Практические задачи по геометрии

Методические материалы при подготовке к экзаменам

Елена Ивлиева,
кандидат педагогических наук

Практические задачи по геометрии — это задания под номером 17, которые необходимо уметь решать учащимся, оканчивающим основную школу и сдающим основной государственный экзамен по математике (ОГЭ). Задание №17 входит в блок «Реальная математика». Среди них встречаются задачи на нахождение величины угла между часовой и минутной стрелками часов, угла поворота Земли при движении вокруг своей оси; угла между спицами в колесе, количества спиц в колесе. Для решения таких задач необходимы некоторые представления о часах, вращении Земли, колёсах и спицах велосипедов, машин, а также знания известных геометрических фигур (окружность, круг, центральный угол), умения находить геометрические величины (градусная мера угла, длина окружности).

Предлагаем учителю материалы, которые можно использовать на уроках геометрии при подготовке учащихся к экзамену.

Задачи о часах

Из всех известных приборов измерения времени самыми распространёнными являются часы, которые используются не только в быту, но и в науке, технике. Без них невозможно представить жизнь современного человека. Для того чтобы решать прикладные задачи, в том числе связанные со стрелками часов, необходимо восстановить и уточнить имеющиеся у учащихся элементарные знания и представления о них, а также показать возможности применения этих знаний и умений в разнообразных ситуациях. Желательно напомнить учащимся некоторые особенности устройства часов для того, чтобы лучше понять смысл и способы решения соответствующих задач.

Часы — это прибор для измерения времени. Точнее следует понимать **часы** как прибор для определения текущего **времени суток** и измерения продолжительности временны́х интервалов в единицах, меньших, чем одни **сутки.** С часами связаны понятия: циферблат часов, шкала, деления, метка, цена деления, длина дуги окружности, величина центрального угла.

Будем рассматривать часы, которые представлены на рисунках ниже, т.е. те, которые имеют циферблат и стрелки (часовую и минутную).

В *словаре Ушакова* дано понятие циферблата *(нем. Zifferblatt*) — доска, пластинка с делениями, обозначающими часы, минуты или иные единицы измере-

ния, с цифрами, проставленными под ними (около, над).

Шкала — часть отсчётного устройства прибора, представляющая собой совокупность отметок (точек, штрихов, расположенных в определённой последовательности) и проставленных у некоторых из них чисел отсчёта или других символов, соответствующих ряду последовательных значений измеряемой величины. Параметры шкалы — её пределы, цена деления (разность значений величины, соответствующих двум соседним отметкам) и другие — определяются пределами измерений прибора. *Например*, шкала линейки представляет собой совокупность делений (меток, штрихов) и цифр, нанесённых вдоль края планки, и соотнесённые ряду последовательных значений измеряемой длины (*мм*, *см*, *дм* и др.). С помощью шкалы линейки измеряют длину отрезка (обычно не более 30 см).

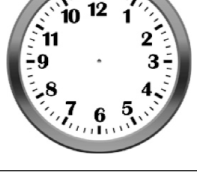
Обратимся к толкованию слов метка и деление. Метка[1] — знак, сделанный на каком-либо предмете и т.п. для отличия от других подобных. Деление[2] — промежуток между двумя чёрточками на измерительной шкале (спец.). Отсюда — нанести деления (поставить штрихи, метки, разметить), цена деления.

Циферблат часов представляет круг со шкалой для измерения времени. **Круг** — часть плоскости, ограниченная окружностью. На окружности введена шкала для измерения времени в минутах и часах.

Для измерения времени в минутах окружность циферблата разделена на 60 частей (короткие штрихи). Учитывая, что 1 ч равен 60 мин,, получаем *минутные* деления (или минутные метки), их 60, они не подписаны, цена такого деления равна 1 минуте (промежуток между двумя короткими штрихами).

Для измерения времени в часах на этой же окружности введена другая шкала. Теперь окружность разделена на 12 частей. Поставлены другие деления (длинные штрихи) — это *часовые* деления (или часовые метки), их 12, они подписаны, цена такого деления равна 1 часу (промежуток между длинными штрихами). Заметим, что между двумя часовыми делениями 5 минутных делений.

Таким образом, на циферблате часов мы видим две шкалы: для измерения времени в минутах и часах. Первая шкала для минутной стрелки часов содержит 60 минутных делений и позволяет измерять время в минутах. Вторая шкала для часовой стрелки часов содержит 12 часовых делений и позволяет измерять время в часах. Проиллюстрируем сказанное на часах без стрелок.



Всего на циферблате нанесено 60 коротких делений, 60 минут. Эти деления не подписаны.

Цена одного минутного деления — 1 минута.

