Совершенствование подготовки будущего учителя к преподаванию стереометрии на основе укрупнения дидактических единиц (УДЕ).

С.А. Атрощенко

Преподавание темы «Комбинации сферы с многогранниками и телами вращения» - одна из сложных проблем в работе учителя, для решения которой требуется адекватная вузовская подготовка, овладение специальными знаниями и общеметодическими умениями (постановка целей, отбор методов и форм изучения материала, учёт индивидуальных особенностей учащихся и т.д.). Формирование последних находится в центре внимания методики преподавания математики. Однако, соединение общенаучной и методической линий в преподавании предполагает организацию формирования указанных умений и в процессе изучения математических дисциплин (геометрии, в частности) базовых курсов педвуза. Спецкурс даёт возможность на локальном, «узком» конкретном материале выводить студентов к ассоциациям, к «перекличкам» усвоенного ранее в пределах этих дисциплин, тем самым позволяя формировать общеметодические и специальные умения на более высоком уровне. Кроме того, спецкурс позволяет учитывать индивидуальные наклонности студентов, так как выбор его относительно свободен. А возможность выбора сама по себе играет значительную роль в процессе самоопределения и становления будущего специалиста.

Теоремы и задачи о комбинациях пространственных фигур (в том числе, комбинациях сферы с другими телами) входят в программу для школ и классов с углубленным изучением математики. Такие задачи обычно предлагаются на вступительных экзаменах в вузы, где математика является профилирующим предметом. Изучение теоретических вопросов и решение задач по названной теме имеет большое значение в математической подготовке и развитии мышления учащихся. В ходе решения таких задач происходит обобщение и систематизация знаний об элементах геометрических фигур и их зависимостях. В процессе распознавания различных видов многогранников, тел вращения и их комбинаций, а также построения соответствующих изображений развиваются пространственные представления и графические умения школьников.

Однако в действующих учебниках для средней школы А.Д. Александрова, Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова теоретические вопросы, относящиеся к комбинации многогранников и тел вращения, не рассматриваются и задач по этой теме очень мало. Только в конце учебника З.А. Скопеца «Геометрия 9-10», который в последний раз переиздавался в 1981 году, имеется набор задач на комбинацию сферы и многогранников. В связи с этим возникает необходимость систематизировать и обобщить теоретический материал, подобрать и составить задачи, изложить методику преподавания этой темы, что возможно осуществить в рамках спецкурса.

Овладение умениями изображать геометрические фигуры и их комбинации, задаваемые условиями теорем и задач школьного курса геометрии, можно организовать не только в ходе практических занятий по методам изображений, но и на занятиях практикума по решению математических задач, методике преподавания математики. Однако, из-за ограниченности во времени в рамках общих курсов невозможно подробно рассмотреть разнообразные случаи применения изученных методов изображений. При этом особый интерес представляет приложение вузовских методов для изображения комбинаций пространственных тел. Рассмотреть все комбинации практически невозможно. Однако наиболее частым является случай, когда одно из тел - шар. Именно в изображении таких комбинаций возникают особенные затруднения.

Таким образом предлагаемый спецкурс имеет своей целью развитие творческого мышления студентов, расширение и углубление их знаний через приложение изучаемой теории изображений к решению задач будущей профессиональной деятельности.

Поставленная цель объединяет ряд конкретных задач, важнейшими среди которых являются:

- развитие пространственных представлений и графической культуры студентов;
- обобщение и систематизация знаний о свойствах геометрических фигур и методах их изображения, полученных в основном курсе геометрии школы и педвуза;
- развитие умения применять изученные методы для изображения фигур, встречающихся в практике работы учителя;
- развитие умения составлять и решать задачи школьного курса геометрии;
- рассмотрение методических проблем, возникающих при изложении вопросов о комбинациях фигур.

Предлагается следующее содержание спецкурса:

Сфера описанная около цилиндра, конуса, усеченного конуса.

Сфера, описанная около пирамиды.

Сфера, описанная около призмы, усеченной пирамиды.

Сфера, вписанная в цилиндр, конус, усеченный конус.

Сфера, вписанная в призму.

Сфера, вписанная в пирамиду, усеченную пирамиду.

Сфера, касающаяся ребер многогранника.

Решение задач повышенной трудности на различные комбинации.

