрка выгоднее пятёрки.

— Когда все одно число выбирают — это скучно, — говорит Саша, а Катя добавляет: — А пятёрка может у шестёрки выиграть быстрее, чем тройка у пятёрки.

Так играть уже неинтересно.

12 октября.

— Сегодня играем в «Гонки чисел».

— А за шестёрку сколько очков будут давать?

— Шесть.

— Тогда я шестёрку выбираю.

— И я шестёрку.

— И я.

— А моя будет пятёрка.

Мне только и надо было, чтобы дети вспомнили прошлую игру и её результаты.

— Вы хорошо усвоили эту игру, поэтому немного её изменим. — Достаю второй кубик. — **Будем бросать два кубика. Они разных цветов, но числа на них одинаковые, от одного до шести. Их показания будем складывать.** Какая самая большая сумма может получиться?

— Двенадцать! Шесть и шесть будет двенадцать!

— А самая маленькая?

— Один! Один!

— Нет, два! Один никак не может получиться. (Саша сегодня самая внимательная. В таблицах мы её называем Александрой, чтобы не путать с мальчиком Сашей.)

Как и следовало ожидать, дети выбрали себе десять, одиннадцать и двенадцать, они хорошо помнили прошлую игру. Тогда я выбираю себе семёрку и восьмёрку.

— Почему, Борис Львович, вы хотите проиграть?

— Во-первых, вы сами говорили, что когда все выбирают одни и те же числа, то это неинтересно, а во-вторых, может быть, я и не проиграю. Посмотрим. Начали?..

— Почему выиграла семёрка?

— Она чаще всех выпадала.

— Правильно. И в прошлый раз тройка у пятёрки выиграла, потому что чаще выпадала. Давайте ещё раз сыграем. Выбирайте каждый по два числа.

Выбирают осторожно. Популярностью пользуются семёрка, восьмёрка и даже шестёрка, но не забыты и самые крупные суммы. Выбранные пары в основном выглядят так: 7 + 10, 7+ 12, 6 + 12, 8 + 11. Играем. Результат примерно тот же, победили семёрка и восьмёрка, а вот двенадцать не выпало ни разу.

Предлагаю детям выяснить, почему семёрка появляется чаще других возможных сумм. Совершенно неожиданно, по крайней мере для меня, дети быстро находят правильное объяснение.

— Двенадцать можно получить только в одном случае, — говорит Александра, — когда на обоих кубиках выпадут сразу по шестёрке. Зато пятёрка получается в нескольких вариантах.

Свои слова она подтверждает записью на доске.

12 = 6 + 6

5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1

— А разве 1 + 4 и 4 + 1 не одно и то же? — пытаюсь сбить её с толку.

— Конечно, нет, — сразу отвечает Александра, — это же на разных кубиках получается. Сначала на красном кубике 1, а на синем 4, а потом наоборот — на красном 4, а 1 на синем.

Теперь все стоят у доски и создают одну большую таблицу со всеми возможными комбинациями чисел на кубиках.

Ясно, что пока комбинация 6 + 6 выпадет один раз и принесёт кому-то 12 очков, сумма 7 успеет выпасть 6 раз и принесёт игроку 42 очка.

Каждый считает по-своему

21 октября

— На столе лежат помидоры, огурцы и зелёные мячики…

— Лишние помидоры, они красные, а все остальные — зелёные.

— И огурцы лишние. Помидоры и мячики все круглые, а огурцы имеют другую форму.

— Мячики лишние. Помидоры и огурцы можно есть, а мячики совсем несъедобные.

— Согласен, согласен. «Третьего лишнего» вы определили правильно, но задача будет другая. **На столе лежат помидоры, огурцы и зелёные мячики. Зелёных предметов 6, круглых — 5, а съедобных — 7. Сколько всего предметов лежит на столе?**

— Восемнадцать. Это легко сложить.

— Если бы это было так просто, то и задачу не стоило давать. Рассмотрим самый простой случай. Пусть на столе лежат один помидор, один огурец и один зелёный мячик.

— Сколько зелёных предметов лежит на столе? — спрашиваю детей.

— Два! Два! — сомнений ни у кого нет.