На циферблате нанесено 12 длинных делений, 12 часов. Они подписаны.

Цена одного часового деления — 1 час.

[1] Современный словарь русского языка Т.Ф. Ефремовой.

[2] Толковый словарь русского языка Д.Н. Ушакова.

Посмотрим на часы как на геометрическую фигуру — это круг. Он ограничен окружностью, на которой между короткими или длинными делениями можно выделить дуги этой окружности и найти их длину, а также величины центральных углов, которые опираются на эти дуги.

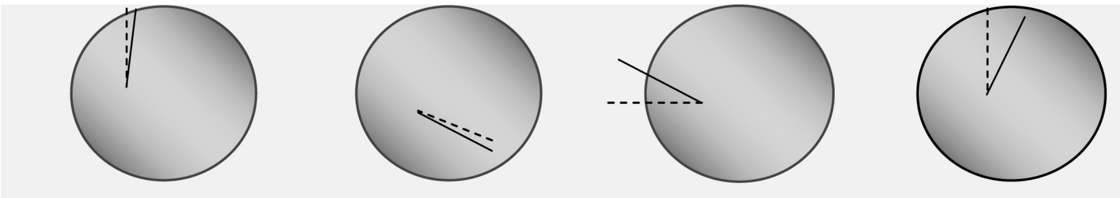
Дуга между 2-мя *минутными* делениями равна 6°. Так как длина дуги окружности равна 360° и всего 60 минутных делений, получим 360° : 60 = 6°. Из геометрии известно, что центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается. Значит, центральный угол, опирающийся на эту дугу, также равен 6°.

Дуга между 2-мя *часовыми* делениями равна 30°, т.к. длина дуги окружности равна 360°, часовых делений 12, значит 360° : 12 = 30°. Т.е. между двумя часовыми делениями дуга окружности равна 30°. И центральный угол, который опирается на эту дугу, также равен 30°.

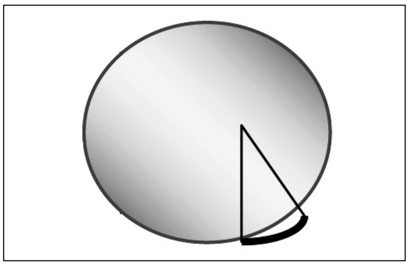
Запомним.

Дуга окружности между любыми двумя *минутными* делениями на циферблате часов равна 6 градусам. Центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен также 6°.

Дуга окружности между любыми двумя *часовыми* делениями равна 30 градусам. Центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен 30°.



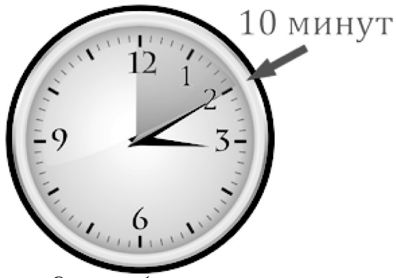
Обратимся снова к часам. Мы выяснили, что на циферблате часов можно выделять дуги и соответствующие им центральные углы. На часах имеются две стрелки (длинная минутная, короткая часовая), которые скреплены в центре. Будем считать стрелки сторонами центрального угла, вершина которого в центре циферблата часов, места скрепления этих стрелок. При движении стрелки часов образуют различные центральные углы, а концы стрелок при этом описывают соответствующие этим углам дуги (см. рисунки ниже).



Перейдём к экзаменационным задачам, в которых требуется найти величины углов (дуг), образованных при движении минутной, часовой, и даже обеих стрелок.

Минутная стрелка

При движении минутной стрелки её конец описывает дугу, с которой связан центральный угол. Этот угол будем рассматривать как угол, образованный минутной стрелкой, одна сторона которого — её первоначальное положение, другая — её конечное положение при движении по окружности. Вершина этого угла находится в центре циферблата. Величину этого угла и соответствующую ему дугу можно вычислить.

 *Угол между любыми 5-ю минутными делениями циферблата равен 30°.*	*Например.* Прошло пять минут, между первоначальным и новым положением минутной стрелки 5 минутных делений, т.е. дуга равна 30°, а стрелки образуют угол 30°. Это легко посчитать: За 1 минуту минутная стрелка опишет угол 6° (напомним, 360° : 60 = 6°), тогда за 5 минутных делений 6° × 5 = 30°.
 *Угол между любыми 10-ю минутными делениями циферблата — 60°.*	*Другой пример.* Прошло 10 минут, минутная стрелка переместилась на 10 минутных делений. Значит, угол между начальным положением минутной стрелки и её конечным положением будет равен 60°, т.к. 6°×10 = 60°.

Некоторые углы легко представить и запомнить.

