Обучение методам решения нестандартных задач

Хабибуллин Кадыр Якунович — учитель математики школы № 12 г. Салавата Республики Башкортостан

Вся жизненная деятельность человека и общества состоит из каждодневного решения различных задач во всём многообразии их содержания, роли, целей, назначения и применяемых методов решения. Поэтому современная наука, в частности и педагогическая, придаёт большое значение изучению механизмов, способов решения самых разнообразных задач.

Что понимать под задачей в общем смысле и что понимать под решением задачи?

В психологии, методике преподавания математики широко принята трактовка задачи как цели, которую требуется достичь в определённых условиях. Вот как определяет понятие задачи известный психолог А.М. Матюшкин: «Задача — это способ знакового предъявления задания одним человеком другому (или самому себе), включающий указания на цель и условия её достижения. В интеллектуальных задачах цель действия составляет искомое, выраженное вопросом» [7. С. 189]. При этом предполагается, что способ достижения этой цели решающий выбирает на основе анализа условий и требований (вопросов) задачи. И весь выбранный для достижения цели путь как раз и является решением задачи. «Решение интеллектуальной задачи составляет процесс преобразования условий, направленный на достижение искомого» [7. С. 189]. Решение задачи — это процесс, показывающий творческую деятельность человека, решающего данную задачу.

Можно привести ещё одно определение задачи: «Задача — объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными её элементами» [2. С. 12]. Безусловно, такое объяснение сути задачи вообще имеет непосредственное отношение к задаче математической.

Если рассматривать чисто математическую задачу, то её понятие в общем смысле трактуется достаточно широко (в частности, если любую теорему считать задачей, то решение задач является единственной возможностью для математической деятельности учащихся). Умение решать математические задачи — наиболее яркая характеристика состояния математического мышления учащихся, уровня их математического образования и уровня их творческих способностей. Общеизвестно, что решение математических задач — наиболее трудная часть деятельности школьников при изучении математики, поэтому обучение этому виду деятельности занимает одно из главных мест в общем процессе обучения. Детей необходимо обучать математике для того, чтобы приобретённые знания они могли эффективно использовать для решения разнообразных задач, возникающих в практической деятельности.

Решение любой задачи — это сложный комплекс действий, в состав которого входят активно действующие математические знания и соответствующие им специальные умения и навыки, опыт в применении знаний и определённая совокупность сформированных свойств мышления, или мыслительных умений. Мыслительные умения представляют собой органичное сочетание качеств научного мышления, определённых нравственных качеств личности (увлечённости, настойчивости, стремления к творчеству).

При решении математической задачи перед школьниками встаёт проблема преобразования условий задачи с помощью некоего инструментария (соответствующие знания, умения и навыки) до получения необходимого результата. Такое преобразование — это как раз процесс создания нового, в данном случае пути решения. Активный поиск пути решения — процесс творческого мышления, под которым понимается следующее: «Творческое мышление — основной компонент в построении исследовательского понимания процесса решения проблемы (когда ученик сам открывает, сам находит неизвестный до этого путь к ответу, к раз-решению проблемы» [8. С. 47]. А это, в свою очередь, — необходимое условие творческой деятельности, невозможной без осознания цели поиска и творческого воображения, которое включает в себе целевую установку и способ преобразования объектов действительности. Целевая установка предполагает, как и в каком объёме должен быть использован материал исходной ситуации и что должно быть привлечено из прошлого опыта для раскрытия образа, темы, решения задачи и т.д., то есть целевая установка направляет процесс творческого преобразования по нужному руслу, ограничивая его определёнными рамками [8. С. 50].

Творческая деятельность в процессе изучения математики заключается, прежде всего, в решении задач. Умение решать задачи характеризует в первую очередь способность использовать теоретические познания в конкретной ситуации.

При решении традиционных, так называемых «алгоритмических» школьных задач ученики для их решения используют определённые знания, умения и навыки по узкому кругу вопросов программного материала. «Они решаются с помощью непосредственного применения определения, формулы, доказанной теоремы, для решений которых имеется алгоритм» [15. С. 134].

Роль алгоритмов, а следовательно, алгоритмических задач (стандартных), в обучении математике очень велика. Решение задач по алгоритму быстро и легко приводит к желаемому результату, тогда как незнание алгоритма может привести к многочисленным ошибкам и большой потере времени. Роль алгоритмических задач состоит в том, чтобы обучить важным алгоритмам, научить действовать стандартно в соответствующих ситуациях. «В типовых ситуациях поиск необходимо должен носить стандартизированный характер» [6. С. 8].