— Сколько круглых предметов лежит на столе? — продолжаю задавать вопросы.

— Тоже два.

— А сколько съедобных?

— И съедобных два.

— Так сколько же предметов лежит на столе: **3** или **6**?

Дети задумались. Конечно, на столе находятся три предмета, это ясно. Но если складывать так, как предлагали дети вначале, то в ответе получается **6**. Пытаюсь подсказать.

— Помидор круглый или съедобный?

Никто не отвечает. Действительно, вопрос несколько странный.

— Помидор и круглый, и съедобный, — решается ответить Лена. — Ой, кажется, я поняла. Мы один и тот же помидор два раза сосчитали. Первый раз, когда круглые предметы подсчитывали, а второй раз, когда считали съедобные предметы.

— Получается, что в задаче ответ 9, — делает вывод Саша. — Там мы все предметы по два раза пересчитали и получили 18. Значит, всего предметов девять.

12 ноября

— Проверим, хорошо ли вы поняли решение прошлой задачи? **На столе лежат помидоры, огурцы и зелёные мячики. Зелёных предметов 8, круглых — 12, а съедобных — 17. Сколько всего предметов лежит на столе?**

В наступившей тишине чувствуется какая-то растерянность.

— Вы, наверное, где-то ошиблись, — неуверенно говорит Катя. — Мы все предметы по два раза считаем, значит, двойная сумма чётная должна получаться. А в задаче 37 получается.

— Простите, я действительно ошибся, когда читал условие задачи. Правильно это звучит так. **На столе лежат помидоры, огурцы и зелёные мячики. Зелёных предметов 8, круглых — 12, а съедобных — 14...**

— Семнадцать, всего семнадцать предметов в задаче получается, — все торопятся выдать свой ответ.

— Подождите, вы не дослушали, повторяю. **На столе лежат помидоры, огурцы и зелёные мячики. Зелёных предметов 8, круглых — 12, а съедобных — 14. Сколько помидоров лежит на столе?**

— Это как с пассажирами и остановками, — вспоминает Костя. — Считаешь одно, а спрашивают другое.

— Думаю, Костя, ты ошибаешься. Сколько всего предметов у вас получилось?

— Семнадцать.

— Если уберём со стола помидоры, какие предметы останутся?

— Огурцы и мячики.

— Так это же как раз зелёные предметы, — догадывается Александра. — Всего предметов 17, а зелёных — 8. Получается, что помидоров — 9.

— Тогда мячиков получается всего три, — подхватывает Дима, — а огурцов — пять.

25 ноября

— Героями нашей задачи будут Катя, Саша, Лена, Миша и Оля, обозначим их первыми буквами имён. Катя с Сашей на двоих получили 10 пятёрок, Саша и Лена на двоих получили 9 пятёрок, Лена и Миша — 5, Миша и Оля — 4, Оля и Катя — 8. Сколько всего пятёрок получила великолепная пятёрка? Запишем это так.

КС — 10 СЛ — 9 ЛМ — 5 МО — 4 ОК — 8

Подсчёт занимает немного времени. Все слагаемые встречаются дважды, надо всё сложить и поделить пополам. Ответ: 18 пятёрок. Немного усложняю условие задачи. Герои те же самые.

— Катя, Саша и Лена на троих получили 12 пятёрок, Саша, Лена и Миша на троих получили 15 пятёрок, Лена, Миша и Оля — 18, Миша, Оля и Катя — 16, Оля, Катя и Саша — 14. Сколько всего пятёрок получила великолепная пятёрка?

Запись на доске выглядит так.

КСЛ — 15 СЛМ — 15 ЛМО — 18 МОК — 16 ОКС — 14

— Тут что-то не так, — сомневается Миша. — Я всё сложил и в сумме 75 получилось. На два не делится.

— А в этом случае не на два, а на три делить надо, — отвечает ему Саша. — Каждая отметка три раза складывалась, значит, делить на три. Получается, что мы **все вместе 25 пятёрок получили.**

6 декабря

— На столе лежат помидоры, огурцы, бананы и жёлтые мячики. Предметов, растущих на грядках, — помидоров и огурцов — 6. Предметов продолговатой формы — огурцов и бананов — 20. Жёлтых предметов — бананов и мячиков — 5, круглых предметов — мячиков и помидоров — 7. Сколько всего предметов лежит на столе?