		
Минутная стрелка за 30 минут описывает $\frac{1}{2}$ *окружности, т.е. угол — 180°.*	*Минутная стрелка за 20 минут описывает* $\frac{1}{3}$ *окружности, т.е. угол 120°.*	*Минутная стрелка за 45 минут описывает* $\frac{3}{4}$ *окружности, т.е. угол 270°.*

Решение задач, связанных с движением минутной стрелки

На экзамене предлагаются задачи на нахождение угла, который описывает минутная стрелка, вращаясь по циферблату часов. Такие задачи можно решать разными способами.

1-й способ. Воспользуемся установленным фактом для движения минутной стрелки.

Дуга (угол) между минутными делениями равна 6° За 1 минуту минутная стрелка опишет угол 6°.

Тогда решение таких задач сводится к умножению количества минут (минутных делений) на 6°.

Примеры решения были рассмотрены выше.

2-й способ. Основан на свойстве пропорции между данными величинами. Задача сводится к составлению и решению пропорции.

Например, какой угол (в градусах) опишет минутная стрелка за 35 минут?

За 60 *минут* — 360°
за 35 *минут* — x°. Тогда

$$x = \frac{35 \times 360}{60} = 210 \text{ (градусов)}.$$

Ответ: 210°.

Другой пример: за сколько минут, вращаясь по циферблату, минутная стрелка опишет угол 72°?

Составим пропорцию:
за 60 *минут* — 360°
за x *минут* — 72°. Получим

$$x = \frac{60 \times 72}{360} = 12 \text{ (минут)}.$$

Ответ: 12 минут.

Примеры задач на вычисление углов при движении минутной стрелки

1. (№ 132759[3]) Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 10 минут?

Решение этой задачи показано выше. *Ответ*: 60°[4].

2. Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 2 минуты? *Ответ*: 12°.

3. Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 12 минут? *Ответ*: 72°.

4. Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 11 минут? *Ответ:* 66°.

5. Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 3 минуты? *Ответ*: 18°.

6. Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 2 часа? *Ответ*: 720°.

Часовая стрелка

Рассмотрим дуги и центральные углы, образованные часовой стрелкой при её движении из некоторого первоначального положения в новое. Будем сравнивать её движение с движением минутной стрелки, т.к. их движение связано. Не трудно установить то, что часовая стрелка движется *медленнее*. Поясним сказанное. Если пройдёт один час, то часовая стрелка переместится всего на 1 *часовое* деление, тогда как минутная стрелка за один час переместится на 60 *минутных* делений. Так как между 2-мя часовыми делениями находится 5 минутных делений, получим $5 : 60 = \frac{1}{12}$, т.е. часовая стрелка проходит в 12 раз меньше делений. Можно сравнить дуги (углы). Минутная стрелка опишет дугу 360°, часовая 30°. Выполнив деление, получим: одна дуга в 12 раз больше другой. Таким образом, минутная стрелка описывает дугу (угол) в 12 раз большую, чем часовая. И наоборот, часовая стрелка описывает дугу (угол) в 12 раз меньшую, чем минутная.

Можно найти дугу (центральный угол), который описывает часовая стрелка за 1 минуту движения минутной стрелки. Получим, что за одну минуту часовая стрелка переместится на одну двенадцатую часть одного минутного деления.

Значит дуга (угол), который она опишет, будет равна 6° : 12 = 0,5°.

Таким образом, часовая стрелка движется в 12 раз медленнее, а минутная в 12 раз быстрее. Рассмотрим примеры движения часовой стрелки, используя установленный факт.

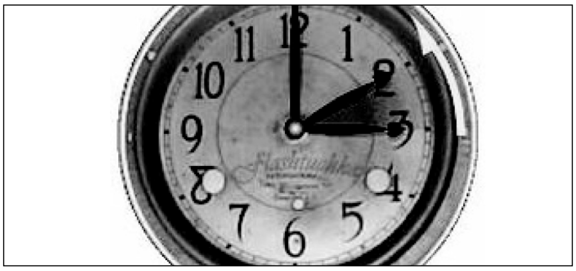
Движение часовой стрелки за один час

Например, часовая стрелка из часового деления 2 переместилась в часовое деление 3 (как показано на рисунке).

---

[3] Задачи с номерами — задачи открытого банка.

[4] Здесь и дальше в ответах экзаменационных работ не требуется писать наименование величин.

