УДК 372.851

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ЧЕРЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОГО МЕТОДА

Косярский Александр Алексеевич,
педагог дополнительного образования МАОУ ДО ЦДТ «Прикубанский», г. Краснодар

Мороз Ольга Викторовна,
доцент кафедры информационных и образовательных технологий факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», кандидат педагогических наук, г. Краснодар

ПРИМЕРЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗУЧЕНИИ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В РАМКАХ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ. СРАВНЕНИЕ ДАННОГО МЕТОДА С КЛАССИЧЕСКИМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ. ОПОРНЫЕ СХЕМЫ-АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, КОТОРЫЕ МОГУТ БЫТЬ ИСПОЛЬЗОВАНЫ В КАЧЕСТВЕ НАГЛЯДНОГО МАТЕРИАЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ.

• *координатно-векторный метод* • *ЕГЭ* • *стереометрия* • *визуализация* • *опорные схемы* • *граф-схемы*

Геометрия является одним из традиционных разделов школьного курса математики. С 7-го по 9-й класс учащиеся изучают важнейшие разделы «Планиметрии», а в 10–11-х классах начинается новый и достаточно сложный для восприятия большинством школьников раздел «Стереометрия».

В курсе математики при решении стереометрических задач рассматривается преимущественно аналитический метод, который опирается на сформированный в 7–9-х классах математический аппарат. Несмотря на универсальность данного метода, у него есть ряд минусов, один из которых состоит в том, что в большинстве задач использование данного метода приводит к громоздким решениям, а при наличии неточности построения чертежа может привести к ошибочным выводам. В качестве альтернативного метода решения задач такого типа можно рассмотреть координатно-векторный метод.

Появление координатно-векторного метода в геометрии связано с использованием алгебры при решении геометрических задач, что, в свою очередь. привело к появлению новой самостоятельной науки — аналитической геометрии. Координатно-векторный метод актуален на сегодняшний день, так как находит своё применение в разных областях науки и общественной жизни [7]. Метод координат лежит в основе механики, геодезии, астрономии, используется в медицине, экономике, географии, информатике. Вектор используется в физике для характеристики физических величин. Его изучению уделяют внимание как в школьной программе, так и в таких разделах высшей математики, как «Линейная алгебра», «Функциональный анализ». Рассматриваются прямоугольная, полярная, аффинная, сферическая, цилиндрическая и другие системы координат. В данной статье мы рассмотрим прямоугольную систему координат.

Координатно-векторный метод соединяет в себе метод координат и векторный метод. В координатном методе целесообразно знакомиться с прямоугольной системой координат, способами нахождения и задания координат точки на плоскости и в пространстве. В векторном методе должны рассматриваться понятия вектора и связанные с ним определения, теоремы и свойства. Объединив координатный и векторный метод, можно вывести необходимые формулы и найти удобный способ решения любой геометрической задачи.

В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике стереометрия представлена в первой части заданием 8, а во второй части заданием 14. Задание 8 требует базовых знаний стереометрии и не приводит к использованию сложных математических формул. Задание 14 гораздо сложнее. При решении обеих задач можно использовать координатно-векторный метод для упрощения решения, что. в свою очередь, минимизирует вероятность допущения ошибки. Рассмотрим решение задачи аналитическим и координатно-векторным методом.

Задача. (Пробный экзамен, Санкт-Петербург, 22.03.2013 г).

Сторона основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота — 4. Точка E середина отрезка CD, точка F — середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CD и B_1E.

1 способ. Аналитический метод

1) Построим чертёж правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1).

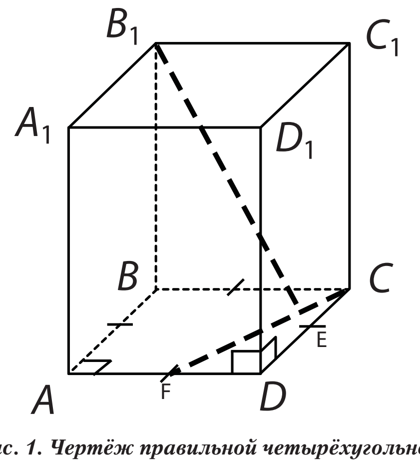

Рис. 1. Чертёж правильной четырёхугольной призмы

2) Заметим, что данные прямые являются скрещивающимися. Для того чтобы найти угол между данными прямыми, необходимо построить такую прямую, которая была бы параллельна CF и пересекалась с прямой B_1E. Тогда полученный угол будет равен искомому.