— Мы уже решали эту задачу.

— Сейчас всё сложим и пополам поделим, они же все по два раза встречаются.

— Я уже сосчитал, — спешит сообщить ответ Саша, — 19 предметов на столе лежат.

— Не торопитесь, подумайте. Сколько, по-вашему, предметов?

— Девятнадцать**.** Саша правильно сосчитал.

— А сколько предметов продолговатой формы, огурцов и бананов?

— Двадцать.

— Как же так? Всех предметов 19, а огурцов и бананов 20? А они ведь не все предметы, а только часть. Разве бывает часть больше, чем всё?

— Конечно, не бывает. Мы с вами уже встречали задачи, в которых нет решения. **А в этой задаче неправильно поставлены условия.**

22 декабря

Сразу предупреждаю детей, что в условии задачи есть ошибка, её надо найти. Задача такая. **Героями нашей задачи опять будут Катя, Саша, Лена, Миша и Оля, обозначим их первыми буквами имён. Катя с Сашей на двоих получили 2 пятёрки, Саша и Лена на двоих получили 6 пятёрок, Лена и Миша — 3, Миша и Оля — 7, Оля и Катя — 6. Сколько всего пятёрок получила великолепная пятёрка?** Запись на доске выглядит так:

КС — 2 СЛ — 6 ЛМ — 3 МО — 7 ОК — 6

Пятнадцать

Эта игра предлагалась весьма разным аудиториям.

Здесь мы играем с детишками из начальных классов исключительно для развития навыков устного счёта. Старшеклассникам эта игра предлагалась с надеждой, что они смогут приблизиться к разработке беспроигрышной стратегии.

25 декабря

— Сегодня опять будем считать. **Вот правила игры. Играют двое. Перед ними девять карточек с числами от одного до девяти, на каждой карточке написано только одно число. Вот эти карточки.**

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Играющие видят все эти числа. Они по очереди берут себе по одной карточке, причём каждый видит карточки партнёра. Побеждает тот, у кого найдутся три карточки, такие, что сумма чисел на этих карточках равна пятнадцати. У вас может оказаться и четыре, и пять карточек, надо, чтобы на каких-нибудь трёх из этих четырёх или пяти карточек сумма была равна пятнадцати. Для начала мы сыграем с Димой, а остальные будут ему советовать. Во время игры прояснится то, что не поняли из объяснения. Начинай, Дима.

Дима сразу забирает карточку с числом девять. Я беру с числом четыре.

Дима	9
свободные карточки	1 2 3 5 6 7 8
учитель	4

И сразу несколько голосов:

— Дима, бери скорее шестёрку! Бери шесть! Дима выиграл! Всё, Борис Львович, вы проиграли!

— Нет, это неправильно. Девять плюс шесть действительно будет пятнадцать, но эту сумму надо набрать на трёх, а не на двух карточках.

— Тогда я беру пятёрку, — говорит Дима.

— А я беру единицу.

Дима	9 5
свободные карточки	2 3 6 7 8
учитель	4 1

— И мы тоже возьмём единицу. Дима, бери единицу, тогда у тебя будет пятнадцать.

— Неправильно. Карточка с единицей только одна и она уже у меня. Я её забрал себе.

— Тогда я беру два, — отвечает Дима.

Дима	9 5 2
свободные карточки	3 6 7 8
учитель	4 1

— Два плюс девять будет одиннадцать, до пятнадцати не хватает четырёх, — записываю на доске эти выкладки.

2 + 9 = 11, 15 — 11 = 4.

— Но четвёрки на свободных карточках уже нет, она у меня, — поясняю детям ход своих рассуждений. — Девять плюс пять получается четырнадцать. До пятнадцати не хватает единицы, но единица тоже у меня. Два плюс пять — семь, до пятнадцати не хватает восьми.

2 + 5 = 7, 15 — 7 = 8.

Если Дима возьмёт восьмёрку, то у него на трёх карточках сумма получится как раз пятнадцать.

2 + 5 + 7 = 15.

Чтобы этого не допустить, я сам возьму карточку с восьмёркой. Иначе я проиграю.