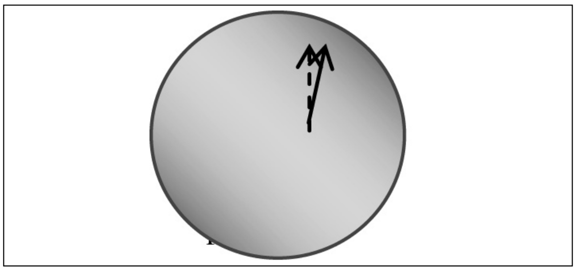


Значит, если прошёл 1 час, минутная стрелка за это время опишет угол (дугу) равный 360°. Тогда часовая стрелки опишет угол (дугу) в 12 раз меньше, он будет равен 30°, т.к. 360° : 12 = 30°.

Можно **посчитать** иначе.

Часовая стрелка из часового деления 2 переместилась в часовое деление 3 (как показано на рисунке). Так как между часовыми делениями 5 минутных делений, то 6°× 5 = 30°.

Движение часовой и минутной стрелки за одну минуту



1. Выясним, какой угол опишет часовая стрелка за одну минуту.

Сравним её движение с движением минутной стрелки. За одну минуту минутная опишет угол 6°, тогда часовая стрелка — в 12 раз **меньше**. Получим, 6° : 12 = 0,5°.

2. Найдём угол, который опишет минутная стрелка, если часовая опишет угол 6°. Теперь сравним наоборот.

Если **часовая** стрелка опишет угол 6°, тогда минутная в 12 раз **больше**, т.е. угол будет равен 72° = 6° × 12 = 72°.

Движение часовой стрелки за 30 минут

Через 30 минут (половина часа) часовая стрелка переместится на 2,5 минутных деления (половину часового деления), 30 : 12 = 2,5 и опишет угол 6° × 2,5 = 15°.

Иначе можно вычислить угол, используя то, что часовая стрелка движется в 12 раз медленнее по сравнению с минутной.

За 30 минут минутная стрелка опишет угол, равный 6° × 30 = 180°, тогда часовая в 12 раз меньше, т.е. 180 : 12 = 15°.

На рисунке показано положение часовой стрелки. Она находится посередине между часовыми делениями 9 и 10, т.е. она сместилась на 2,5 деления.

Решение задач, связанных с движением часовой стрелки

На экзамене предлагаются задачи, в которых требуется найти величину угла, который описывает часовая стрелка в заданное время.

Возможно несколько способов решения таких задач. При решении задач первым или вторым способами будем использовать установленные факты.

1-й способ. Чтобы найти угол, который опишет часовая стрелка за данное время, надо множить число минут (минутных делений) на 0,5°.

Ранее было установлено следующее.

За 1 минутное деление часовая стрелка описывает угол 0,5°.

Пример 1. Какой угол (в градусах) опишет часовая стрелка за 10 минут?

Решение: Надо 0,5° × 10 = 5°. *Ответ*: 5°.

Пример 2. Какой угол (в градусах) опишет часовая стрелка за 15 минут?

Решение: Надо 0,5° × 15 = 7,5. *Ответ*: 7,5°.

2-й способ. Чтобы найти угол, который описывает часовая стрелка за данное время, надо сначала найти угол, который опишет минутная стрелка за данное время, затем уменьшить его в 12 раз.

При решении задач этим способом будем использовать следующее.

Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной стрелки и описывает угол в 12 раз меньше, чем минутная стрелка за то же время.

Пример 3. Какой угол (в градусах) опишет часовая стрелка за 30 минут?

Решение: Минутная стрелка за 30 минут опишет угол 180°. Тогда часовая в 12 раз меньше, т.е. 180° : 12 = 15°. *Ответ*: 15°

Пример 4. Какой угол (в градусах) опишет часовая стрелка за 45 минут?

Решение: За 45 минут минутная стрелка опишет угол 6° × 45 = 270°. Тогда часовая стрелка — в 12 раз меньше, т.е. 270° : 12 = 22,5°. *Ответ*: 22,5°.

Третий способ решения основан на использовании свойства пропорции.

3-й способ. По условию задачи надо составить и решить пропорцию.

Например, какой угол (в градусах) опишет часовая стрелка за 3 часа?

Составим и решим пропорцию: за 12 часов — 360°

за 3 часа — x°. Тогда

$$x = \frac{3\times 360}{12} = 90 \text{ (градусов).}$$

Ответ: 90°.

Примеры задач на вычисление углов при движении часовой стрелки

1. (№ 132760) Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 20 мин?

Решение:

1 способ. Минутная стрелка за 20 минут опишет угол 6° × 20 = 120°, тогда часовая — в 12 раз меньше, т.е. 120° : 12 = 10°.

2 способ. 0,5° × 20 = 10°.

3 способ. Составим пропорцию. Предварительно выразим 20 минут в часах. Для этого $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ часа.