3) Выполним параллельный перенос отрезка CF в отрезок EF_1 (рис. 2).

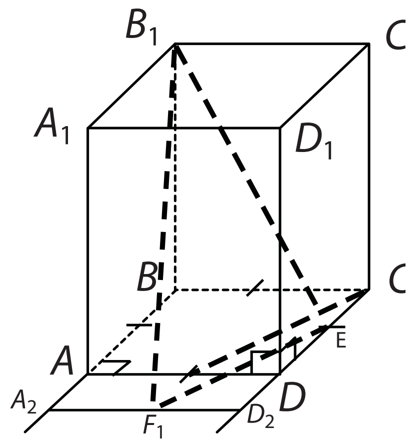

Рис. 2. Параллельный перенос отрезка

Так как $FC \parallel EF_1$ и $EF_1 \cap B_1E$, то $\angle B_1EF_1$ равен искомому углу между B_1E и CF.

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник BEC. По теореме Пифагора имеем:

$$BE^2 = BC^2 + CE^2$$

$$BE^2 = 4 + 1$$

$$BE = \sqrt{5}$$

5) Рассмотрим прямоугольный треугольник BA_2F_1. Так как отрезок EF_1 получен параллельным переносом CF, то $CF = AA_2 = 1$. Тогда $BA_2 = BA + AA_2 = 3$. По теореме Пифагора из треугольника BA_2F_1 имеем:

$$BF_1^2 = BA_2^2 + A_2F$$

$$BF_1^2 = 9 + 1$$

$$BF_1 = \sqrt{10}$$

6) Заметим, что так как $ED_2 = BC$, а $F_1D_2 = CE$, то прямоугольные треугольники F_1D_2E и EBC равны, а значит, $EF_1 = BE = \sqrt{5}$.

7) Рассмотрим прямоугольный треугольник BF_1B. По теореме Пифагора имеем:

$$B_1F_1 = \sqrt{16+10}$$

$$B_1F_1 = \sqrt{26}$$

8) Рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1E_1. По теореме Пифагора имеем:

$$B_1E = \sqrt{16+5}$$

$$B_1E = \sqrt{21}$$

9) Рассмотрим треугольник B_1EF_1. Заметим, что для данного треугольника выполнима теорема Пифагора:

$$\sqrt{26}^2 = \sqrt{21}^2 + \sqrt{5}^2 \Rightarrow 26 = 26.$$

Причём катетами данного треугольника являются отрезки B_1E и EF_1. Тогда угол между ними равен 90°, а значит, и искомый угол равен 90°.

Ответ: 90°.

2 способ. Координатно-векторный метод

1) Впишем правильную четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в трёхмерную прямоугольную декартову систему координат (рис. 3).

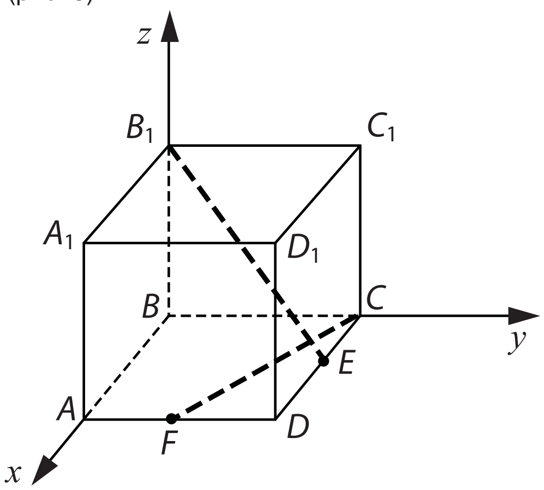

Рис. 3. Правильная четырёхугольная призма в ПДСК

2) В данной ПДСК имеем следующие точки и их координаты: $B(0; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 4)$, $E(1; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $F(2; 1; 0)$,

3) Для того чтобы найти угол между двумя прямыми, необходимо найти их направляющие векторы и затем найти угол между данными векторами, полученный угол является искомым.