Дима	9 5 2
свободные карточки	3 6 7
учитель	4 1 8

Дети молча рассчитывают варианты, кажется, они поняли смысл этой игры.

— Дима, смотри, у Бориса Львовича восемь и один. Это девять, — советует Саша. — До пятнадцати не хватает шести.

— Да, Дима бери шестёрку, — подхватывают несколько голосов. — Бери шесть, а не то проиграешь.

Дима ещё раз всё просчитывает и берёт шестёрку.

— Тогда я беру три. У меня получилось пятнадцать. Четыре плюс три плюс восемь:

4 + 8 + 3 = 15.

Дима	9 5 2 6
свободные карточки	7
учитель	4 1 8 3

— Но вы же их не подряд взяли!

— Это не обязательно. Достаточно, чтобы любые три числа у одного из играющих давали в сумме пятнадцать.

— Теперь понятно, давайте играть ещё, вы начинайте.

— Беру восемь.

— А мы берём девять.

— Пять.

— Так... — дети считают. — Восемь плюс пять равняется тринадцать, значит, мы берём два.

— Я выбираю четыре.

— А мы — три.

— Тогда моя шестёрка. Пять, четыре и шесть в сумме дают как раз пятнадцать.

Семь раз отмерь

12 января

Предлагаю задачу из замечательной книги Мартина Гарднера «Есть идея!».

Так уж повелось, что бремя забот о священном гиппопотаме нёс на своих плечах вождь племени, собственноручно кормивший и всячески ублажавший своего подопечного. Каждый год в день своего рождения вождь, прихватив с собой в лодку сборщика налогов и священного гиппопотама, отправлялся вверх по реке в те места, где стояла хижина, возведённая специально для сбора налогов. Племя платило вождю дань — столько золотых слитков, сколько требовалось, чтобы уравновесить священного гиппопотама. На чашу огромных весов ставили священное животное и уравновешивали его

грудой слитков золота на другой чаше. Однажды вождь племени так раскормил священного гиппопотама, что весы не выдержали непомерной тяжести и сломались. На починку их потребовалось бы несколько дней. Над торжественной церемонией сбора дани нависла угроза срыва. Вождь был вне себя от ярости. Он вызвал сборщика податей и закричал:

— Я не желаю ждать. Золото мне нужно сегодня и ровно столько, сколько весит священный гиппопотам. Если ты не придумаешь, как отмерить нужное количество золота до захода солнца, я прикажу отрубить тебе голову.

Несчастный сборщик податей от страха перестал что-либо соображать. Лишь огромным усилием воли ему удалось собраться с мыслями. После нескольких часов напряжённых размышлений ему пришла в голову блестящая мысль. Вы не догадываетесь, что именно он придумал?

Дети молчат. Предлагаю повторить условие задачи.

— Надо взвесить гиппопотама, — медленно говорит Саша и увереннее продолжает: — Здесь много лишнего. Вождь, гиппопотам, этот сборщик налогов — они лишние. Надо взвесить большой груз — и всё.

— Конечно! — поддерживает Сашу Настя. — Вы сами нас так учили. Надо взвесить большой груз. Гиппопотама или корову. А может, крокодила. По условию задачи — в лесу, где нет никаких приспособлений. Правильно?

— Не совсем. Вас ведь не просят определить вес гиппопотама или крокодила, это действительно не так важно, а что надо сделать? Вспомните, зачем вождь привозил с собой гиппопотама?

— Чтобы туземцы дали ему золота столько, сколько весит гиппопотам.

— Правильно. А сколько именно весит этот гиппопотам, не так уж и важно. Значит, вам предстоит уравновесить золото с гиппопотамом.

— Весы делать надо.

— Нет, по условию надо суметь обойтись без весов.

— Так у нас только и есть вождь да гиппопотам. И ещё сборщик податей. И туземцы с золотом.

— А каким образом вождь прибыл к месту сбора податей? Нельзя ли воспользоваться лодкой и рекой? Когда мои дети были маленькими, они любили купаться в ванне с игрушками, лодочки у них тоже были. Что случится, если в такую лодочку груз положить?

— Перевернётся и утонет.