В соответствии с поставленными целями содержание занятий спецкурса составляют следующие вопросы:

- определения рассматриваемых комбинаций;
- теоремы о вписанной и описанной сфере (которых нет в школьных учебниках геометрии);
- изображения данных комбинаций;
- типичные задачи для каждого конкретного случая;
- методические рекомендации для будущего учителя по изложению теоретических вопросов темы, составлению и решению соответствующих задач.

Таким образом в содержание спецкурса включен материал, непосредственно примыкающий к школьному курсу геометрии. Рассматриваемые доказательства теорем, методы решения задач и построения изображений могут быть использованы для проведения внеклассных занятий по математике, а также при углубленном изучении комбинаций многогранников и тел вращения.

Методической основой спецкурса является концепция УДЕ, реализация которой означает, в частности, укрупненный подход к содержанию учебного материала. А именно: необходимо рассматривать совместно, в связях и переходах, целостные группы взаимосвязанных единиц этого содержания. Концентрация и уплотнение учебного материала способствует установлению и укорочению связей между отдельными видами знаний, тем самым обеспечивая их системность, уменьшая нагрузку студентов и сокращая расход учебного времени. Конкретизируя методические приёмы УДЕ, при отборе содержания и организации учебно-познавательной деятельности студентов на занятиях спецкурса используем следующие приёмы:

одновременное применение ортогональных проекций и метода Монжа для изображения геометрического объекта;

систематическое выделение и сопоставление аффинных и метрических свойств фигур;

совместное изучение в плане противопоставления планиметрических и стереометрических понятий;

использование аналогии как средства расширения и укрупнения знаний через предположение;

использование упражнений на самостоятельное составление задач;

емкое и обзорное представление учебного материала: матричная фиксация информации, параллельная и совмещенная запись сходных или контрастных суждений;

сочетание в задачах вычислений геометрических величин с точным построением изображений фигур.

При такой организации материала в поле зрения студентов в первую очередь оказываются связи между единицами изучаемого содержания, что способствует более прочному их усвоению и развитию умения применять имеющиеся знания в разнообразных ситуациях. Кроме того, эти приёмы деятельности преподавателя будущий учитель сможет перенести на учебный процесс в школе.

Так, при изучении теоретических вопросов и решении задач на комбинации пространственных фигур открываются большие возможности для одновременного рассмотрения планиметрических и стереометрических понятий. Находить взаимосвязь понятий, теорем, задач и возможности их совместного изучения в целях УДЕ помогает аналогия.

Преподаватель организует деятельность студентов на занятии таким образом, чтобы показать примеры проведения аналогии между планиметрическими и стереометрическими понятиями при изучении вопросов о вписанной и описанной сфере, которые будущий учитель сможет творчески использовать в преподавательской деятельности.

Известно, что около любого треугольника можно описать единственную окружность, центр которой находится на пересечении геометрических мест точек, равноудаленных от вершин треугольника. После проведения доказательства этой теоремы перед студентами ставится цель - составить и рассмотреть подобную теорему для пространства. Сравнивая тетраэдр с треугольником, естественно предположить, что около тетраэдра можно описать сферу, притом тоже единственную. Исследовав это предположение, можно убедиться в его правильности. При этом алгоритм решения задачи для треугольника продолжает работать и в случае обобщённой задачи для тетраэдра.

Для успешности осуществления аналогии важным является не отличие треугольника от тетраэдра, а их сходство, то есть возможность перехода от одной фигуры к другой, от одного рассуждения к сходному. Такой процесс мышления означает перенос метода исследования от одной фигуры к другой.

В процессе решения задач для треугольника и тетраэдра пара мыслей (предшествующая и последующая) образуют укрупненную единицу усвоения, включающую представления не только о плоскости, но и о пространстве. Оформление их может быть таким:

1. Всякая точка, лежащая на $\frac{\text{прямой}}{\text{плоскости}}$, проведённой через середину отрезка перпендикулярно к этому отрезку, равноудалена от концов отрезка.

2. Точка пересечения серединных перпендикуляров двух сторон треугольника есть центр описанной окружности.

Точка пересечения трёх плоскостей, проведённых перпендикулярно к трем ребрам тетраэдра через их середины, есть центр сферы, описанной около тетраэдра.