4) Направляющий вектор для отрезка прямой CF равен $\overrightarrow{CF} = (2; -1; 0)$, а для отрезка прямой B_1E имеем вектор $\overrightarrow{B_1E} = (1; 2; -4)$.

5) Угол между векторами можно найти по формуле (1):

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{B_1E}\right|}{\left|\overrightarrow{CF}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1E}\right|} \qquad (1)$$

6) Найдём длины векторов:

$$\left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

а $\left|\overrightarrow{B_1E}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}.$

7) Найдём модуль скалярного произведения векторов:

$$\left|\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{B_1E}\right| = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 +$$

$$+ 0 \cdot (-4) = 0.$$

8) Таким образом

$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^{\circ}.$$

Ответ: 90°.

Заметим, что решение задачи аналитическим способом является более объёмным и сложным в сравнении с координатно-векторным методом. При решении задачи первым способом использовался метод параллельного переноса, который учащимися воспринимается довольно сложно, неверное построение искомого отрезка может привести, в свою очередь, к неверным выводам, что скажется на решении задачи. В случае с координатно-векторным методом решения сложность может заключаться лишь в запоминании формулы для нахождения косинуса искомого угла, однако данный метод требует минимального количества расчётов и логических выводов, что существенно снижает вероятность допущения ошибки.

Необходимо сказать, что учащиеся школ испытывают трудности, связанные с усвоением большого объёма математической информации, получаемой в рамках школьного курса математики, что является следствием нехватки времени. Учителя математики также сталкиваются с проблемой нехватки времени, обусловленной необходимостью следовать установленному учебному плану, что, в свою очередь, сказывается на качестве математических знаний и объёме математического инструментария, которым может овладеть учащийся. Перед педагогом ставится сложная задача: обеспечить формирование у учащихся качественных математических знаний, сведений о математических моделях, реальных математических процессах и предоставить учебный материал в максимально доступной для восприятия учащимся форме при условии ограниченности временного ресурса.

Авторы статьи разработали специальные структурно-логические схемы по теме «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач», которые могут быть использованы на уроках геометрии в 10–11-х классах как при объяснении нового материала, так и для обобщения и систематизации полученных знаний. Методическая значимость данной формы представления учебной информации высока, поскольку схемы освобождают от неактуальной, малозначимой информации, что способствует рациональному распределению теоретического материла и времени, отведённого на его изучение. Кроме того, необходимо отметить, что использование схем позволяет учащимся овладеть навыками анализа, синтеза и сравнения информации, представляемой в графической форме. Ещё одним преимуществом таких схем является содержание информации, необходимой для запоминания и сгруппированной таким образом, чтобы схему можно было зрительно «сфотографировать», что отвечает правилам мнемоники [3, 4, 5, 10].

Рассмотрим более подробно визуальный подход систематизации знаний, полученных в разделе стереометрии школьного курса геометрии. Приведём пример структурно-логической схемы «Классификация основных типов задач, решаемых координатно-векторным методом», которая может быть использована как в рамках уроков геометрии, так и при подготовке к сдаче единого государственного экзамена по профильной математике в 11-м классе (см. рис. 1).

Классификация типов задачи № 14 ЕГЭ по математике профильного уровня и основные методы их решения, представленные на рис. 1, продиктованы в первую очередь необходимостью в организации процесса систематического обучения геометрии в школьном курсе математики, а также соответствует кодификаторам и спецификациям КИМ ЕГЭ [9], перечню задач, представленных на электронных образовательным ресурсах [4]. Однако необходимо отметить, что наглядное представление данных типов задач в виде граф-схемы ранее представлено не было.

На граф-схеме (рис. 4) представлены следующие типы задач, решаемых координатно-векторным методом:

- «Расстояние между прямыми и плоскостями»;
- «Угол между прямой и плоскостью»;
- «Угол между прямыми»;
- «Расстояние от точки до плоскости»;
- «Угол между плоскостями».

Для каждого типа приводятся формулы, при помощи которых может быть решена задача указанного типа и указываются необходимые для этого данные.