— А если понемножку нагружать, например, по одной монетке класть?

— Тогда она медленно тонуть будет.

— Всё! Я понял! — радостно объявляет Миша. — Надо лодку как весы использовать. Сначала туда этого бегемота...

Останавливаю Мишу и прошу кого-нибудь продолжить его объяснение. Продолжает Оля:

— А потом гиппопотама вытащить, вернее, вывести из лодки и накидать туда золота...

Прошу продолжить Александру.

— Пока лодка не опустится, как от гиппопотама.

25 января

— Перенесёмся из жаркой Африки в морозную Сибирь, в маленький посёлок Абаза, что недалеко от города Абакана, столицы Хакасии. Эту историю лет тридцать назад рассказал мне местный житель Пётр Николаевич. Попросили его подобрать в тайге ёлку детям к Новому году во Дворец культуры и предупредили, что ёлка должна быть высотой 15 метров.

— Хорошо, — согласился Пётр Николаевич. — Завтра с утра пойду в тайгу, подберу вам подходящую ёлку.

— А как высоту ёлки измерять будешь? — спрашивают дядю Петю.

— Внука с собой возьму, — отвечает он. — Погода сейчас солнечная, на небе ни облачка, а Вовка мой как раз полтора метра ростом.

— Он что у тебя, по деревьям лазать будет? — удивляется начальство.

— Нет, лазать никуда не надо, мы и так высоту узнаем.

— Как Пётр Николаевич собирался выбирать нужную ёлку?

— Очень просто, — первой предлагает Настя. — Пусть он возьмёт верёвку и отложит на ней десять раз рост своего внука. Потом этой верёвкой он будет измерять высоту ёлки.

— Пожалуй, отмерить верёвку длиной пятнадцать метров он может и без помощи внука. А что, потом внук с этой верёвкой на все ёлки залезать будет?

— Залезать не придётся, — Дима решает задачу по-своему. — Надо сначала срубить ёлку, а потом её этой верёвкой измерять.

— Рубить ёлки и не только ёлки, а любые деревья, просто так, без необходимости — плохое дело. Сколько же ёлок ему надо будет завалить, чтобы правильную найти?

— Только одну, но самую высокую, — предлагает Катя. — Потом отмерить от вершины пятнадцать метров и в этом месте ёлку перепилить.

— Сдаюсь, так можно. Тогда поставим нашу задачу так: как измерить высоту ёлки, не залезая на неё и не срубая? В условии задачи есть подсказки.

— Ясно, что надо внуком воспользоваться, — предполагает Дима. — Он десять раз в ёлке помещается.

— Но ему нельзя на дерево залезать, — замечает Валя, — а других подсказок в условии нет. Может, попробовать нарисовать?

— Нет, попробуем поиграть. Доставайте свои куклы.

Тут же из портфелей появляются три куклы, собачка, гоночный автомобиль и два водяных пистолета. Слегка передвигаю одну из парт так, чтобы её всю освещало солнце из окошка. Прикрепляю к парте вертикально указку.

— Это — наша ёлка. А какая кукла будет изображать внука?

Бурные выборы куклы прерывает Катя.

— Я, кажется, поняла. Можно измерять не ёлку, а её тень.

— Правильно, — поддерживает Катю Александра. — Помните, Пётр Николаевич говорил, что погода солнечная. Это и есть ещё одна подсказка.

— Скажете тоже, — возражает Костя. — Смотрите, тень от вашей ёлки гораздо длиннее самой ёлки. Что толку её измерять?

Дети задумываются. Беру в руки «внука».

— Как вы думаете, тень только от ёлки больше самой ёлки? Что происходит с вашей тенью и с тенью этого «внука»?

— Правильно, мы тень ёлки будем измерять тенью внука, — догадывается Саша. — Если в ёлке десять внуков должно быть, то и в тени ёлки поместится десять теней внука. Смотрите.

Саша берёт «внука» и перемещает его вдоль тени указки.

— Ему надо вставать на тень своей головы, — поясняет Саша, — и смотреть, где снова тень его головы будет. Остаётся только посчитать, сколько раз он это сделает.

— Смотри, тень его головы передвигается вместе с головой, — замечает Оля. — Как же он встанет на тень своей головы?