Тогда часовая стрелка: за 12 часов — 360°

за $\frac{1}{3}$ часа – x°. Получим

$$x = \frac{\frac{1}{3}\times 360}{12} = 10 \text{ (градусов).}$$

Ответ: 10°.

2. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 40 минут?
Ответ: 20°.

3. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 15 минут?
Ответ: 7,5°.

4. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 12 минут?
Ответ: 6°.

5. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 4 часа?

Решение: 1 часовое деление — это 30°.

Значит, за 4 часовых деления часовая стрелка пройдет 30° × 4 = 120°.

Ответ: 120°.

Или минутная стрелка пройдет за 4 часа 240 минутных делений. Часовая в 12 раз меньше, 240 : 12 = 20. Одна минутное деление — это 6°, т.е. 6° × 20 = 120°.

Или: за 1 час минутная стрелка опишет угол 360°. За 4 часа 360° × 4 = 1440°. Тогда часовая в 12 раз меньше, т.е. 1440 : 12 = 120°.

6. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 1 час 20 минут?
Ответ: 40°.

7. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка, если минутная описала угол 45°?

Решение: 1 часовое деление — это 30°.

Значит, за 4 часовых деления стрелка пройдёт 30° × 4 = 120°.

Ответ: 120°.

Или минутная стрелка пройдёт за 4 часа 240 делений. Часовая в 12 раз меньше, получим 240 : 12 = 20. Одно минутное деление составляет 6°, тогда за 20 минут часовая стрелка опишет угол 6° × 20 = 120°

8. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка, если минутная стрелка описала угол 126°?

Ответ: 10,5°.

Часовая и минутная стрелки

Так как на циферблате часов две стрелки - часовая и минутная, то можно рассматривать угол, который они образуют между собой при одновременном движении из некоторого данного положения в новое.

Эти задачи несколько сложнее. При их решении следует использовать установленные факты, способы вычисления углов, которые описывают минутная и часовая стрелки; делать рисунок, соответствующий данному времени, учитывать одновременное движение стрелок и их положение на циферблате. Минутная стрелка может опережать часовую стрелку или отставать от неё. Стрелки могут находиться в часовом, минутном делениях. В зависимости от этого для нахождения искомого угла надо сначала выделить часовые деления и определить угол между ними. С учётом величины угла, описанного часовой стрелкой, в одних случаях потребуется его прибавить, в других вычесть.

Решение задач, связанных с движением часовой и минутной стрелки

Будем учитывать факты, установленные раньше.

Угол между минутными метками равен 6°.

Угол между часовыми метками равен 30 .

Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной стрелки.

При решении таких задач с помощью рисунка можно провести анализ, позволяющий установить, из каких углов складывается искомый. После нахождения угла между часовыми делениями и угла, который опишет часовая стрелка, можно делать вывод о том, каким действием (сложением или вычитанием) находить искомый угол. Рассмотрим решение нескольких задач.

Пример 1. Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 16:20? Ответ дайте в градусах.

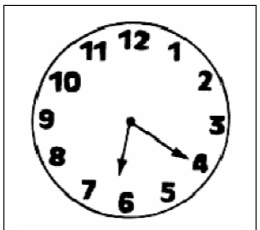
Решение:

Анализ ситуации. По условию минутная стрелка находится в часовом делении 4, а часовая между часовыми делениями 4 и 5. В этом случае задача сводится к определению угла, который опишет часовая стрелка за 20 минут.

Минутная стрелка опишет угол, равный 6° × 20 = 120°. Тогда часовая стрелка за это время опишет угол в 12 раз меньше, т.е. 120° : 12 = 10°.

Минутная стрелка находится в часовом делении 4, а часовая стрелка из деления 4 сдвинулась на 10°, значит, угол между ними 10°.

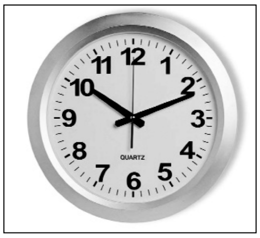
Ответ: 10°.



Пример 2. Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 18:20? Ответ дайте в градусах.

Анализ ситуации. По условию минутная стрелка находится в часовом делении 4, а часовая между делениями 6 и 7. В этом случае задача сводится к сложению 2-х углов:

- угла между часовыми делениями 4 и 6;
- угла, на который сдвинулась часовая стрелка за 20 минут от деления 6.