Школьник, хорошо усвоивший необходимые алгоритмы решения задач, может оперировать свёрнутыми знаниями при решении более сложных задач. Ему не нужно будет затрачивать больших усилий на поиск решения частичных проблем, которые решаются по алгоритму: мыслительная деятельность будет направлена на решение более важных проблем. В частности, при решении нестандартных задач ученики будут автоматически использовать свои алгоритмические умения.

Нестандартная задача, в отличие от традиционной, не может быть непосредственно (в той форме, в которой она предъявлена) решена по какому-либо алгоритму. «Нестандартные задачи — это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [12. С. 48]. Следовательно, возникает необходимость поиска решения, что требует творческой работы мышления.

Для ученика решённая нестандартная задача становится открытием, творческим достижением, что при решении нестандартных задач проявляется в таких действиях, как сопоставление, комбинирование данных задачи, вспомогательных построениях, введении вспомогательных элементов, замене одних элементов другими. Безусловно, решение нестандартной задачи — очень сложный процесс: ученик должен уметь догадываться, хорошо знать изученный и изучаемый материал, владеть общими подходами к решению задач и конкретными приёмами решения.

В последние годы среди материалов вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения встречаются достаточно сложные задания, представляющие серьёзную трудность для абитуриентов, привыкших выполнять лишь стандартные задачи. К таким заданиям можно отнести комбинированные уравнения и неравенства, т.е. такие уравнения и неравенства, в которых одновременно используются различные функции в различных отношениях. Такие задания дают для проверки способности абитуриентов применять свои знания в нестандартных ситуациях. Этому нужно учить.

Эффективным и красивым способом выполнения нестандартных заданий, особенно комбинированных уравнений и неравенств, является такой стандартный приём, как выделение полного квадрата из аналитического выражения уравнения или неравенства. Выработка у учащихся умения видеть скрытый на первый взгляд полный квадрат в заданном выражении существенно облегчает поиск решения задачи. При этом уравнения или неравенства, довольно сложные при решении их напрямую, после соответствующих преобразований сводятся к стандартному виду и решаются легко. Кроме того, выделение полного квадрата в аналитическом выражении уравнения или неравенства помогает привести это выражение в удобный для различных рассуждений вид, позволяет непосредственно использовать свойства функций.

Рассмотрим решение нескольких уравнений и неравенств методом выделения полного квадрата какого-либо выражения.

Задача 1. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{9x^2}{(3 + x^2)} = 7 \text{ [4. С. 16].}$$

Решение: Попытка решить это уравнение стандартным путём, то есть приведением к общему знаменателю, приводит к уравнению 4-й степени, решить которое в данном случае затруднительно. Надежда угадать корни путём перебора вариантов неосуществима, так как у этого уравнения нет рациональных решений. Отметим, что немногие школьники знакомы с этим достаточно громоздким методом, связанным с делимостью многочленов и теоремой Безу. Разложение на множители полученного многочлена 4-й степени также не представляется возможным по той же причине отсутствия рациональных корней. Поэтому откажемся от этого замысла и попробуем выделить полный квадрат в левой части уравнения.

Выделение полного квадрата — стандартный методический приём, но оно очень эффективно и эффектно, поэтому учеников нужно обучать этому приёму. Решение получается красивым и неожиданным. Начать нужно с внимательного изучения условия задачи.

В данном уравнении в левой части находится сумма квадратов двух выражений и это обстоятельство позволяет предположить: «А нельзя ли привести левую часть уравнения к полному квадрату какого-либо выражения, ведь не хватает лишь удвоенного произведения увиденных выражений?» Для этого к левой части уравнения прибавим и отнимем одно и то же выражение

$$2x \frac{3x}{3 + x},$$

представляющее собой удвоенное произведение двух слагаемых x и

$$\frac{3x}{3 + x},$$

квадраты которых заданы в условии. «Этому методическому приёму прибавления и вычитания одного и того же выражения к левой части уравнения также необходимо уделить особое внимание, потому что именно это позволяет нам привести заданное в уравнении выражение к полному квадрату двучлена. При этом данное уравнение перепишется в виде:

$$x^2 – 2x \frac{3x}{3 + x} + \frac{9x^2}{(3 + x)^2} + 2x \frac{3x}{3 + x} = 7.$$