При этом мыслительные переходы от одного понятия к другому осуществляются, в основном, в подсознании, без оформления их в словесной форме. Если мы в данной паре задач поставим целью определить эти переходы, то придем к следующему перечню пар понятий: треугольник - тетраэдр; описанная окружность - описанная сфера; серединный перпендикуляр (отрезка) - серединная плоскость (ребра); две прямые пересекаются в одной точке - три плоскости пересекаются в одной точке и т.п.

В случае умозаключения по аналогии совершается сложный мыслительный процесс, в котором применяются в единстве и взаимопроникновении приёмы анализа и синтеза. Так, в приведённом примере умозаключение по аналогии возможно благодаря тому, что в результате сравнения треугольника и тетраэдра и анализа их свойств было установлено наличие у той и другой фигуры нескольких сходных свойств. На основе их было сделано предположение о наличии некоторого нового свойства (возможности описать сферу около тетраэдра). Доказательство сформулированного предположения сводится к синтезу понятий, относящихся к тетраэдру, причём синтез ведётся в том же порядке, что и синтез соответствующих понятий, относящихся к треугольнику (центр описанной сферы есть точка пересечения плоскостей, проведённых к трем ребрам через их середины, подобно тому, как центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров сторон).

Приём аналогии при обобщении задачи с плоскости на пространство используется и при изучении вписанной в тетраэдр сферы. Результат осуществления умозаключения по аналогии в этом случае находит выражение в следующей записи родственных суждений:

1. В любой $\dfrac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$ можно вписать $\dfrac{\text{окружность}}{\text{сферу}}$ и притом только одну.

2. Центр $\dfrac{\text{окружности}}{\text{сферы}}$, вписанной в $\dfrac{\text{треугольник}}{\text{тетраэдр}}$, есть точка пересечения $\dfrac{\text{биссектрис треугольника}}{\text{биссекторных плоскостей тетраэдра}}$.

Для вычисления радиусов вписанной или описанной сфер в некоторых случаях могут оказаться полезными формулы, выражающие зависимости аналогичные известным зависимостям для вписанной и описанной окружности.

Для треугольника

1. r = $\dfrac{S}{p}$

r - радиус вписанной окружности
p - периметр
S - площадь

2. R = $\dfrac{abc}{4S}$

R - радиус описанной окружности
S - площадь
a, b, c - длины сторон

Для тетраэдра

1. r = $\dfrac{3V}{S}$

r - радиус вписанной сферы
S - площадь полной поверхности
V - объём

2. R = $\dfrac{T}{6V}$

R - радиус описанной сферы
V - объём
T - площадь треугольника, стороны которого равны aa_1, bb_1, cc_1, где a, a_1, b, b_1, c, c_1 - длины ребер

Одновременное рассмотрение аналогичных планиметрических и стереометрических понятий не только способствует более глубокому и прочному их усвоению, но и овладению таким мощным средством познания действительности, как умозаключения по аналогии.

На первом занятии спецкурса студентам предлагаются задачи для самостоятельного решения во внеаудиторное время.

Студенты могут решать указанные задачи в любой последовательности. Заметим, что преподаватель проверяет выполнение всех предложенных заданий. В связи с этим, необходимо предупредить студентов о том, чтобы отчёты о работе представлялись ими на отдельных листах, а не в одной тетради. На листе плотной бумаги студенты должны изобразить комбинацию фигур, рассматривающуюся в задаче, а также записать её решение. Чертеж можно делать любым из известных методов (наглядное изображение в параллельной, в частности - ортогональной проекции, в аксонометрии, по методу Монжа), предпочтительнее - наиболее простым. Если заранее не ясно, какой чертеж окажется простейшим, то его следует сделать в нескольких вариантах и сравнить их.

По результатам проверки преподаватель указывает достоинства и недостатки выполненной работы. В случае возникновения затруднений при решении задач или выполнении изображения, студент может обратиться к преподавателю за консультацией.

В целях экономии времени изображения рассматриваемых в ходе занятия комбинаций фигур студенты выполняют на черновике. По каждой теме спецкурса чертежи оформляются на отдельных листах и предъявляются преподавателю на зачёте. В приложении 4 приведены чертежи по теме каждого занятия спецкурса, выполненные одновременно в ортогональной проекции и по методу Монжа.