Другим примером структурно-логической схематизации являются табличные опорные схемы-алгоритмы:

- «Угол между прямыми в пространстве» (рис. 5);
- «Угол между прямой и плоскостью» (рис. 6);
- «Угол между плоскостями» (рис. 7);
- «Расстояние между прямыми и плоскостями» (рис. 8);
- «Расстояние от точки до плоскости» (рис. 9).

Стоит отметить, что решение задач координатно-векторным методом является сложным ввиду отсутствия наглядного алгоритма, позволяющего безошибочно решить поставленную математическую задачу. В большинстве источников [1, 2, 6] алгоритм решения задач координатно-векторным методом содержится или в словесной форме или представлен в качестве примера решения конкретной математической задачи. К сожалению, на сегодняшний день

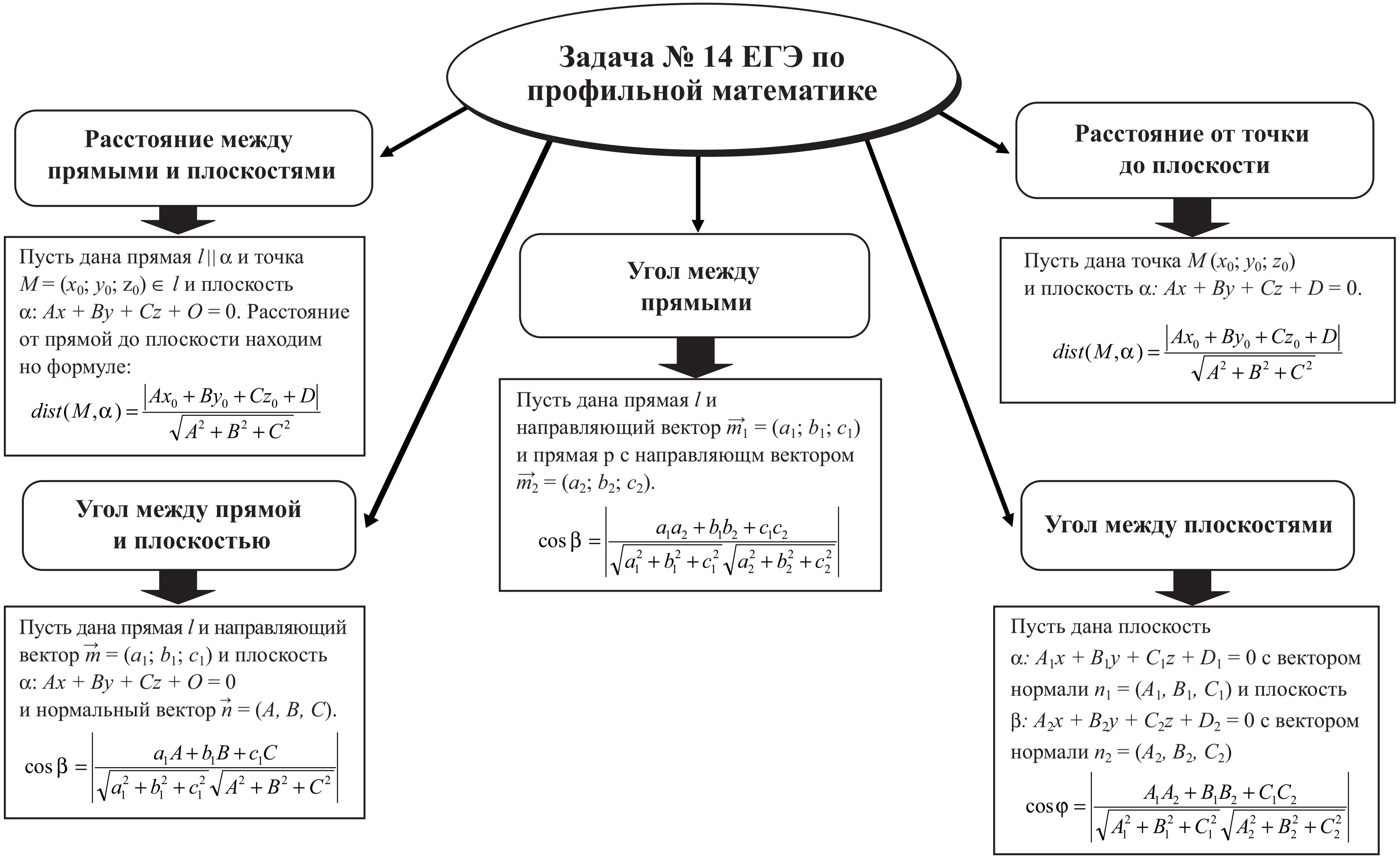

Рис. 4. Визуализация задач ЕГЭ, решаемых координатно-векторным методом

Угол между прямыми в пространстве	
Условие	В пространстве заданы две прямые l_1, l_2 (пересекающиеся, скрещивающиеся или параллельные)
1	Вводим трёхмерную прямоугольную декартову систему координат
2	Описываем координаты концов отрезков, задающих прямые l_1, l_2 соответственно в ведённой ПДСК
3	Найти координаты направляющих векторов $\vec{m}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{m}_2 = (x_2, y_2, z_2)$
4	Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ по формуле: $$\vec{m}_1 \bullet \vec{m}_2 = x_1 \bullet x_2 + y_1 \bullet y_2 + z_1 \bullet z_2$$
5	Вычислить длины направляющих векторов $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ прямых l_1, l_2 соответственно, по формуле: $$\lvert\vec{m}_1\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$
6	Вычислить значение $\cos(\widehat{\vec{m}_1, \vec{m}_2})$, равное косинусу угла между прямыми l_1, l_2 по формуле: $$\cos(\widehat{\vec{m}_1, \vec{m}_2}) = \left\lvert \frac{\vec{m}_1 \bullet \vec{m}_2}{\lvert\vec{m}_1\rvert \bullet \lvert\vec{m}_2\rvert} \right\rvert$$
7	Находим значение $\angle(l_1, l_2) = \arccos(\cos(\widehat{\vec{m}_1, \vec{m}_2})$

Рис. 5. Опорная схема-алгоритм «Угол между прямыми в пространстве»

Угол между прямой и плоскостью	
Условие	В пространстве задана прямая l и некоторая плоскость α, пересекаемая данной прямой. Найти угол между прямой и плоскостью
1	Вводим трёхмерную прямоугольную декартову систему координат
2	Описываем координаты концов отрезка, задающих прямую l в ведённой ПДСК