Первые три слагаемых представляют собой квадрат разности. Поэтому получится такое уравнение:

$$x – \left(\frac{3x}{3 + x}\right)^2 = 7 \frac{6x^2}{3 + x},$$

которое после несложных преобразований можно представить в виде:

$$\left(\frac{x^2}{3 + x}\right)^2 = 7 – \frac{6x^2}{3 + x}.$$

Перед решением полученного уравнения необходимо снова внимательно изучить его, потому что оно легко приводится к стандартному заменой переменной. Методическая ценность этого приёма значительна, потому что позволяет кардинально упрощать, стандартизировать задание. Поэтому необходимо всегда акцентировать внимание учеников на этом методическом приёме.

Обозначим выражение

$$\frac{x^2}{3 + x}$$

через t и заменим его. Получим квадратное уравнение относительно t: $t^2 + 6t — 7 = 0$, корнями которого являются числа — 7 и 1. Вернувшись к значению введённого обозначения, решим два уравнения, которые легко приводятся к квадратным

$$\frac{x^2}{3 + x} = 7 \quad и \quad \frac{x^2}{3 + x} = 1,$$

первое из которых не имеет решения, а решениями второго являются числа

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Таким образом, данное уравнение имеет два решения [14]. Анализируя полученный ответ, можно ещё раз убедиться в том, что было сказано выше о практической невозможности решить это уравнение с помощью теоремы Безу.

Ответ:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Задача 2. Решить уравнение

$x^2 + 2x\, sin(xy) + 1 = 0$ [4. С. 22].

Это уравнение нестандартно как по форме, так и по методам решения. Особенность его в том, что в записи уравнения есть совершенно разные математические объекты, которые в стандартных задачах школьной программы вместе не встречаются. Это тригонометрическое и алгебраическое выражения. Кроме того, переменная x используется как аргумент и в тригонометрической функции, и в алгебраическом выражении, поэтому применить основные формулы для решения стандартных тригонометрических уравнений невозможно.

Чтобы решить задачи такого рода, которые можно назвать комбинированными, целесообразно использовать метод разделения, или метод перегруппировки. Суть этого метода заключается в разделении разных по существу математических объектов, имеющихся в условии, на разные группы, для того чтобы их анализировать и преобразовывать в отдельности, используя их свойства.

Решение: Заменив

$1 = sin^2(xy) + cos^2(xy),$

перепишем данное уравнение в виде:

$x^2 + 2x\, sin(xy) + sin^2(xy) + cos^2(xy) = 0.$

В левой части уравнения легко выделяется полный квадрат двучлена и получится такое уравнение:

$(x + sin(xy)^2 + cos^2(xy) = 0.$

В полученном уравнении левая часть является суммой двух неотрицательных выражений и имеет решение лишь при одновременном выполнении следующих условий:

$$\left| x + \sin\left(xy \right) = 0, \right.$$ ¿¿¿¿

В первом уравнении системы до конца разделить на разные группы x и sin(xy) не удалось. Поэтому воспользуемся вторым уравнением системы.

Из второго условия

cos(xy) = 0 следует, что *sin(xy) = ±1.* Поэтому полученная система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$x + 1 = 0,$ ¿¿¿¿

или

$x - 1 = 0,$ ¿¿¿¿

В полученных системах цель метода разделения или перегруппировки достигнута: алгебраические и тригонометрические функции находятся в разных уравнениях системы, и мы их можем решить независимо друг от друга. Решениями этих систем являются соответственно пары чисел:

$x = 1,\ y = +\ \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ *и*

$x = -1,\ y = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z.$ *[14]*

Ответ: $x = 1,\ y = +\ pn,\ n\ O\ Z$ *и*

$x = -1,\ y = -\pi/2 + \pi k,\ k \in Z.$

Задача 3. Решить уравнение

$cos(px) + x^2 + 6x + 10 = 0.$

Рассмотрим функции $f(x)= cos(px)$ *и* $g(x) = x^2 + 6x + 10.$ Преобразуем функцию $g(x),$ выделив полный квадрат из выражения $x^2 + 6x + 10.$