	Угол между часовыми делениями 4 и 6 равен $30^\circ \times 2 = 60^\circ$. Угол, на который сдвинется часовая стрелка, равен 10°. За 20 минут минутная стрелка опишет угол $6^\circ \times 20 = 120^\circ$. Часовая — в 12 раз меньше, т.е. $120^\circ : 12 = 10^\circ$. Тогда искомый угол между минутной и часовой стрелкой будет равен $60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$. *Ответ:* 70°.
	*Пример 3.* Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 16:45? Ответ дайте в градусах. *Решение:* Анализ ситуации. По условию минутная стрелка находится в часовом делении 9, а часовая между часовыми делениями 4 и 5. Задача сводится к вычитанию 2-х углов: • угла между делениями 4 и 9; • угла, который опишет часовая стрелка за 45 минут. Угол между часовыми делениями 4 и 9 равен $30^\circ \times 5 = 150^\circ$. Второй угол равен $22{,}5^\circ$. За 45 минут минутная стрелка опишет угол $6^\circ \times 45 = 270^\circ$. Часовая стрелка в 12 раз меньше, т.е. $270^\circ : 12 = 22{,}5^\circ$. Тогда искомый угол между часовой и минутной стрелками будет $150^\circ - 22{,}5^\circ = 127{,}5^\circ$. *Ответ:* $127{,}5^\circ$. Искомый угол можно найти иначе. Сначала определить, на какой угол часовая стрелка отстоит от деления 5, т.е. $30^\circ - 22{,}5^\circ = 7{,}5^\circ$. Затем надо будет учитывать угол между часовыми делениями 5 и 9, который равен 120°. И наконец, выполнить сложение углов, получим $120^\circ + 7{,}5^\circ = 127{,}5^\circ$.
	*Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в 10:11? Ответ дайте в градусах.* **Анализ ситуации.** По условию минутная стрелка находится в минутном делении 11, а часовая между часовыми делениями 10 и 11. Задача сводится к определению 3-х углов: • угла между часовыми делениям 10 и 2. • угла, который опишет минутная стрелка за 1 минуту. • угла, который опишет часовая стрелка за 11 минут. Угол между часовыми делениями 10 и 2 равен 120° ($30^\circ \times 4 = 120^\circ$). За 1 минуту минутная стрелка опишет угол 6°. За 11 минут минутная стрелка опишет угол $6^\circ \times 11 = 66^\circ$. Часовая стрелка в 12 раз меньше, т.е. $66^\circ : 12 = 5{,}5^\circ$. Окончательно, искомый угол между минутной и часовой стрелкой равен $120^\circ + 6^\circ - 5{,}5^\circ = 120{,}5^\circ$. *Ответ:* $120{,}5^\circ$.

Примеры задач на вычисление углов при движении часовой и минутной стрелки

1. (№ 132758) Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 5 ч?

Решение: по условию стрелки располагаются между делениями 12 (минутная) и 5 (часовая). Задача сводится к нахождению угла между часовыми делениями.

Между ними 25 минутных делений, значит, угол равен $6^\circ \times 25 = 150^\circ$.

(Или между стрелками 5 часовых делений, значит, угол равен $30^\circ \times 5 = 150^\circ$).

Ответ: 150°.

2. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают ровно 4 часа? Ответ: 120°.

3. Найдите угол в градусах между минутной и часовой стрелкой в 8 ч 30 мин.

Решение: по условию стрелки располагаются: часовая стрелка между часовыми делениями 8 и 9, минутная в часовом делении 6. Задача сводится к нахождению суммы 2-х углов:
- угла между часовыми делениями 8 и 9;
- угла, который опишет часовая стрелка за 30 минут.

Угол между двумя часовыми делениями 6 и 8 равен 60°, $30° \times 2 = 60°$.

Угол, который описала минутная стрелка за 30 минут, равен $6° \times 30 = 180°$. Тогда часовая стрелка в 12 раз меньше, т.е. $180° : 12 = 15°$.

Значит, искомый угол в 8 ч 30 мин равен $60° + 15° = 75°$.

Ответ: 75°.

4. Найдите угол в градусах между минутной и часовой стрелкой в 15 ч 15 мин.

Ответ: 7,5°.

5. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 7 ч?

Ответ: 150°.

6. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 5 ч 42 мин.?

Решение: по условию стрелки располагаются между часовыми делениями 5 и 6 (часовая) и между 8 и 9 (минутная). Задача сводится к нахождению 3-х углов:
- угла между часовыми делениями 5 и 8;
- угла, который опишет минутная стрелка за 42 минуты;
- угла, который опишет часовая стрелка за 42 минуты.

Затем к первому углу надо прибавить второй угол, и вычесть третий.

Между часовыми делениями 5 и 8 угол равен 90°, $30° \times 3 =° 90$

За 42 минуты минутная стрелка опишет угол, равный $6° \times 42 = 252°$.

Минутная стрелка описала угол 252°. Тогда часовая в 12 раз меньше, т.е. $252° : 12 = 21°$.