3	Найти координаты направляющего вектора $\vec{m} = (a_1, b_1, c_1)$
4	Записать уравнение плоскости α в виде: $Ax + By + Cz + D = 0$
5	Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости α. $$\vec{n} = (A, B, C)$$
6	Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ по формуле: $$\vec{m} \bullet \vec{n} = a_1 \bullet A + b_1 \bullet B + c_1 \bullet C$$
7	Вычислить длины направляющего вектора $\vec{m}$ прямой l и вектора нормали $\vec{n}$ плоскости α по формуле: $$\lvert\vec{m}_1\rvert = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$
8	Вычислить значение $\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}})$, равное косинусу угла между прямой l и плоскостью α по формуле: $$\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \left\lvert \frac{\vec{m} \bullet \vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert \bullet \lvert\vec{n}\rvert} \right\rvert$$
9	Находим значение $\angle(l_1, \alpha) = \arccos(\cos(\widehat{\vec{m}_1, \vec{n}})$

Рис. 6. Опорная схема-алгоритм «Угол между прямой и плоскостью»

Угол между плоскостями	
Условие	В пространстве заданы пересекающиеся плоскости α, β. Найдите угол между плоскостями
1	Вводим трёхмерную прямоугольную декартову систему координат
2	Записать уравнение плоскости α в виде: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$
3	Записать уравнение плоскости β в виде: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
4	Находим координаты вектора нормали $\vec{n}_1$ к плоскости α. $\vec{n}_1=(A_1B_1C_1)$
5	Находим координаты вектора нормали $\vec{n}_1$ к плоскости β. $\vec{n_2}=(A_2B_2C_2)$
6	Вычислить скалярное произведение векторов нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ по формуле: $\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}=A_1\bullet A_2+B_1\bullet B_2+C_1\bullet C_2$
7	Вычислить длины векторов нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ плоскостей α, β *по* формуле: $\lvert\vec{n_1}\rvert=\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}$
8	Вычислить значение $\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})$, равное косинусу утла между плоскостями α и β по формуле: $\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})=\left\lvert\frac{\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\bullet\lvert\vec{n_2}\rvert}\right\rvert$
9	Находим значение $\angle(\alpha,\beta)=\arccos(\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}))$