$g(x) = x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1(x + 3)^2 + 1.$

Так как $|f(x)| \le 1$, *а* $g(x) \ge 1,$ их сумма может быть равна нулю лишь при одновременном выполнении условия, а именно при $f(x) = -1$ *и* $g(x) = 1.$ Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$\cos(\pi x) = -1,$ ¿¿¿¿

$\cos(\pi x) = -1,$ ¿¿¿¿

$\pi x = \pi + 2p\pi, n \in Z,$ ¿¿¿¿

Полученная система уравнений совместна при $n = 1$ *и* $x = -3.$

Ответ: $x = -3.$

Различные задания с параметрами заняли прочное место в материалах вступительных экзаменов практически всех высших учебных заведений страны, однако в программе средней школы по математике методика решения таких заданий рассматривается недостаточно. Это создаёт известные трудности для учащихся, не знакомых с приёмами решения уравнений, неравенств с параметрами. Трудность выполнения заданий с параметрами обусловлена тем, что эти задания многовариантные: для успешного их решения необходимо рассмотреть большое количество случаев. Аналитическое решение заданий с параметрами очень часто сопровождается громоздкими выкладками, что сильно затрудняет нахождение оптимального пути решения. Достаточно эффективен при выполнении заданий с параметрами графический метод, поскольку он наглядный. Визуальность рассуждений с помощью графика способствует более глубокому пониманию вариативности решения задач с параметрами. После предварительных преобразований заданий такого рода, в частности выделения полного квадрата, графическая иллюстрация позволяет наглядно увидеть и перебрать множество вариантов изменения параметра: определять границы изменения значений выражений, входящих в уравнение или неравенство.

Рассмотрим решение следующих комбинированных примеров с параметрами.

Задача 4. Найти все значения параметра *a,* при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} = -a$$

имеет единственное решение [16. С. 330].

Решение: Перепишем данное неравенство так:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} + \frac{x^2+9}{a+\cos x} + a \le 0$$

Приводим левую часть неравенства к общему знаменателю и после несложных преобразований получим неравенство:

$$\frac{\cos^2 x - \left(x^2+9\right) + a^2 + 2a\cos x - 2a\sqrt{x^2+9} - 2\cos x\sqrt{x^2+9}}{a+\cos x} \le 0$$

Очевидно, что в числителе полученного неравенства — полный квадрат трёхчлена и поэтому неравенство примет вид:

$$\frac{\left(\cos x + a - \sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x} \le 0$$

Для того чтобы данное неравенство имело единственное решение, необходимо выполнение условия

$$\left(\cos x + a - \sqrt{x^2+9}\right)^2 = 0,$$

т.е.

$$\cos x + a - \sqrt{x^2+9}.$$

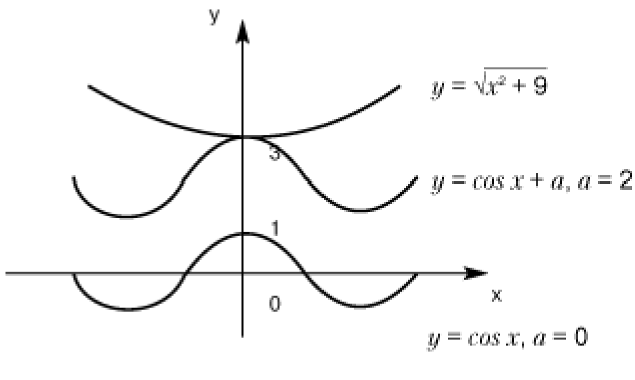
Решим полученное уравнение графическим способом, построим графики функций

$y = \cos x + a$ и

$$y = \sqrt{x^2+9}$$

(рис. 1).

Рис. 1



Полученная картина не позволяет рассуждать о существовании решения или о границах изменения значений функций, входящих в это неравенство, в зависимости от значения параметра. Вывод достаточно очевиден: уравнение имеет единственное решение, когда графики функций имеют лишь одну общую точку. В данном случае графики функций

$y = \cos x + a$ и

$$y = \sqrt{x^2+9}$$

имеют только одну общую точку с координатами (0; 3) при условии, что $a = 2$ [14].

Ответ: а = 2.