С рассмотренных ранее позиций приведем указания к построению изображений различных комбинаций пространственных тел.

Изображение любого объекта следует считать наглядным лишь в том случае, когда оно максимально соответствует зрительному восприятию самого оригинала. Поскольку контур шара, независимо от расположения самого шара, всегда воспринимается как окружность, то его изображение может быть наглядным лишь в ортогональной проекции (только в такой проекции контур шара изображается в виде окружности). Тогда, чтобы изображения вписанных или описанных около шара фигур были верными, они также должны строиться в ортогональной проекции.

При выполнении изображений комбинаций шара с другими телами лучше начинать с изображения шара, если, конечно, условие задачи не требует другой последовательности построения. Такой порядок работы важен по следующей причине. Если за исходную фигуру принимать не шар, то её изображение нужно брать в проекции, о которой заведомо известно, что она ортогональная. Это условие во многих случаях способно усложнить построение требуемого чертежа.

Вид проекции, выполненной по методу Монжа, существенно зависит от положения комбинации фигур относительно плоскостей проекций. Поэтому во всех случаях будем придавать изображаемой комбинации такое расположение, при котором построение её проекции облегчалось бы в максимальной степени. Если чертеж делается к задаче на вычисление, то выполнять проекции фигур следует таким образом, чтобы проекции, будучи достаточно простыми, содержали неискаженные изображения по возможности всех данных и искомых элементов этих фигур.

Для придания большей наглядности получаемым чертежам будем использовать предположение, что тело является прозрачным по отношению к вписанному в него телу и непрозрачным по отношению к себе.

Таким образом, анализ содержания деятельности по изображению комбинаций шара с другими телами в ортогональной проекции и по методу Монжа позволяет выделить основные приёмы построения, которые состоят в следующем: 1) начинать ортогональную проекцию комбинации с изображения шара; 2) выбирать такое положение комбинации относительно плоскостей проекций, при котором на эпюре без искажений изображается наибольшее число необходимых, исходя из условия задачи, элементов фигур. Формирование у студентов умения применять указанные приёмы для изображения комбинаций фигур, встречающихся в школьной практике, осуществляется в ходе занятий спецкурса. Для того, чтобы студенты могли успешно пользоваться сформулированными приёмами, необходимо уверенное владение рассматриваемыми методами изображений; умение строить изображения тел вращения и многогранников, а также вписанных и описанных многоугольников; умение определять, как в зависимости от положения объекта относительно плоскостей проекций изменяется его изображение. Перечисленные умения формируются на практических занятиях по методам изображений в основном курсе. При этом последнее включает в себя умение рассматривать объект с разных точек зрения, что требует от студента сохранения в памяти геометрического образа, мысленного изменения пространственного положения его отдельных элементов. Выполнение этих действий студентами эффективно способствует развитию их пространственного мышления.

Рассмотрим подробнее содержание занятия по теме «Сфера, описанная около пирамиды».

Перед изучением комбинаций сферы с конкретными видами многогранников (призмой, пирамидой, усеченной пирамидой) целесообразно сформулировать общее определение:

Сфера называется описанной около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере.

Из приведённого определения следует, что все вершины многогранника находятся на одном и том же расстоянии от центра сферы, равном её радиусу. При установлении положения центра сферы, описанной около различных многогранников, будем использовать некоторые геометрические места точек (ГМТ). Поэтому предлагаем студентам в качестве ответа на соответствующий вопрос сформулировать следующие известные им утверждения.

ГМТ 1. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек А и В, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку АВ и проходящая через его середину.

ГМТ 2. Пусть в пространстве даны три точки А,В,С, не лежащие на одной прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от этих точек, есть прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника АВС и проходящая через центр описанной около него окружности.

Затем переходим к сфере, описанной около пирамиды. Изучение этой темы целесообразно начать с рассмотрения вопроса о сфере, описанной около тетраэдра. Поскольку около всякого тетраэдра можно описать сферу, здесь целесообразно провести аналогию с треугольником и описанной около него окружностью, как уже отмечалось выше.