Рис. 7. Опорная схема-алгоритм «Угол между плоскостями»

Расстояние между прямыми и плоскостями	
Условие	В пространстве задана плоскость α, некоторая прямая $l \parallel \alpha$ и точка *M*, лежащая на данной прямой. Найти расстояние от прямой до плоскости
1	Вводим трёхмерную прямоугольную декартову систему координат
2	Описываем координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой *l* в ведённой ПДСК
3	Записать уравнение плоскости α в виде: $Ax + By + Cz + O = 0$
4	Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости α. $\vec{n}=(A,B,C)$
5	Вычислить длину вектора нормали $\vec{n}$ плоскости α по формуле: $\lvert n_1\rvert=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$
6	Вычислить расстояние от точки *M* до плоскости α по формуле: $dist(M,\alpha)=\frac{\lvert A\bullet x_0+B\bullet y_0+C\bullet z_0+D\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$

Рис. 8. Опорная схема-алгоритм «Расстояние между прямыми и плоскостями»

Расстояние от точки до плоскости	
Условие	В пространстве задана плоскость α, и некоторая прямая точка M, не лежащая на данной плоскости. Найти расстояние от точки до плоскости
1	Вводим трёхмерную прямоугольную декартову систему координат
2	Описываем координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой l в ведённой ПДСК
3	Записать уравнение плоскости α в виде: $Ax + By + Cz + O = 0$
4	Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости α. $\vec{n} = (A, B, C)$
5	Вычислить длину вектора нормали $\vec{n}$ плоскости α по формуле: $\lvert n_1 \rvert = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$
6	Вычислить расстояние от точки M до плоскости α по формуле: $dist(M, \alpha) = \dfrac{\lvert A \bullet x_0 + B \bullet y_0 + C \bullet z_0 + D \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert}$

Рис. 9. Опорная схема-алгоритм «Расстояние от точки до плоскости»

существует очень мало наглядных схем, позволяющих охватить алгоритм одним взором. Ввиду этого мы предлагаем представленный выше комплекс табличных опорных схем-алгоритмов.

Исходя из своего образовательного назначения данные опорные схемы могут выполнять следующие функции: диагностическую, контролирующую, обучающую. Внедрение предложенных граф-схем и табличных опорных схем-алгоритмов можно расценивать как эффективный приём развития творческого, логического мышления, который также позволяет задействовать основной канал восприятия информации — визуальный.

Ввиду биологической предрасположенности человека к восприятию преимущественной визуальной информации, сгруппированной в укрупнённые структурные единицы (опорные схемы, таблицы), использование метода сгущения информации при моделировании учебного материала, на наш взгляд, способствует развитию воображения, пространственного и логического мышления. Использование предложенных в статье граф-схем и опорных табличных схем-алгоритмов в школьном курсе математики может способствовать усвоению сложной математической терминологии. Таким образом, предложенные средства визуализации образовательного процесса при изучении координатно-векторного метода решения задач направлены в первую очередь на повышение качества основного общего образования, так как они обеспечивают формирование прочных теоретических и практических знаний, умений и навыков в процессе изучения дисциплин математической направленности. ❑

Литература

1. *Атанасян Л.С.* Геометрия 10–11-й класс: учебник для общеобразоват. учреждений. — 15-е изд. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев. Л.С. Киселева, Э.Г. Позняк. — М.: Просвещение, 2007. — 256 с.: ил.
2. *Вергазова О.Б*. Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) / О.Б. Вергазова // Научно-методический электронный журнал «Концепт». — 2017. — № 1.
3. *Грушевский С.П.* Высшая математика в схемах и таблицах: учеб.-метод. пособие / С.П. Грушевский, О.В. Засядко, О.В. Иванова, О.В. Мороз. — Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2018. — 109 с.
4. *Грушевский С.П*. Сгущение учебной информации в профессиональном образовании: монография / С.П. Грушевский, А.А. Остапенко. — Краснодар: Кубан. гос. ун-т, 2012. — 188 с.