В традиционном понимании сути математических задач считается, что они должны быть точно определены, т.е. для каждой задачи существует единственное соотношение между данными и требуемым ответом. Решение таких задач предполагает поиск путей от исходных данных к ответу. Применительно к геометрическим задачам это утверждение можно было бы трактовать так: чертёж задачи однозначно определяет условие задачи. Например, треугольник должен быть задан своими какими-то тремя элементами, а круг — центром и радиусом. Таких примеров можно привести много. И следует заметить, что в школьных программах по математике изучаются в основном методы решения именно таких задач.

Но в последние годы вузы в свои вступительные экзамены часто включают задачи, которые на первый взгляд кажутся неопределёнными, т.е. допускают различную трактовку условия задачи и однозначно заданную фигуру не определяют.

Задача 5. В треугольнике ABC со сторонами AB = 12 и BC = 28 проведена медиана BD. Окружности, вписанные в ΔABD и ΔBDC, касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.

В этой задаче, как видно из условия, треугольник задан только двумя своими сторонами, т.е. он точно не определён численно, так как эти данные стороны можно расположить относительно друг друга под произвольным углом. Медиана, заданная в условии задачи, также не определяет треугольник. Следовательно, треугольники у каждого решающего данную задачу будут разными, и тем интереснее и поучительнее будет решить эту задачу. Вначале у школьников возникает естественный вопрос: как это для совершенно разных треугольников отрезок *MN*, связывающий точки касания совершенно разных окружностей, может быть одинаковым. Но как раз в этом и заключается смысл этой задачи. Оказывается, длина указанного отрезка не зависит от конкретного треугольника, а является постоянной величиной для всех треугольников с такими данными.

Решение таких задач развивает творческие способности, поскольку результаты устанавливают некоторые общие утверждения. Ученики «открывают» своего рода теоретические факты, можно назвать — новые теоремы.

Задача 6. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону с постоянной скоростью. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находятся в одной точке, мотоциклист отставал от них на 6 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

Решение: При решении этой задачи введём большое количество вспомогательных переменных, которые в конце решения задачи окажутся ненужными.

Так как пешеход, велосипедист и мотоциклист двигаются с постоянной скоростью, введём следующие обозначения: пусть скорость пешехода равна *к,* тогда скорость велосипедиста — *bк,* скорость мотоциклиста — *ак,* где *к, а, b* — некоторые постоянные.

Введём ещё три обозначения: пусть *x* — расстояние, которое прошёл пешеход от момента встречи с велосипедистом до встречи с мотоциклистом; *y* — расстояние от пешехода, на котором находится велосипедист в момент встречи пешехода и мотоциклиста; *z* — расстояние, которое прошёл пешеход от момента встречи с велосипедистом до момента встречи велосипедиста и мотоциклиста.

Составим следующие уравнения:

$$\frac{x}{k} = \frac{6+x}{ak} = \frac{x+y}{bk}$$

или

$$x = \frac{6+x}{a} = \frac{x+y}{b} \qquad (1);$$

$z \quad 6 + z + 3 \quad z + 3$

$$\frac{\quad}{k} = \frac{\qquad}{ak} = \frac{\qquad}{bk}$$

или

$$z = \frac{9 + z}{a} = \frac{z + 6}{b} \qquad (2);$$

Выразим x из уравнений (1).

$$x = \frac{6 + x}{a} \Rightarrow ax = 6 + x \Rightarrow x(a - 1) = 6 \Rightarrow \frac{6}{a - 1} \qquad (3);$$

$$x = \frac{x + y}{b} \Rightarrow bx = x + y \Rightarrow x(b - 1) = y \Rightarrow \frac{y}{b - 1} \qquad (4);$$

Из полученных равенств (3) и (4) выразим y через a и b.

$$\frac{6}{a - 1} = \frac{y}{b - 1} \Rightarrow y = \frac{6(b - 1)}{a - 1} \ (5).$$

Из уравнений (2) выразим a и b через z.

$$z = \frac{z + 9}{a} \Rightarrow a = \frac{z + 9}{z} \Rightarrow a = 1 + \frac{9}{z} \qquad (6);$$

$$z = \frac{z + 3}{b} \Rightarrow b = \frac{z + 3}{z} \Rightarrow b = 1 + \frac{3}{z} \qquad (7).$$

Подставим полученные значения a и b (равенства (6) и (7) в равенство (5) и получим искомое значение y.

$$y = \frac{6(b - 1)}{a - 1} = \frac{6(1 + 3/z - 1)}{1 + 9/z - 1} = \frac{18/z}{9/z} = 2.$$

Таким образом, получили, что велосипедист обогнал пешехода на 2 километра в тот момент, когда мотоциклист настиг пешехода.