Искомый угол равен $90° + 12° - 21° = 81°$.

Ответ: 81°.

7. На какой угол (в градусах) поворачивается минутная стрелка, если часовая стрелка проходит угол в 2°?

Ответ: 24°.

8. На какой угол (в градусах) поворачивается минутная стрелка, если часовая стрелка проходит 24°?

Ответ: 288°.

9. На какой угол поворачивается минутная стрелка, пока часовая проходит 1°30´?

Ответ: 18°.

Задачи о вращении Земли вокруг своей оси

Земля не представляет собой идеальный шар, она огромна, её размеры впечатляют. Диаметр — 12570 км. Длина экватора — 40076 км. Длина любого меридиана — 40008 км. Общая площадь поверхности Земли — 510 млн. км2. Радиус у полюсов — 6357 км. Радиус у экватора — 6378 км. Некоторые задачи, которые включены в экзаменационные материалы, предполагают, что учащиеся имеют представление об этих величинах, их приближённых значениях.

Земля одновременно вращается вокруг солнца и вокруг собственной оси. Будем рассматривать вращение вокруг своей оси. Земля вращается вокруг наклонной оси с запада на восток. Эта ось отклонена на 23°27' от перпендикуляра к плоскости эклиптики. Благодаря вращению Земли происходит смена дня и ночи. Один оборот вокруг своей оси Земля делает за 24 часа — сутки.

За земную ось принимают воображаемую линию, вокруг которой вращается Земля.

Земная ось пересекается с земной поверхностью в двух точках — полюсах — Северном и Южном.

Если смотреть с Северного полюса, то вращение Земли происходит против часовой стрелки или, как принято считать, с запада на восток. Полный оборот вокруг оси планета совершает за одни звёздные сутки. Они равны 23 ч 56 мин 4 с. Сутки — единица измерения времени.

Движение точки поверхности Земли вокруг своей оси можно рассматривать как движение по окружности, ставить и решать несложные задачи. За 24 часа каждая точка поверхности Земли совершает полный оборот, т.е. описывает дугу 360°. Тогда за один час каждая точка на поверхности Земли передвигается на 15° от её первоначального положения, 360° : 24 = 15°.

Решение задач, связанных с вращением Земли вокруг своей оси

Пример 1. На сколько градусов Земля повернётся вокруг своей оси за 2 час?

Решение:

Длина окружности 360°, в сутках 24 часа. Значит 360° : 24 = 15°. За 2 часа Земля повернётся на 30°.

Или можно составить пропорцию.

24 часа — 360°.

2 часа — x°.

Получаем $x = \dfrac{2\times 360}{24} = 30$.

Ответ: 30°.

Пример 2. На какой угол вокруг своей оси Земля повернётся за одну минуту.

Решение:

Длина окружности 360°, в сутках 24 часа, 1 час = 60 минут. Значит 60′ : 24 = 1440′. Земля повернётся на угол, равный 360° : 1440 = 0,25°.

Это можно понимать как $\dfrac{1}{4}$ часть одного градуса.

Ответ: 0,25°.

Эти задачи можно решать с помощью пропорции.

Пример 3. На какой угол вокруг своей оси повернётся Земля за 2 часа?

Решение:

1 ч — 15°

2 ч — x°,

откуда $x = \dfrac{15\cdot\times\cdot 2}{1} = 30$ (°)

Ответ: 30°.

Пример 4. За сколько часов Земля повернётся вокруг своей оси на 45°?

Решение:

1 ч — 15°

x ч — 45°,

откуда $x = \dfrac{1\times 45}{15} = 3$ (ч)

Ответ: 3 часа.

При решении этих задач будем учитывать установленные факты.

Полный оборот Земля делает за сутки (24 часа).
Длина пути при полном обороте 360°.

Примеры задач на вращение Земли вокруг своей оси

1. На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 3 часа? *Ответ:* 45°.
2. На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 8 часов? *Ответ:* 120°.
3. За сколько часов Земля повернётся вокруг своей оси на 20°? *Ответ:* 1 ч 20 мин.
4. За сколько часов Земля повернётся вокруг своей оси на 720°? *Ответ:* 48 ч.
5. За сколько часов Земля повернётся вокруг своей оси на 900? *Ответ:* 6 ч.

Задачи о спицах в колесе

«Колесо имеет 5 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите ве-

личину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы».