При доказательстве теоремы: около всякого тетраэдра можно описать единственную сферу, необходимо акцентировать внимание студентов на следующем положении. Формулировка этой теоремы есть результат решения задачи - построить сферу, описанную около данного тетраэдра. При этом под «построением сферы» понимается построение её центра и радиуса. То есть задача непосредственно сводится к следующей: найти точку, равноудаленную от четырёх данных в пространстве точек. Для нахождения такой точки используются ГМТ1 и ГМТ2. Обобщение этого положения при рассмотрении вопросов о сфере, описанной около n-угольной пирамиды, усеченной пирамиды, призмы, даёт возможность студентам самостоятельно доказывать соответствующие теоремы.

Например, для n-угольной пирамиды справедлива теорема: вокруг пирамиды можно описать сферу, если можно описать окружность около многоугольника, лежащего в основании пирамиды.

При доказательстве воспользуемся идеей, изложенной выше. Будем искать точку, равноудаленную от всех вершин пирамиды.

Если около многоугольника, лежащего в основании пирамиды, можно описать окружность, то точки, равноудаленные от вершин этого многоугольника, лежат на прямой l, перпендикулярной плоскости многоугольника и проходящей через центр O_1 описанной около него окружности (ГМТ2).

Согласно ГМТ1 точки, равноудаленные от точек А и N, лежат в плоскости α, перпендикулярной ребру AN и проходящей через его середину К. Очевидно, что центр описанной сферы О есть точка пересечения плоскости α и прямой l (на рис. 1 показана линия пересечения плоскостей α и ANC).

Рис. 1

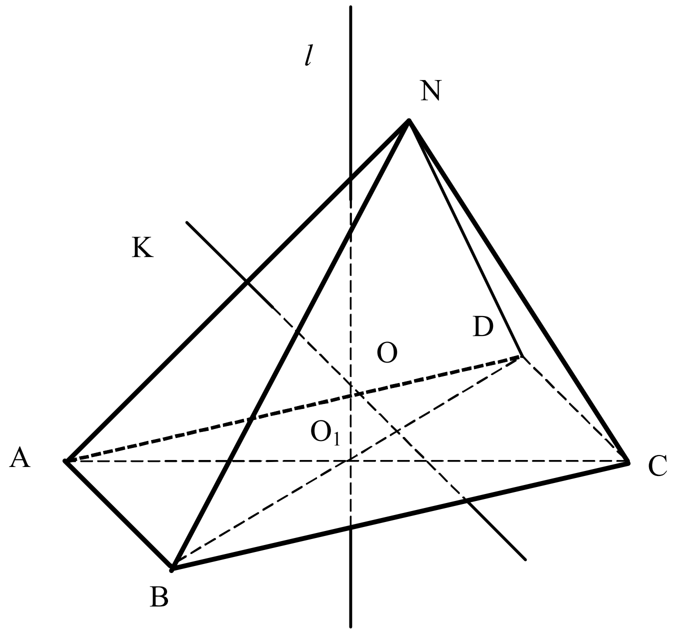
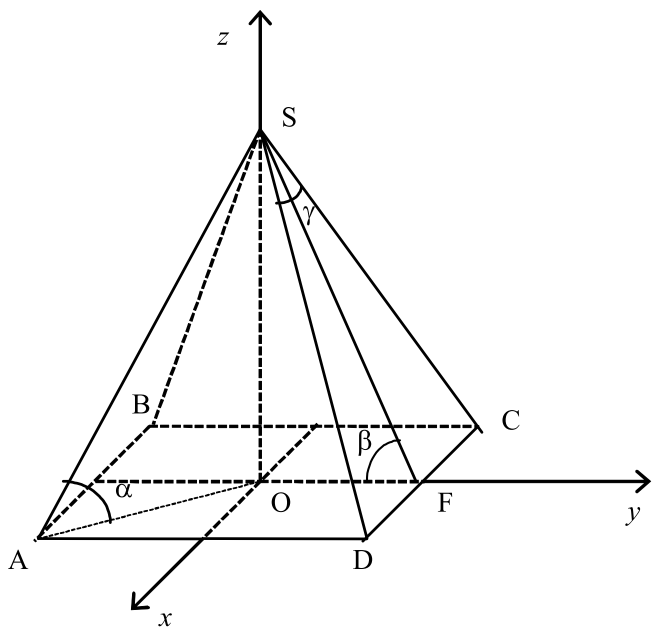


Рис. 2



Докажем, что прямая l и плоскость α всегда пересекутся. Действительно, если допустить, что прямая l параллельна α, то прямая AN, перпендикулярная α, перпендикулярна и l. Тогда $l \perp ABC$ и $l \perp AN$. Следовательно, $AN||ABC$ и, значит, точка N принадлежит плоскости ABC, а это противоречит условию.