Все вспомогательные переменные, введённые при решении данной задачи, сыграв главную роль в построении математической модели задачи, в конце уничтожились. Значит, их количественные значения нам не понадобились, а достаточно было найти их отношение.

Таким образом, решения достаточно сложных нестандартных рассмотренных задач показывают эффективность метода введения вспомогательных переменных.

Среди текстовых задач на составление уравнений задачи на совместную работу и производительность труда — самые трудные для школьников.

При решении текстовых задач на совместную работу основными компонентами являются: а) работа; б) время; в) производительность труда (работа, выполненная в единицу времени). Обычно при решении задач этого типа всю работу, которую необходимо выполнить, принимают за 1. Далее находят производительность труда каждого рабочего в отдельности, т.е. 1/t, где t — время, за которое указанный рабочий может выполнить всю работу, работая отдельно.

При таком подходе к решению задач на совместную работу школьникам обычно трудно понять смысл обозначения всей работы единицей, так как в реальной жизненной ситуации любая работа имеет некоторый объём, выраженный конкретным числом, обычно отличным от единицы. Условное принятие всей работы за 1 не способствует глубокому пониманию практического смысла задачи. Сомнение у учащихся вызывает и тот факт, что при этом производительность труда оказывается в представлении учащихся дробным числом, меньшим 1, потому что, как правило, время больше 1.

Трудности возникают также с соблюдением размерности величин, рассматриваемых в задаче, т.е. физическим смыслом задачи. Конкретно это проявляется при нахождении производительности труда.

Чтобы избежать таких проблем при решении задач такого рода, можно предложить обозначить всю работу какой-либо постоянной *A,* отличной от 1. Тогда производительность будет равна. Этот путь немного длиннее, но ученикам он более понятен, потому что выражает реальный смысл задачи. А в конце задачи введённая вспомогательная величина для работы уничтожится.

Покажем это на примере одной задачи, приведённой в книге В.С. Крамора «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа» [5. С. 392].

Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна бригада, а заканчивала ремонт участка дороги вторая бригада, производительность которой более высокая, чем первой бригады. В результате ремонт заданного участка дороги продолжался 40 дней, причём первая бригада в своё рабочее время выполнила 2/3 всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован участок дороги каждой бригадой отдельно?

Решение: 1. Пусть вся работа может быть выполнена первой бригадой за x дней, а второй бригадой за y дней.

2. Принимая работу за 1, учащиеся столкнутся со смысловой некорректностью, которая заключается в следующем; производительность труда первой бригады будет равна $1/x$, а второй –1/у. Возникает вопрос: «В каких единицах измерить производительность? В дорогах на день?» Очевидно нарушение физического смысла задачи.

3. Поэтому целесообразно обозначить всю работу (длину участка дороги) некоторой величиной *A,* измеряемой в километрах. Тогда производительность труда первой бригады равна A/x км/день, второй бригады — A/y км/день.

4. Составляем уравнение

$$\frac{A}{x} \times 18 + \frac{A}{y} \times 18 = A.$$

В дальнейшем введённая величина *A,* как видно, сокращается, но она несёт при решении задачи важную смысловую нагрузку.

Стандартная схема решения текстовых задач описана во многих методических книгах и состоит из трёх этапов:

1) отбор неизвестных;

2) составление соотношений между этими неизвестными в виде уравнений, систем уравнений или неравенств;

3) решение уравнений, систем уравнений или неравенств.

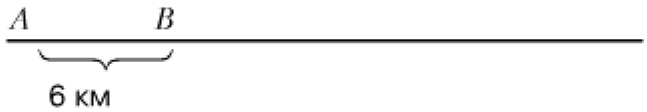
Выбирая неизвестное, мы ставим перед собой цель: создать математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. Составленные уравнения, системы уравнений или неравенства, связывающие выбранные неизвестные, как раз и будут математической моделью задачи. При этом составлять такую модель можно с помощью абстрактных рассуждений или построения наглядных схем, изображающих ситуации, возникающие в задаче. Такие схемы (схематичные модели), построенные при анализе условия задачи, помогают разбить задачу на логические части (ситуации), которые динамично изменяются. Это облегчает составление уравнений, систем уравнений или неравенств.