5. *Засядко О.В.* Визуализация в изучении простейших уравнений математической физики / О.В. Засядко, А.А. Косярский, С.П. Шмалько // Образовательные технологии. — 2019. — № 1. — С. 103–109.
6. *Леваков В.В.* Решение заданий С2 ЕГЭ по математике координатно-векторным методом / В.В. Леваков. — Саратов: МОУ «СОШ №34 с УИП», 2013. — 44 с.
7. *Мороз О.В.* Профессионально ориентированное конструирование дидактического обеспечения курса математики для специальности «регионоведение: автореф. дис. … канд. пед. наук / О.В. Мороз. — М., 2007. — 22 с.
8. Решу ЕГЭ [электронный ресурс]: образовательный ресурс / Д.Д. Гущин, 2011–2019. Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/, свободный.
9. ФИПИ Демоверсии, спецификации, кодификаторы [электронный ресурс] / Федеральный институт педагогических измерений 2004–2019. Режим доступа: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory, свободный.
10. *Шмалько С.П.* Сгущение учебной профессионально ориентированной информации по математике при обучении студентов-экономистов / С.П. Шмалько // Теория и практика общественного развития. — 2011. — № 6. — С. 150–166.

Literatura

1. *Atanasyan L.S.* Geometriya 10–11 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy. — 15-ye izd. / L.S. Atanasyan, V.F. Butuzov, S.B. Kadomtsev. L.S. Kiseleva, E.G. Poznyak. — M.: Prosveshcheniye, 2007. — 256 s.: il.
2. *Vergazova O.B.* Primeneniye koordinatno-vektornogo metoda resheniya stereometricheskikh zadach v protsesse podgotovki k YEGE po matematike (profil'nyy uroven') / O.B. Vergazova // Nauchno-metodicheskiy elektronnyy zhurnal «Kontsept». — 2017. — № 1.
3. *Grushevskiy S.P.* Vysshaya matematika v skhemakh i tablitsakh: ucheb.-metod. posobiye / S.P. Grushevskiy, O.V. Zasyadko, O.V. Ivanova, O.V. Moroz. — Krasnodar: Kubanskiy gos. un-t, 2018. — 109 s.
4. *Grushevskiy S.P.* Sgushcheniye uchebnoy informatsii v professional'nom obrazovanii: monografiya / S.P. Grushevskiy, A.A. Ostapenko. — Krasnodar: Kuban. gos. un-t, 2012. — 188 s. Zasyadko O.V. Vizualizatsiya v izuchenii prosteyshikh uravneniy matematicheskoy fiziki / O.V. Zasyadko, A.A. Kosyarskiy, S.P. Shmal'ko // Obrazovatel'nyye tekhnologii. — 2019. — № 1. — S. 103–109.
5. *Zasyadko O.V*. Vizualizaciya v izuchenii prostejshih uravnenij matematicheskoj fiziki / O.V. Zasyadko, A.A. Kosyarskij, S.P. Shmal'ko // Obrazovatel'nye tekhnologii. — 2019. — № 1. — S. 103–109.
6. *Levakov V.V.* Resheniye zadaniy S2 YEGE po matematike koordinatno-vektornym metodom / V.V. Levakov. — Saratov: MOU «SOSH №34 s UIP», 2013. — 44 s.
7. *Moroz O.V.* Professional'no oriyentirovannoye konstruirovaniye didakticheskogo obespecheniya kursa matematiki dlya spetsial'nosti «regionovedeniye: avtoref. dis. … kand. ped. nauk / O.V. Moroz. — M., 2007. — 22 s.
8. Reshu YEGE [elektronnyy resurs]: obrazovatel'nyy resurs / D.D. Gushchin, 2011–2019. Rezhim dostupa: https://ege.sdamgia.ru/, svobodnyy.
9. FIPI Demoversii, spetsifikatsii, kodifikatory [elektronnyy resurs] / Federal'nyy institut pedagogicheskikh izmereniy 2004–2019. Rezhim dostupa: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory, svobodnyy.
10. *Shmal'ko S.P*. Sgushcheniye uchebnoy professional'no oriyentirovannoy informatsii po matematike pri obuchenii studentov-ekonomistov / S.P. Shmal'ko // Teoriya i praktika obshchestvennogo razvitiya. — 2011. — № 6. — S. 150–166.