Центр описанной сферы может располагаться внутри, на боковой грани, на основании и вне пирамиды. В частности, в правильной пирамиде центр описанной сферы лежит на её высоте или на продолжении высоты за плоскость основания.

Изобразим рассматриваемую комбинацию шара с пирамидой. Построение начинаем с изображения шара. Затем изображаем одно из плоских сечений шара (в качестве такого сечения удобно взять параллель) и располагаем на нем вершины основания пирамиды. Произвольная точка M, взятая на контурной окружности или внутри неё, служит изображением точки сферы. Убедившись, что эта точка не находится в плоскости построенного сечения, соединяем её с вершинами основания и получаем изображение пирамиды, вписанной в шар.

Если вписанная пирамида - правильная, то вершину её помещаем в полюсе шара. Основание пирамиды изобразиться соответствующим правильным многоугольником, вписанным в окружность сечения шара (параллель). Примеры построения таких многоугольников рассматривались на практических занятиях по методам изображений в основном курсе.

Поскольку в школьном курсе геометрии, в основном, рассматриваются правильные пирамиды, вписанные в шар, то приведем пример изображения комбинации шара с правильной четырёхугольной пирамидой.

Чертеж по методу Монжа начинаем с построения вертикальной проекции пирамиды. Располагаем ребро NA параллельно вертикальной плоскости. Тогда боковое ребро и угол его наклона к основанию изображаются в натуральную величину.

Выполняем горизонтальную проекцию пирамиды (квадрат с диагональю АС), затем вертикальную проекцию шара - описанную окружность и его горизонтальную проекцию - окружность того же радиуса.

Сравнивая методы, использованные для построения чертежей, студенты приходят к выводу, что изображение комбинаций в ортогональной проекции является более наглядным. Однако стремление к наглядности чертежа ведёт к большей трате времени на его выполнение. Эпюры Монжа обладают меньшей наглядностью, но характеризуются относительной простотой выполнения. Сравнительный анализ примененных методов способствует формированию у студентов умения выбирать тот из них, который в наибольшей степени отвечает целям использования чертежа.

Следует обратить внимание студентов на то, что при решении разнообразных задач на данную комбинацию зависимость между радиусом сферы и линейными элементами правильной пирамиды устанавливается посредством прямоугольных треугольников AOO_1, или NOK, или ANS (рис. 1). Нужно иметь ввиду, что поскольку треугольник ANO равнобедренный, то $\angle AOO_1 = 2\angle ANO_1$.

Для n-угольной правильной пирамиды на чертеже достаточно изобразить часть пирамиды NAO_1, где NO_1 – высота пирамиды, NAD – боковая грань.

В различных учебных пособиях по стереометрии часто встречаются задачи на комбинацию сферы с правильной пирамидой. При этом среди них много однотипных задач на вычисление различных элементов, входящих в данную комбинацию фигур, а также их объёмов.

С целью наиболее эффективной организации деятельности студентов на занятиях спецкурса мы используем укрупненные упражнения, в которых необходимо, самостоятельно преобразовав решенную «готовую» задачу, получить новую. При этом применяются различные приёмы составления задач: аналогия, обобщение компонентов исходной задачи, их конкретизация и т.д.

Приведем пример упражнения на составление задачи, аналогичной данной, при изучении сферы, описанной около пирамиды.

Наиболее часто среди углов, которые можно рассматривать в правильной пирамиде, в задачах встречаются

а) угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды, его величину условимся обозначать буквой α;

б) угол наклона боковой грани к плоскости основания – β;

в) плоский угол при вершине пирамиды – γ.

Зная величину любого из перечисленных выше углов, можно определить величину всех остальных (другими словами, тригонометрические функции этих остальных углов можно выразить через тригонометрические функции данного угла). Назовём зависимости между рассмотренными углами формулами перехода. Оказывается, что, задавая два линейных или угловой и линейный элементы пирамиды и применяя формулы перехода, можно найти остальные элементы правильной пирамиды, её объём, а также радиус описанной (и вписанной) сферы.