Рассмотрим решение задачи 6, предложенной выше, другим способом.

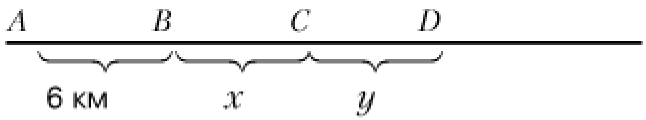
Недостатком предложенного способа решения этой задачи является достаточно абстрактный характер рассуждений и отсутствие наглядности. Для устранения этих недостатков построим решение задачи в схематичной форме, т.е. изобразим возникающие в задаче ситуации в виде схем, создадим наглядные модели этих ситуаций. При таком подходе наши рассуждения по введению переменных и составление соответствующих уравнений с их помощью для учащихся понятны и доступны. Разобьём процесс изменения условий задачи на ситуации и построим схему каждой из них.

Ситуация 1. Пешеход и велосипедист находятся в одной точке (точка B), а мотоциклист отстаёт от них на 6 км (точка A).

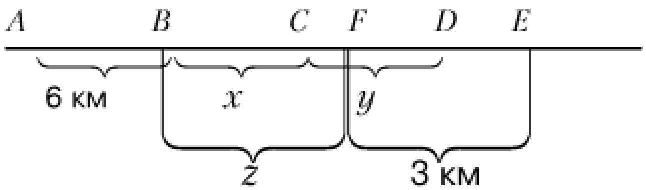
AB = 6.



Ситуация 2. Мотоциклист догнал пешехода в некоторой точке (точка C), а велосипедист в это время находится на некотором расстоянии от них (точка D).



Ситуация 3. Мотоциклист догнал велосипедиста в некоторой точке (точка E), а пешеход в это время находится в некоторой точке F.



По построенным схемам достаточно легко составляем приведённые выше уравнения.

В рассмотренных задачах были использованы наглядные модели изменяющихся ситуаций в процессе движения заданных объектов, и эти модели, представленные в виде схем, помогают ребятам выработать достаточно устойчивые навыки решения текстовых задач на движение.

В заключение отметим, что на примерах решения конкретных нестандартных задач мы попытались показать некоторые приёмы решения. Ещё Ньютон говорил, что примеры учат лучше теории. Поэтому чем большим количеством приёмов овладевают ученики на примерах решения конкретных задач, тем лучше они будут подготовлены к решению разного рода нестандартных задач, а в деятельности быстро развивают их творческие способности.

Литература

1. *Бусев А.И., Ефимов И.П.* Определения, понятия, термины в химии: Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1977.
2. *Гурова Л.Л.* Психологический анализ решения задач. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1976.
3. *Джонсон Ф.С.* Роль аксиоматики и решение задач по математике (Совет конференции математических наук). Вашингтон, 1966. С. 92.
4. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для 10–11-х кл. сред. шк. /Б.М. Ивлев, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, С.И. Шварцбурд. М.: Просвещение, 1993.
5. *Крамор В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М.: Просвещение, 1990.
6. *Кулюткин Ю.Н.* Эвристические методы в структуре решений. М.: Педагогика, 1970.
7. *Матюшкин А.М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика, 1972.

8. *Охитина Л.Т.* Психологические основы урока: В помощь учителю. М.: Просвещение, 1977.
9. *Пойа Д.* Математическое открытие. М., 1970.
10. *Пойа Д.* Как решать задачу. Львов: Квантор. 1991.
11. Психологический словарь / Под общ. ред. А.В. Петровского, М.Г. Ярошевской. М.: Политиздат, 1990.
12. *Фридман Л.М., Турецкий Е.Н.* Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1989.
13. *Хабибуллин К.Я.* Решение нестандартных задач — основа творческой деятельности учащихся // Школьные технологии. 2000. № 2. С. 137–141.
14. *Хабибуллин К.Я.* Стандартный приём в нестандартных задачах // Математика в школе. 2000. № 8. С. 14–15.
15. *Цукарь А.Я.* О типологии задач: Современные проблемы преподавания математики. М.: Просвещение, 1985.
16. *Черкасов О.Ю., Якушев А.Г.* Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Рольф, 1997.
17. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 10-го кл. сред. шк. М.: Просвещение, 1989.