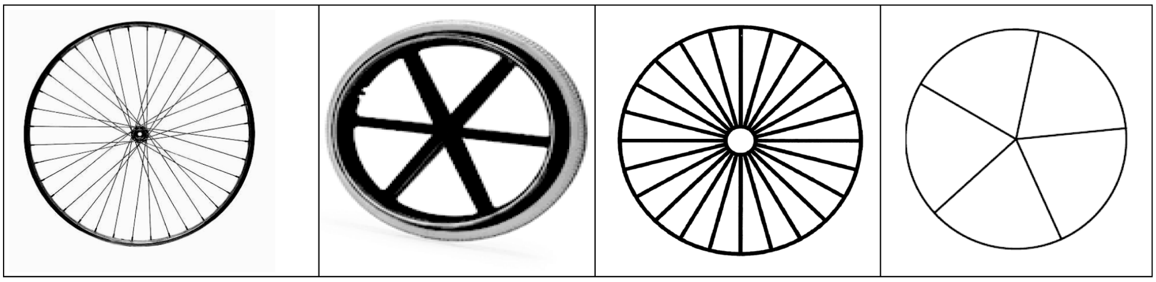
Для решения задачи необходимо иметь представление о спицах и колёсах. *Колесо,* -а, мн. ч. колёса, колёс, ср.1. В различных механизмах: диск или обод, вращающийся на оси или укреплённый на валу и служащий для приведения механизма в движение; вообще устройство такой формы. Рулевое к. Гребное к. Мельничное к. Зубчатое к. Маховое к. (в поршневых двигателях, компрессорах, насосах и других машинах: тяжёлое, с массивным ободом ~, устанавливаемое на валу машины для равномерного хода)[5].

В словаре Ушакова можно прочитать следующее: СПИЦА, спицы, жен. 2. Один из деревянных или металлических стержней, прутьев, соединяющих втулку колеса с его ободом. Колёсная спица. Велосипедная спица.

В тех задачах, в которых речь идёт об углах между соседними спицами, будем использовать приведённые толкования понятий и понимать, что геометрически речь идёт об окружности, её радиусах и центральных углах.

На рисунках — колёса со спицами, последний рисунок выполнен к поставленной выше задаче.

Её решение сводится к тому, что длину окружности, равную 360°, надо разделить на 5 частей. Получим 360° : 5 = 72° — это дуга, которой соответствует центральный угол 72°. Иначе: две соседние спицы образуют угол 72°. *Ответ:* 72°.



При решении таких задач будем учитывать следующие факты.

Число спиц равно числу промежутков между спицами.
Углы между соседними спицами равны.

Примеры задач о колёсах и спицах

1. В колесе 20 спиц. Сколько промежутков между спицами в этом колесе?
Ответ: 20.

2. Колесо имеет 40 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
Ответ: 9°.

3.Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.
Ответ: 20°.

4. Сколько спиц в колесе, если угол между двумя соседними спицами равен 20°.

Решение:
Разделим 360° : 20° = 18 (спиц).
Ответ: 18.

5. Сколько спиц в колесе, если угол между двумя соседними спицами равен 36°?
Ответ: 10.

6. (№134827) Сколько спиц в колесе, если угол между соседними спицами равен 9°?
Ответ: 40.

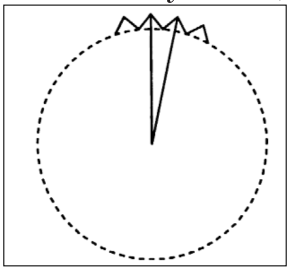
Эти задачи достаточно простые, можно немного усложнить и предложить вычислить длину спицы, длину всех спиц (для выяснения — сколько нужно материала).

В экзаменационных материалах встречаются и другие задачи, связанные с окружностью и кругом. Это задачи о зубчатых колёсах. Используя то, что длина окружности 360°, не трудно ответить на поставленный в задаче вопрос.

[5] *Ожегов С.И., Шведова Н.Ю.* Толковый словарь русского языка.

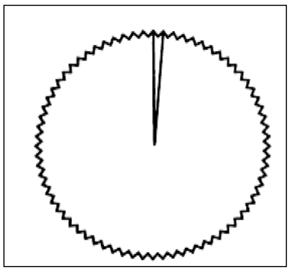
Например.

1. Сколько зубцов имеет колесо зубчатой передачи, если дуга окружности этого колеса, заключённая между двумя соседними зубцами, равна 12°?



Решение: 360° : 12° = 30 (спиц)
Ответ: 30.

2. Колесо зубчатой передачи имеет 72 зубца. Сколько градусов содержится в дуге окружности, заключённой между серединами двух соседних зубцов?



Ответ: 5.

В статье рассмотрены лишь некоторые типы задач модуля «Реальная математика», которые связаны с окружностью, кругом. Важно в ходе подготовки учащихся к экзамену снять напряжение и страхи, использовать больше иллюстративных материалов, показать как можно больше примеров, раскрывающих прикладную направленность курса геометрии.