— Где была тень, может Пётр Николаевич отметить, — отвечает Саша.

10 февраля

— Попробуйте измерить расстояние между углами кубика.

Дети только что закончили собирать три уникуба Никитиных. Кубиков под руками сколько угодно, линейки тоже есть у всех.

— А чего тут измерять? — удивляется Миша. — Приложил линейку — и всё.

Предлагаю взять каждому в руки кубик. Рисую кубик на доске и отмечаю один из углов.

— У любого кубика восемь углов, выберем один из них. Расстояние до трёх углов можно измерить по рёбрам. Естественно, эти расстояния одинаковые, это свойство куба. Расстояния ещё до трёх углов мы можем измерить, приложив линейку к грани куба. Эти

расстояния тоже равны между собой. А как линейкой измерить расстояние до последнего оставшегося угла?

— Надо сделать такой же кубик из проволоки, — сразу предлагает Тамара, — и засунуть туда линейку. Стенок-то уже не будет.

— Проволоки у вас сейчас нет, используйте то, что под руками.

— Может, опять тенью воспользоваться?

— Это не так легко сделать, постарайтесь придумать способ проще.

Дети молчат. Из ещё не разобранного уникуба вынимаю угловой кубик, показываю его и спрашиваю:

— Вам надо измерить линейкой расстояние между этими углами. А где только что был этот кубик и где были нужные нам углы?

И сразу все хотят показать на уникубе.

— Вот здесь они были. Сюда линейку прикладывать надо.

— Прекрасно! А как поступить, если у вас на руках только один кубик?

— Надо его в какой-нибудь угол засунуть и отметить, где углы были, — предлагает Настя, — а потом расстояние между этими отметками измерить. Вот, например, в угол ящика.

— Туда потом линейку трудно засунуть будет, — возражает Оля.

— Тогда на угол стола кубик поставить и отметить, где он был, потом сдвинуть на эту отметку и измерить вот это расстояние, — Александра показывает, как это делается.

— Если не запрещается по рисунку измерять, — вступает в разговор Катя, — то можно так нарисовать.

Она подходит к доске, рисует и объясняет:

— Если вот здесь отложить расстояние по рёбрам, а здесь — по граням, то вот это расстояние — как раз между нужными углами.

Счастливый номер

3 марта

Зашёл разговор, чем «сегодня» отличается от «вчера», как развиваются наука и техника. Рассказал, что в начале нашего века ребята собирали номера увиденных ими автомобилей. Конечно, не свинчивали, а записывали эти номера. Вот такой редкостью был автомобиль в Москве каких-нибудь семьдесят-восемьдесят лет назад.

— А нам номер на машине поменяли, теперь он трёхзначный, — делится новостью Саша. — Легко запоминается — три цифры подряд: один, два, три.

— У машины нашего дедушки тоже четыре цифры подряд в номере, — сообщает Тамара. — Пятьдесят шесть — семьдесят восемь.

— Попробуйте определить, — обращаюсь ко всем сразу, — каких номеров больше, трёхзначных или четырёхзначных, у которых все цифры подряд.

— Так номеров столько, сколько машин, — сразу возражает Саша.

— А машин разных в России несколько миллионов, — присоединяется к нему Дима, — пока перечислять будем...

— Согласен, у всех машин номера разные и отличаются они не только цифрами, но и буквами. Сегодня поговорим о цифрах. **Сколько разных номеров можно составить из трёх цифр?**

— Восемьсот девяносто девять, — сообщает Александра после некоторого раздумья.

— Нет, девятьсот, — поправляет её Костя.

Прекращаю возникший было спор.

— Уточните потом, сейчас это не так важно. Вы из своих подсчётов исключили однозначные и двузначные числа, например, пять или тридцать восемь. Но номера состоят из трёх цифр и соответствующие номера будут выглядеть так:

5 — 005 38 — 038

— Значит, всех номеров — девятьсот девяносто девять, — сразу реагирует Саша.

— Тысяча, — поправляю Сашу. — Номер 000 имеет право на существование, хотя, признаться честно, машин с такими номерами не встречал. **А сколько разных номеров можно составить из четырёх цифр?**

— Десять тысяч, — сразу отвечают почти все.