Поэтому после доказательства теоремы о сфере, описанной около пирамиды можно предложить студентам решить следующую задачу.

Задача 1. Дана правильная n-угольная пирамида с обозначенными выше углами α, β, γ. Выведите формулы перехода, связывающие эти углы между собой.

А затем предложить им самостоятельно составить и решить задачи, аналогичные, например, следующей.

Задача 2. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом γ при вершине. Определите высоту пирамиды.

Заметим, что при выводе формул перехода студентам целесообразно воспользоваться следующей идеей: обозначить через x длину отрезка в правильной пирамиде, входящего в оба треугольника, содержащих данный и искомый углы. Выразить далее через x и тригонометрические функции данного угла одну из двух других сторон в том треугольнике, который содержит искомый угол. Затем найти функцию искомого угла.

После того, как определена общая идея вывода, студентам предлагается конкретизировать её для случаев трёх-, четырёх-, n-угольной правильных пирамид. Студенты делятся на три группы, каждой из которых даётся задание изобразить пирамиду в кабинетной проекции и вывести формулы перехода, соответствующие указанным случаям.

Приведем вывод формул перехода для правильной 4-й пирамиды.

Строим изображение данного многогранника в кабинетной проекции, отмечаем на чертеже рассматриваемые углы (рис. 2). Затем переходим к выводу формул. При этом условимся «От β к α» понимать так: «В правильной четырёхугольной пирамиде тригонометрическую функцию угла α выразить через тригонометрические функции угла β». Аналогично понимаются: «От γ к α» и «От γ к β».

а) От β к α. Положим SO = x.

Из треугольника SOF: $OF = x\cdot \mathrm{ctg}\beta$.

Из треугольника OFD: $OD = x\cdot\sqrt{2}\cdot \mathrm{ctg}\beta$.

Из треугольника SOD: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{x}{x\cdot\sqrt{2}\cdot ctg\beta} = \dfrac{tg\beta}{\sqrt{2}}$.

б) От γ к α. Положим SD = x.

Из треугольника SDF: $DF = x\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Из треугольника OFD: $OD = x\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Из треугольника SOD: $\cos\alpha = \dfrac{x\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{x} = \sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

в) От γ к β. Положим SF=x.

Из треугольника SDF: $DF = x\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Из треугольника SOF: $OF = x\cdot\cos\beta$, $\cos\beta = \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Вывод соответствующих формул перехода для правильных трёх- и n-угольной пирамид аналогичен приведённым рассуждениям.

Результаты работы трёх групп студентов целесообразно представить в виде матрицы (рис. 3).

Рис. 3

Переход/ /n	**От β к α.**	**От γ к α.**	**От γ к β.**

3	$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{tg}\beta$	$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$	$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$
4	$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{tg}\beta$	$\cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$	$\cos\beta = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$
n	$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta\cdot\cos\frac{\pi}{n}$	$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$	$\cos\beta = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}$

Полученные формулы эффективно используются при составлении и решении многих геометрических задач, но запоминать их, разумеется, не нужно. Достаточно знать идею их вывода.

Заметим, что не следует ограничиваться решением задач на комбинацию сферы с правильной пирамидой. Необходимо рассматривать и такие вписанные в сферу пирамиды, у которых боковые ребра равны или одинаково наклонены к плоскости основания, или одно из них перпендикулярно плоскости основания. Приведем пример такой задачи.

Задача 3. Ребро CD пирамиды ABCD перпендикулярно грани ABC. Найдите радиус сферы, описанной около основания пирамиды, если CD=h, AB=c, $\angle$ACB= σ.

Итоговой формой контроля по спецкурсу является зачёт. К нему допускаются студенты, правильно и в срок выполнившие все предложенные задания (оформленные чертежи по каждой теме и решенные задачи самостоятельной работы).

В результате у студентов, прослушавших спецкурс, имеется теоретический материал о комбинации сферы с многогранниками и телами вращения, примеры решения типичных задач, необходимые для каждого конкретного случая чертежи. Таким образом, собранный материал студенты могут использовать в период педагогической практики, а затем, работая в школах и классах с углубленным изучением математики, готовя своих учеников ко вступительным экзаменам в вузы.