— Получается, что всех телефонов в Москве — миллион, — замечает Костя.

— Десять миллионов, — поправляет его Настя. — У каждого телефона семь цифр.

— Только не телефонов, а номеров телефонов, — вносит ещё одну поправку Катя.

— Вернёмся к задаче. Каких номеров, цифры в которых идут подряд, больше — трёхзначных или четырёхзначных?

— Это сколько же номеров перебрать надо, — огорчается Миша.

— Совсем немного, я сейчас напишу, — отвечает ему Лена и берёт мел.

Желающих выписать нужные номера оказывается много и после приведения записей в порядок на доске остаётся такая таблица.

012	0123
123	1234
234	2345
345	3456
456	4567
567	5678
678	6789
789	

— Получается, что трёхзначных номеров больше? — удивляется Дима. — Мне казалось, наоборот должно быть.

— А сколько таких двузначных номеров?

— Девять, — уверенно отвечает Саша.

— Телефонных номеров только четыре штуки наберётся таких, — замечает Оля и добавляет: — А номеров из одиннадцати цифр и вовсе не будет.

10 марта

— В прошлый раз мы выяснили, что всего может быть десять тысяч разных четырёхзначных номеров. Состоят эти номера из левых и правых чисел, например 83 — 04. **Сколько номеров, в которых левые и правые числа равные?**

— Сто! — сразу отвечает Саша.

Возражающих нет. Прошу объяснить ответ. Отвечает Александра:

— Двузначных чисел всего сто, вместе с однозначными, конечно. Значит, и таких номеров сто будет. Их можно просто всех перечислить по порядку от 00 — 00 до 99 — 99.

— Прекрасно! Теперь попробуйте сосчитать, **сколько всего номеров, в которых левые числа больше правых?** Например, в номере 21 — 04 левое число больше правого, в номере 81 — 83 наоборот, больше правое.

— Можно, конечно, все номера переписать и сосчитать, — предлагает Оля, — но это неинтересно.

— Подумайте, — обращаюсь ко всем, — сколько номеров начинается с числа 56?

— Сто, — отвечает Александра, — их всех перечислить можно, от 56 — 00 до 56 — 99. А зачем это?

— Ясно, зачем, — догадывается Дима. — Если левое число 56, то из этих ста номеров у пятидесяти пяти левое число больше правого.

— У пятидесяти шести, — поправляет его Оля. — Ты про ноль забыл.

— А если левое число, например, 20, — продолжает Лена, — то таких номеров тоже двадцать. Правильно?

— Правильно, — подтверждает Саша. — Нам надо сложить все числа от единицы до девяносто девяти.

— Долго складывать придётся, — замечает Настя.

— Мы такие задачи уже решали, год назад. Или даже раньше, — говорит Костя. — Тебя тогда не было. Надо крайние сложить и сумму на число пар умножить.

Валя выписывает на доске несколько пар чисел.

1 + 99 2 + 98 3 + 97 4 + 96

Возникает небольшой спор, сколько всего таких пар. Общими усилиями выяснили, что таких пар сорок девять, а число пятьдесят остаётся без пары. Ответ получается такой:

$100 \times 49 + 50 = 4950$

— А можно я по-другому сосчитаю? — спрашивает Катя. — Вот смотрите, всего номеров десять тысяч, так? Из них сто такие, что левые и правые числа равны. Остаётся 9900, у них левые и правые числа не равны. Всегда есть два номера, у которых левые и правые числа местами поменялись. Например, так, — Катя пишет на доске.

38 — 61 61 — 38

— Если у одного больше левое число, то у другого больше правое, — продолжает она. — Значит, оставшиеся 9900 надо просто разделить пополам. Ответ получается тот же.

17 марта

— Сегодня попытаемся сосчитать количество «счастливых номеров» у автомобилей. Будем рассматривать четырёхзначные номера.

— А что значит счастливый номер? — спрашивает кто-то.

— Мне мама про счастливые билеты рассказывала, — опережает меня Оля. — Они с подругами перед экзаменами садились в трамвай и ждали, когда «счастливый» билет попадётся. Тогда в трамвае кассы стояли, в них три копейки опускали и билет себе отрывали. Номер билета из шести цифр состоял. Билет считался «счастливым», если сумма трёх первых цифр равнялась сумме трёх последних. Правильно я объяснила?

— Правильно. **Но у нас номера четырёхзначные и «счастливым» будет тот, у которого сумма двух первых цифр совпадает с суммой двух последних. Например, номер 23–05 «счастливый», а номер 07–21 какой?**

— Нет! «Несчастливый». Слева сумма семь, а справа — три.

— В прошлый раз мы выяснили, что разных четырёхзначных номеров всего десять тысяч. Сколько среди них «счастливых»?

Через несколько минут появляются первые предложения.

— Проще всего выписать десять тысяч номеров и пересчитать все «счастливые», — говорит Дима и тут же добавляет: — Времени много на это уйдёт.

— Не надо перебирать все десять тысяч, — говорит Саша. — Слева всего сто разных чисел и справа тоже сто. Их и надо сравнивать, только как...

— Воспользуемся Сашиным предложением и рассмотрим какой-нибудь конкретный случай. Пусть левые цифры дают сумму 2. Номер считается «счастливым», если правые цифры тоже дают сумму 2. Какие числа могут быть справа? Настя, напиши их на доске.

После некоторого раздумья Настя записывает три числа.

02 11 20

— Слева тоже могут быть только такие числа, — замечает Оля, — потому что только их цифры дают сумму 2.

— Прекрасно! Запишем это так.

02	02
11	11
20	20

— Число 02 слева даст «счастливый» номер в паре с любым из трёх правых чисел.

— Проделаем то же самое с левыми числами 11 и 20. «Счастливых» номеров с суммой 2 ровно столько, сколько в случае с числом 02.

— Сколько получилось счастливых номеров с суммой 2?

— Девять, — сразу отвечает Саша, не пересчитывая стрелки. — Слева три варианта и справа три варианта. Каждый с каждым дают «счастливый» номер. Трижды три — девять.

— Подскажу, что сумму 5 две цифры дают в шести разных комбинациях. Сколько «счастливых» номеров имеют сумму 5 слева и справа?

— Тридцать шесть, — торопится Лена, — потому что и слева и справа одни и те же варианты!

— А какие вообще возможны суммы двух цифр?

— Самая маленькая — два, — говорит Саша.

— А самая большая — восемнадцать, — добавляет Оля. — Девять плюс девять.

— Самая маленькая сумма не два, а ноль, — уточняет Дима.

— Помните, как мы разные суммы для двух кубиков искали, — предлагает Катя. — Надо сделать то же самое, только не от единицы до шести, а от нуля до девяти.

Дети уже имеют опыт составления разных таблиц, поэтому быстро договариваются между собой, кто какие суммы будет расписывать. Только Валя и Тамара что-то пишут на листочке, все остальные работают у доски. Таблица получилась довольно большая, заняла почти всю доску…

Теперь все вместе выясняем, что за таблица у нас получилась. Верхняя строчка этой таблицы — суммы двух цифр, левых или правых. В столбцах выписаны все возможные пары цифр, дающие при сложении соответствующие суммы. Интересно, что все дети выписывали нужные пары так, что первая цифра уменьшалась, а вторая возрастала. Это позволяет избегать повторов или пропусков каких-либо комбинаций. Такой навык приобретается при многократном составлении всевозможных таблиц, а мы их составили за время наших занятий немало. Внизу две строчки. В первой — число этих пар. Во второй — число «счастливых» номеров с этой самой суммой. Например, номера 59–86, 77–68, 95–95 — «счастливые». Всего «счастливых» номеров с суммой 14 получается 25. **Чтобы определить, сколько всего четырёхзначных счастливых номеров, достаточно сложить все числа последней строки.**

— Борис Львович, посмотрите, — Валя и Тамара оторвались от своего листочка, — у нас таблица немного другая получилась. По ней очень легко сосчитать, какие суммы из каких цифр получаются:

Верхняя строка — одна из двух цифр, правая колонка — вторая. На пересечении соответствующих строк и столбцов — сумма двух цифр. Все результаты, естественно, те же, что и в предыдущей таблице, но здесь исключаются пропуски и повторы разных комбинаций.

Москва